

Apuntes del CENES

ISSN 0120-3053

Vol. XXIX - Nº. 50

Págs. 117 - 150

II Semestre de 2010

# Estimación del riesgo en un portafolio de activos

*Sandra Milena Salinas* \*

*Diana A. Maldonado* \*\*

*Luis Guillermo Díaz* \*\*\*

Fecha de recepción: 18 de agosto de 2010

Fecha de aprobación: 30 de septiembre de 2010

Clasificación JEL: G12, G24, G32

---

\* Especialista en Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá. Correo electrónico: smsalinas@unal.edu.co

\*\* Especialista en Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá. Correo electrónico: damaldonadov@unal.edu.co

\*\*\* Profesor Asociado, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: lgdiazm@unal.edu.co

## Resumen

Este trabajo introduce el uso de la teoría de valor extremo (EVT) y cópulas para la estimación del valor en riesgo (VaR). Se considera como aplicación a un portafolio compuesto por tres activos representativos del mercado colombiano. Los retornos de los factores de riesgo de los activos se ajustan mediante los modelos ARMA GARCH. Para cada factor de riesgo se modelan las innovaciones a través de la distribución generalizada de Pareto, para la estimación de la volatilidad a un día. De otro lado, las cópulas son construidas asumiendo que las innovaciones siguen una distribución marginal empírica con el objetivo de caracterizar la estructura de dependencia entre los factores de riesgo.

Las pruebas de desempeño del valor en riesgo calculado para tres meses, muestran que modelar la volatilidad y dependencia a través de dichas metodologías es más apropiado que bajo metodologías basadas en el supuesto de normalidad.

**Palabras clave:** teoría de valor extremo, cópulas, valor en riesgo, dependencia, retornos.

## Abstract

This paper introduces the use of extreme value theory (EVT) and copula for the estimation of value at risk (VaR) for a three asset portfolio representative of the Colombian market. Returns on risk factors are adjusted by ARMA GARCH models and innovations for each of them are modeled by Pareto's generalized distribution in order to estimate one-day volatility. Copulas are built on the assumption that innovations follow an empirical marginal distribution so as to represent the dependence structure among risk factors.

Performance tests for a series of three month VaR estimations show that modeling volatility and dependence through the use of these theories result more appropriate than those based on normality assumptions.

**Key words:** extreme value theory, copula, value at risk, dependence, returns.

## 1. Introducción

Los mercados financieros se han caracterizado por experimentar periodos inesperados de alta, media y baja volatilidad, como resultado de las interrelaciones de las variables de mercado que determinan los precios de los activos. Esta variabilidad en el comportamiento de los activos y su respectivo impacto sobre el valor de los portafolios de los inversionistas, ha generado la aparición de un gran número de metodologías y teorías orientadas a la estimación de la pérdida potencial ocasionada por movimientos adversos del mercado.

En la medida en que las entidades han reconocido la importancia que tiene la adecuada administración de los riesgos de mercado dentro de su desempeño financiero, éstas han dado un mayor énfasis a la implementación y

entendimiento de las metodologías de medición del riesgo. En este sentido, el valor en riesgo VaR (Value at Risk por sus siglas en inglés) se ha convertido en la medida estándar por excelencia de los agentes y reguladores a nivel mundial para la cuantificación del riesgo de mercado y la metodología con base en la cual se definen límites y estrategias de los portafolios.

El VaR es definido como la máxima variación potencial en el valor de mercado de un portafolio de activos financieros, durante un horizonte de tiempo específico, con un determinado nivel de confianza y bajo condiciones normales de mercado. Sin embargo, uno de los aspectos más fuertes sobre los cuales se basa toda la teoría de valor en riesgo bajo los modelos paramétricos comunes, consiste en la suposición de *normalidad* de los rendimientos.

No obstante, la realidad de las series financieras es que al presentar altas curtosis y, por ende, colas gruesas, la probabilidad de eventos extremos es mucho mayor que la sugerida por la distribución normal y, por lo tanto, se hace necesario utilizar una metodología que incorpore dentro de la medición del riesgo la materialización de dichos eventos extremos, conocidos también como *outliers*. La estimación de la probabilidad de eventos extremos es un punto crítico en la gestión del riesgo de los portafolios de inversión. La teoría de valor extremo (EVT por sus siglas en inglés) proporciona la base fundamental necesaria para el modelamiento estadístico de este tipo de eventos, así como el cálculo de medidas de riesgo extremo.

De otro lado, parte de la teoría financiera está relacionada con la *diversificación de portafolios* realizada mediante el cálculo de las *correlaciones* entre activos financieros, basadas también en *normalidad*, según las directrices regulatorias de la medición del riesgo de mercado en Colombia (*Correlación de Pearson*). No obstante, bajo el supuesto de normalidad, la correlación calculada solamente logra capturar asociaciones de tipo lineal, que no miden de manera apropiada las relaciones empíricas que se presentan en el mercado financiero, sobrestimando (subestimando) el grado de relación real. Es por esto que la teoría

de cópulas permite describir de manera adecuada la estructura de dependencia entre activos financieros, independiente de la distribución de probabilidad seguida por cada uno de ellos. De esta manera, el concepto de dependencia desarrollado por las funciones de cópulas es más general que el concepto de correlación lineal, sobre el cual se basan las metodologías tradicionales de VaR, al permitir capturar relaciones no lineales entre activos financieros.

Este documento se dividirá en cinco (5) secciones. En la primera, se hará una introducción al modelo de portafolio y valor en riesgo. En la siguiente sección se presentan los modelos de cópulas, sus principales características relacionadas con la estimación del VaR y el procedimiento de estimación del modelo. El tercer capítulo presenta la descripción de la teoría de valor extremo. Posteriormente, se presenta la aplicación a un portafolio de activos, en donde el comportamiento de los modelos de cópulas y EVT son comparados con los métodos tradicionales (varianza-covarianza). Finalmente, se presentan las conclusiones del estudio.

## 2. Conceptos básicos

### 2.1 Teoría del Portafolio<sup>1</sup>

Un portafolio es un conjunto de instrumentos, cuyo objetivo es obtener el

<sup>1</sup> FREGOSO L. J., (S.F.). Teoría de Portafolios, presentación, Universidad Anáhuac.

máximo rendimiento con el mínimo nivel de riesgo. A esta técnica de selección de instrumentos (activos financieros) se conoce como la *Teoría Moderna de Portafolios* y busca obtener un portafolio óptimo entre un universo de posibles alternativas. Este portafolio deberá solucionar las necesidades de los inversionistas en cuanto a riesgo y tiempo, por lo que el administrador del portafolio deberá maximizar el rendimiento dado el riesgo asumido. Una solución a este problema la propuso Harry M. Markowitz en 1952, cuando publicó un artículo, considerado como el origen de la teoría moderna de portafolios.

Según Markowitz, el inversionista debe ver la tasa de rendimiento asociada con los diversos portafolios como una variable aleatoria. Dicha variable puede ser descrita por sus momentos, dos de los cuales son el rendimiento esperado (media) y la desviación estándar. Markowitz afirma que los inversionistas deben basar sus decisiones de selección de portafolios solamente en rendimientos esperados y desviaciones estándar, dado que el rendimiento esperado se puede ver como la recompensa potencial asociada con el portafolio y la desviación estándar se puede ver como una medida del riesgo del portafolio.

### **Rendimiento esperado**

Debido a que el inversionista no tiene certidumbre sobre el valor final del portafolio ( $W_1$ ), es necesario realizar una estimación de posibles valores futuros o un "análisis de escenarios" con probabilidades asociadas. Esta distribución de probabilidad permite obtener medidas tanto para el rendimiento esperado (media estadística) como para el riesgo. El rendimiento esperado se puede estimar de la siguiente forma:

$$E_{(p)} = \sum_{i=1}^n p_i * r_{p_i}$$

donde  $E_{(p)}$  es el rendimiento esperado del portafolio,  $p_i$  es la probabilidad<sup>2</sup> del rendimiento esperado con el escenario  $i$ , y  $r_{p_i}$  es el rendimiento esperado con el escenario  $i$ .

### **Medidas de riesgo**

La variabilidad del rendimiento posible contra el rendimiento esperado se conoce estadísticamente como la desviación estándar. Primero se debe calcular la varianza, la cual se conoce como  $s^2$  y, finalmente, calcular la desviación estándar,

$$s^2 = \sum_{i=1}^n p_i (r_{p_i} - E(p))^2$$

<sup>2</sup> La probabilidad de los escenarios debe cumplir con la restricción de encontrarse en el intervalo [0,1] y su sumatoria debe ser igual a 1.

La desviación estándar es utilizada como medida del riesgo ya que trata tanto las desviaciones negativas como las positivas de igual manera.

**Portafolio de dos activos con riesgo**

El rendimiento esperado de un portafolio de dos activos con riesgo será el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos que componen dicho portafolio.

$$E(p) = W_a E(a) + W_b E(b)$$

Donde  $W_a$  es la proporción del activo  $a$  y  $W_b$  es la proporción del activo  $b$ , siendo también ésta  $1 - W_a$ .

El riesgo del portafolio se calcula con la siguiente ecuación:

$$\sigma_p = \sqrt{W_a^2 \sigma_a^2 + W_b^2 \sigma_b^2 + 2 W_a W_b \text{cov}(a,b)}$$

En este sentido, el riesgo de un portafolio depende de las desviaciones estándar de los activos individuales que lo componen y de la relación existente entre cada par de instrumentos. Esta última medida a través de la covarianza [cov(a,b)]. La covarianza es una medida de cómo dos variables aleatorias, como los rendimientos de los valores  $a$  y  $b$ , se "mueven juntos". Un valor positivo de ésta significa que los rendimientos de estos valores tienden a moverse en la misma dirección. Un valor negativo

significa una tendencia contraria. Un valor muy bajo o de cero significa que hay muy poca o ninguna relación entre los rendimientos de ambos valores. El cálculo de la covarianza, cuando se tiene una distribución de probabilidad sería:

$$Cov_{ab} = \sum_{i=1}^n p_i (r_{ai} - E(a))(r_{bi} - E(b))$$

**Correlación**

La correlación es una medida estadística muy relacionada con la covarianza. Lo que hace la correlación es cambiar la escala de la covarianza para facilitar la comparación sin importar la escala de las variables. El coeficiente de correlación está dado por la siguiente expresión:

$$\rho_{ab} = \frac{Cov_{ab}}{\sigma_a \sigma_b}$$

Los coeficientes de correlación siempre están entre  $-1$  y  $1$ . Un valor de  $-1$  representa correlación negativa perfecta, lo que quiere decir que varían en forma inversa en la misma proporción. Una correlación de  $1$  representa una correlación positiva perfecta, implicando un movimiento de ambas variables en la misma dirección y en la misma proporción.

**2.2 Valor en riesgo - VaR**

El VaR es una estimación prospectiva de la máxima pérdida esperada de un portafolio de inversión durante un

horizonte de tiempo y nivel de confianza determinado, bajo condiciones normales de mercado. Formalmente, si  $M$  representa el valor de un activo o portafolio de inversiones y  $V = M_{t_1} - M_{t_0}$ , representa el cambio (ingreso/pérdida) de dicho valor durante el periodo de tiempo definido como  $T = t_1 - t_0$ , entonces el VaR se puede definir como:

$$VaR = E(V) - V^*$$

en donde  $E(V)$  corresponde al valor esperado de  $V$ , mientras que  $V^*$  corresponde a la máxima reducción en el valor del portafolio resultante durante el periodo de tiempo  $T$  con una probabilidad  $p$ .

Adicionalmente, el VaR puede ser expresado en términos de retornos. Por ejemplo, la variación del valor de un portafolio puede estar dada de la siguiente forma:

$$V = M_{t_0} \cdot X, \text{ siendo } X = Ln(M_{t_1}/M_{t_0})$$

De esta forma, el VaR es calculado con base en el retorno crítico  $X^*$  y se puede expresar como:

$$VaR = M_{t_0} \cdot (E(X) - X^*),$$

En términos generales, el cálculo del VaR consiste en encontrar el cuantil  $p$  de la variable aleatoria  $V$  (distribución de ingresos y pérdidas) o de la variable

aleatoria  $X$  (distribución de retornos).

En general, las metodologías convencionales para el cálculo del VaR presentan las siguientes deficiencias:

- Las aproximaciones paramétricas y no paramétricas trabajan adecuadamente en aquellos casos en donde las distribuciones presentan un amplio número de observaciones. Sin embargo, estas aproximaciones presentan un pobre desempeño o ajuste a las colas extremas de la distribución.
- La suposición de que la distribución de los retornos se distribuye en forma normal, se invalida en la realidad ya que las distribuciones de las series financieras se caracterizan por la presencia de colas gruesas, lo cual conlleva a subestimar el riesgo.
- En trabajos realizados por autores como Artzner, Delbaen & Heath<sup>3</sup>, se demuestra que el VaR no es necesariamente subaditivo, es decir, que existen casos en que al subdividir un portafolio en grupos más pequeños, la suma del VaR de cada uno de ellos puede llegar a ser menor que el VaR de todo el portafolio.
- El VaR proporciona información sobre el nivel de pérdida esperado. Sin embargo, no provee información

<sup>3</sup> ARTZNER, Delbaen; Eber, J.; and HEATH, D., (1997), Thinking coherently, Risk 10, 68-71.

acerca del nivel de pérdida en caso de que se sobrepase dicho nivel esperado, es decir, no proporciona información de eventos extremos.

Como respuesta a estas deficiencias y ante la necesidad de contar con herramientas que permitan cuantificar la incidencia de eventos anormales o extremos dentro de los portafolios de inversión, han surgido los *modelos semi-paramétricos*, dentro de los cuales la teoría del valor extremo juega un papel preponderante.

### 2.3 Teoría del Valor Extremo (EVT)

La teoría del valor extremo soluciona los problemas que se presentan en la medición del riesgo cuando la distribución de los retornos o precios de los activos financieros presenta colas gruesas y, por ende, cuando existe una mayor probabilidad de ocurrencia de eventos extremos.

En términos generales, existen dos tipos de modelos para la identificación de los valores extremos en las series. El primero y más antiguo de ellos es conocido como máximo por bloques, cuyo campo de aplicación radica en las observaciones más grandes de una muestra amplia de observaciones idénticamente distribuidas<sup>4</sup>. Por lo tanto, este modelo considera el máximo valor que toma una variable

aleatoria en periodos sucesivos de tiempo, como por ejemplo semanas, meses, años, etc. Dichas observaciones son consideradas como los valores extremos de la serie para cada uno de los periodos seleccionados.

El segundo tipo de modelos más recientes es conocido como *Picos Sobre el Umbral* (POT por sus siglas en inglés), los cuales se basan en las observaciones de una muestra amplia que exceden un límite o umbral previamente definido. Estos modelos a su vez se encuentran divididos en aquellos que son semiparamétricos, como los construidos alrededor del *estimador de Hill*, y los totalmente paramétricos, basados en la *Distribución Generalizada de Pareto (GPD)*<sup>5</sup>. En este caso, la serie original no es dividida en bloques, sino que se define un umbral a lo largo de su historia, y aquellas observaciones que lo exceden se consideran valores extremos.

Una de las grandes ventajas que ofrece el modelo POT es que gracias al uso más eficiente que hace de series con información reducida de valores extremos, es considerado como el modelo más útil en aplicaciones prácticas. Por ello, el desarrollo numérico que se realizará en este documento utilizará el modelo POT y no el modelo de Máximo por Bloques. Así mismo, al interior del modelo POT,

<sup>4</sup> Una serie es idénticamente distribuida si su varianza se mantiene constante en el tiempo.

<sup>5</sup> La conceptualización técnica de modelos basados en el estimador de Hill se puede encontrar en Danielson, Hartman & de Vries (1998).



se trabajará con la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) debido a razones de simplicidad tanto de exposición como de implementación<sup>6</sup>. A continuación se presenta la conceptualización formal de este modelo.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias idénticamente distribuidas con una función de distribución desconocida  $F(x) = P\{X_i = x\}$ . Formalmente, las medidas de riesgo extremo son definidas en términos de la distribución de pérdidas  $F^7$ . Bajo el supuesto de que  $1 > q = 0.99$ , el VaR corresponde al cuantil  $q$  de la distribución  $F$ , tal que:

$$\text{VaR}_q = F^{-1}(q)$$

donde,  $F^{-1}$  es la inversa de  $F$  y el *Expected Shortfall (ES)* es la magnitud de la pérdida esperada, dado que el VaR ha sido excedido:

$$ES_q = E[X | X > \text{VaR}_q]$$

Bajo la metodología POT el objetivo principal radica en estimar la función de distribución  $F$  de los valores  $x$  que están por encima de un umbral  $u$ . Dicha distribución  $F_u$  se conoce como función de distribución condicional de los excesos y se define de la siguiente manera:

$$F_u(y) = P[X - u = y | X > u], \quad 0 = y = x_F - u$$

donde,  $X$  es una variable aleatoria,  $u$  es el umbral definido,  $y = x - u$  corresponde a los excesos, y  $x_F = 8$  es la sección derecha final de  $F$ .

Uno de los teoremas más importantes de EVT establece que para un clase amplia de funciones de distribución  $F$ , la función de distribución condicional de los excesos  $F_u(y)$ , para  $u$  grande, puede aproximarse con alta precisión por la siguiente expresión dada por la Distribución Generalizada de Pareto (GPD)<sup>8</sup>:

$$F_u(y) \approx G_\xi(y), \quad u > 0, \quad \text{donde:}$$

$$G_\xi(y) = \frac{1 - (1 + \xi y)^{-1/\xi}}{1 - \exp(-y/\sigma)}, \quad \xi > 0$$

donde,  $\xi > 0$  y donde  $y = 0$  cuando  $\xi < 0$  y  $0 = y = -\sigma/\xi$  cuando  $\xi < 0$ . Los parámetros relevantes de esta distribución son  $\xi$  y  $\sigma$ , definidos como el parámetro de forma ( $\xi$ ) y el parámetro de escalamiento ( $\sigma$ ). Es muy importante tener claro que  $\xi$  representa el indicador de cola (*tail index*) y, por lo tanto, indica qué tan pesada es la cola de la distribución. Mientras más grande sea  $\xi$  más pesada será la cola de la distribución y viceversa.

<sup>6</sup> Para efectos de la gestión del riesgo, la GPD es considerada al menos tan importante como la distribución normal.

<sup>7</sup> En una serie de precios la distribución de pérdidas está dada por retornos negativos, mientras que en una serie de tasas de interés la distribución de pérdidas estará dada por retornos positivos. En cualquier caso, para evitar confusiones en la interpretación de las series, se puede invertir el signo de los retornos en cualquiera de las series, siempre y cuando se tenga claro cuál comportamiento está indicando pérdidas y cuál está indicando ganancias.

<sup>8</sup> Teorema resultante de trabajos realizados por Pickands (1975), Balkema y de Haan (1974).

Ahora bien, asumiendo que la GPD es la función para la distribución en la cola, es posible llegar a la siguiente expresión analítica para la estimación del VaR y ES en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la GPD<sup>9</sup>:

$$\text{VaR}_p = u + \left[ \left( \frac{n}{N_u} \cdot p \right)^{-1} \right],$$

donde  $n$  representa el número de observaciones de la muestra y  $N_u$  es el número de observaciones que exceden el umbral.

$$\text{ES}_p = \text{VaR}_p + E[X - \text{VaR}_p | X > \text{VaR}_p]$$

Sin embargo, uno de los factores de mayor relevancia bajo la metodología POT consiste en determinar el umbral  $u$  para la serie. En este sentido, el principal inconveniente radica en que  $u$  debe ser lo suficientemente alto, pero, así mismo, mientras más alto sea, menor será el número de observaciones remanentes para la estimación de los parámetros de la función de distribución de la cola. Para ello, existen diversas alternativas, pero una de las más empleadas es la gráfica de la media de los excesos muestrales. Así mismo, para la estimación

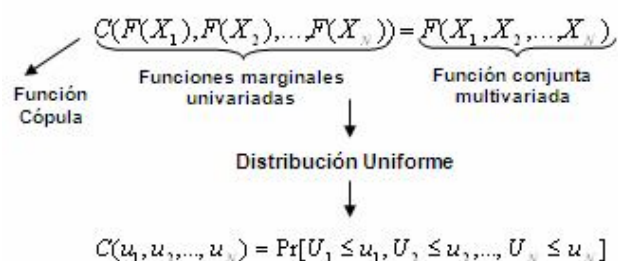
de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , existen varios modelos, siendo la estimación por máxima verosimilitud el más empleado<sup>10</sup>.

## 2.4 Teoría de Cópulas

La cópula logra capturar la estructura de dependencia entre las variables, ya que se encuentra definida por la transformación uniforme de las distribuciones marginales, independiente de la distribución de probabilidad que tenga cada una. En esta premisa, no se hace necesario exigir distribuciones de probabilidad normales para las distribuciones marginales de las variables.

Las cópulas permiten definir distribuciones de probabilidad conjuntas entre variables, adicionales a las distribuciones multivariadas estándar que limitan los tipos de dependencia a los que se puede representar.

Una cópula es una función de distribución conjunta con distribuciones marginales univariadas uniformes que relaciona un grupo de variables. Formalmente se define como:



<sup>9</sup> La derivación de estas expresiones analíticas no se presenta en el documento. Sin embargo, el lector puede remitirse a autores como McNeil y Frey (2000) o Danielson y de Vries (2000) entre otros.

<sup>10</sup> La estimación de los parámetros a través de máxima Verosimilitud se basa en la maximización de la función GPD.

En este sentido, es posible concluir que la cópula logra capturar toda la información que exista sobre dependencia en un conjunto de variables, en la medida en que se encuentra definida por la distribución uniforme de las distribuciones marginales, independientemente de la distribución de probabilidad que tenga cada una de ellas.

### **Teorema de Sklar**

Este teorema constituye el pilar fundamental dentro de la teoría de cópulas debido a que establece la relación existente entre las distribuciones multivariantes y sus marginales univariantes a través de una cópula<sup>11</sup>.

“Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con funciones de distribución marginales  $F_X$  y  $G_Y$  respectivamente y función de distribución conjunta  $H_{XY}$ . Entonces existe una cópula  $C$  tal que

$$H_{XY}(x, y) = C(F_X(x), G_Y(y)) \quad x, y \in [0, 1]$$

Si  $F_X$  y  $G_Y$  son continuas, entonces  $C$  es única; si no,  $C$  está unívocamente determinada sobre  $\text{Ran}(F_X) \times \text{Ran}(G_Y)$ . Recíprocamente, si  $C$  es una cópula y  $F_X$  y  $G_Y$  son funciones de distribución, entonces la función  $H_{XY}$  definida por  $H_{XY}(x, y) = C(F_X(x), G_Y(y))$  es una

función de distribución conjunta con marginales  $F_X$  y  $G_Y$ ”. La demostración del teorema se puede encontrar en Nelsen<sup>12</sup>.

### **Definición Teórica de Cópula<sup>13</sup>**

Una cópula es una función de distribución multivariante  $F$  de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  cuyas distribuciones marginales son uniformes estándar, es decir,  $X_i \sim F_i \forall i=1, 2, \dots, n$ .

### **Las funciones cópula y las medidas de dependencia**

La selección de una u otra función cópula  $C$  suele estar condicionada por la forma en que ésta establece la relación de dependencia entre las variables  $U$  y  $V$ , relación que es cuantificable de muchas formas. Por ejemplo, el coeficiente de correlación  $\rho(X, Y)$  es un indicador que permite medir la dependencia lineal que existe entre  $X$  e  $Y$ . Cuanto más próximo a 1 esté en valor absoluto, mayor es la relación lineal que vincula a las variables. Además, el signo de este coeficiente brinda información sobre el “sentido” de la relación: si es positivo,  $X$  crece conforme crece  $Y$ , mientras que si es negativo, una y otra variable se mueven, de forma lineal, en sentido opuesto. El

<sup>11</sup> VÉLEZ, Julio, (2007), Teoría de Cópulas aplicada a la predicción, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Madrid.

<sup>12</sup> NELSEN, R., (1999), “An Introduction to Copulas”, Inc, Springer-Verlag, New York.

<sup>13</sup> Existen otras versiones del teorema de Sklar enunciadas a partir de dos funciones asociadas a una cópula y cuya existencia está garantizada por ser  $C$  una función monótona, para más información véase Patton (2001).

hecho de que  $\rho(X, Y)$  valga 0 es representativo de ausencia de relación lineal entre  $X$  e  $Y$ , lo cual no quiere decir que no pueda existir algún otro tipo de relación (no lineal). Sin embargo, el coeficiente de correlación de Pearson resulta inapropiado para medir relaciones de dependencia, teniendo en cuenta que:<sup>14</sup>

- Es una medida de dependencia representada en un escalar.
- Detecta solamente dependencia *lineal*.
- Está definida cuando la varianza es finita.
- Presupone la existencia de normalidad entre las variables, denominando *densidad conjunta normal* a la relación de dependencia existente.
- La correlación no es invariante ante transformaciones estrictamente monótonas.
- Independencia siempre implica correlación cero.

Estas debilidades en el coeficiente de Pearson se originan porque dicha medida no depende solamente de la función de densidad conjunta, sino que también depende de las distribuciones marginales de los datos.

### ***Ventajas de las cópulas***

Las funciones cópulas superan algunos de los inconvenientes mencionados

anteriormente por el coeficiente de correlación, tal como se describen a continuación<sup>15</sup>:

- Dado que la cópula extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, ésta contiene mucha más información acerca de la dependencia entre variables aleatorias que la que puede contener un sólo número.
- La cópula tiene en cuenta todos los posibles casos de dependencia.
- La cópula es invariante ante transformaciones monótonas crecientes, incluyendo las transformaciones afines positivas.
- Finalmente, ya que la cópula representa la estructura de dependencia, independientemente de las funciones de distribución marginales, ésta puede tratar con múltiples especificaciones de funciones de distribución, inclusive aquellas que no tienen definidos algunos de sus momentos.

Adicionalmente, existen las denominadas "medidas de correlación en el rango".

Las más comunes son el Tau de Kendall y el coeficiente de correlación de Spearman, los cuales cuantifican relaciones no necesariamente lineales, sino que se utilizan directamente como funciones de evaluación del contraste de independencia:

<sup>14</sup> EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; and STRAUMANN, D., (1999), "Correlation: Pitfalls and Alternatives", Discussion Paper, ETH Zurich.

<sup>15</sup> BECERRA, O. y MELO, L. F., (2008), "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones", Borradores de Economía, N.o. 489, Banco de la República

$$H_0: F_{xy}(x,y) = F_x(x) F_y(y)$$

(X e Y independientes) vs

$$H_0: F_{xy}(x,y) \neq F_x(x) F_y(y)$$

Las cópulas utilizadas en este trabajo persiguen dos objetivos principales. El primero, emplear cópulas que, por su naturaleza empírica y no paramétrica, se ajusten a los datos sin resaltar la presencia de valores extremos que se presentan en las colas de las distribuciones marginales. El segundo, aplicar cópulas en función de la estructura de dependencia encontrada en la muestra, es decir capturar asimetrías y observaciones extremas.

### 3. Aplicación práctica

La aplicación fue realizada para 4 factores de riesgo, cada uno de los cuales representa el mercado de renta fija (2), mercado de acciones (1) y mercado de divisas (1). Dos factores corresponden a las **tasas de interés de los títulos TES<sup>16</sup> en pesos** para dos plazos, representado a partir de las curvas cero cupón de referencia, ya que son éstas tasas las utilizadas para descontar los diferentes flujos de caja de cada uno de los títulos en pesos de un portafolio. Adicionalmente, se considerarán como factores de riesgo *la Tasa de Cambio Representativa de Mercado (TRM)*, publicada diariamente por la Superintendencia Financiera y el *Índice de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC)*.

Para el caso del factor de riesgo de tasa de interés, los datos por utilizar corresponden a las curvas cero cupón de referencia para títulos de deuda pública interna TES denominados en pesos, publicados por la Bolsa de Valores de Colombia - BVC. A partir de dicha información, se calcula el valor de la tasa cero cupón utilizando plazos de 180 días, hasta 365 días, y tomando como referencia la metodología que define la BVC en el documento técnico publicado en Diciembre de 2004<sup>17</sup>.

A continuación se presentan los resultados siguiendo la metodología expuesta previamente y mostrando el detalle solamente para el análisis de la TRM.

#### 3.1 Análisis preliminar de los datos

Los datos considerados en el análisis comprenden la serie de retornos logarítmicos diarios desde Mayo 02 de 2006 hasta Agosto 29 de 2008, con un total de 567 datos, que son suficientes para la estimación de la distribución de las colas.

El primer paso consiste en revisar el comportamiento de las series de los retornos logarítmicos de las tasas de interés cero cupón de referencia, TRM e IGBC. Para ello, se realizaron análisis descriptivos y de comportamiento temporal<sup>18</sup>. Se muestra el análisis para la TRM.

<sup>16</sup> Títulos emitidos por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público, considerados de mínimo riesgo.

<sup>17</sup> Bolsa de Valores de Colombia.

<sup>18</sup> El análisis descriptivo se enfoca en medidas de asimetría, curtosis, desviación, media, e histogramas de la serie. Por su parte el análisis de comportamiento temporal se enfoca en la verificación de que las observaciones sean independientes e idénticamente distribuidas.

ESTIMACIÓN DEL RIESGO EN UN  
PORTAFOLIO DE ACTIVOS

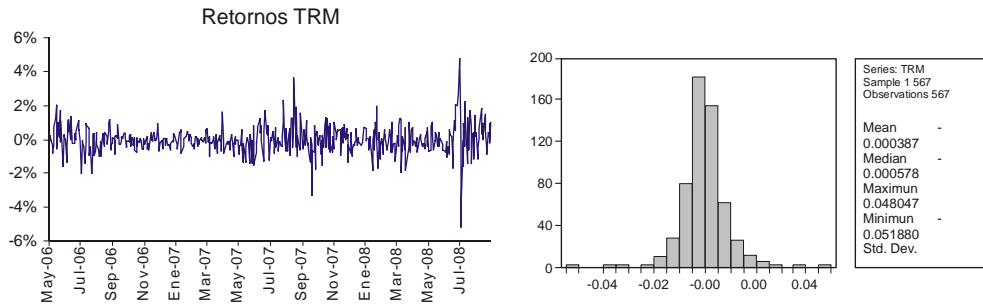


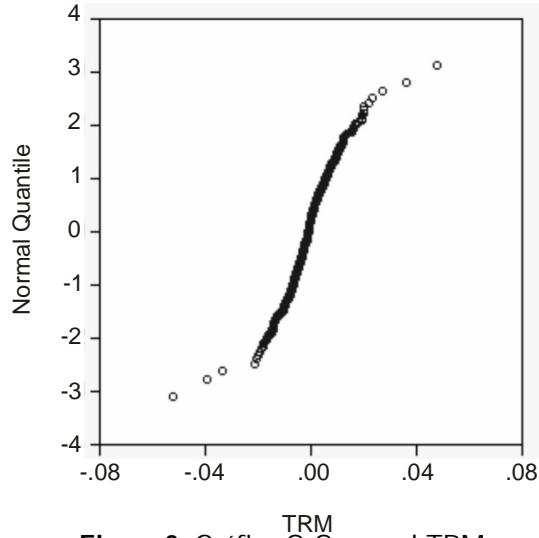
Figura 1. Retornos Logarítmicos diarios TRM

Como se observa, los estadísticos de asimetría y curtosis de la serie son 0.0097 y 9.9835 respectivamente, confirmando que el comportamiento de la serie no es similar al de una distribución normal<sup>19</sup>. El hecho de que la curtosis de la serie sea 9.9835 indica la existencia de colas gruesas y, por ende una mayor probabilidad de ocurrencia de eventos extremos. Sin embargo, la serie refleja ser simétrica. El estadístico Jarque-Bera permite verificar que la hipótesis de normalidad es rechazada al 5% de significancia ( $\text{prob} < 0.05$ ).

Una medida complementaria consiste en establecer gráficamente qué tan ajustadas se encuentran las observaciones de la serie a una distribución normal. Para ello, se utilizan los gráficos Q-Q, a través

de los cuales se comparan los cuantiles de los valores observados de una variable respecto de los valores esperados, si la muestra se obtuviera de una distribución empírica, en este caso la normal. En este sentido, si la muestra se ha obtenido de una distribución normal, entonces sus observaciones deben agruparse en torno de una línea recta que representa los valores esperados para los cuantiles de la normal. La figura 2 presenta el gráfico Q-Q para la serie diaria de retornos logarítmicos de la TRM, en donde el eje x indica los cuantiles de las observaciones diarias de la serie (puntos oscuros), mientras que el eje y indica el valor esperado de los cuantiles para la observación, bajo el supuesto de una distribución normal (línea diagonal).

<sup>19</sup> El lector encontrará útil recordar que una distribución normal es simétrica y, por ende, su asimetría es 0. Una asimetría superior a 0.5 es considerada demasiado alta. Así mismo, la curtosis de una distribución normal es 3 (exceso de curtosis igual a 0), y valores mayores a este son considerados altos (exceso de curtosis mayor a 0).



**Figura 2.** Gráfico Q-Q normal TRM

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
█	█	1	0.206	0.206	24.158	0.000
█	█	2	0.059	0.017	26.138	0.000
█	█	3	-0.029	-0.046	26.605	0.000
█	█	4	-0.045	-0.032	27.742	0.000
█	█	5	-0.078	-0.062	31.255	0.000
█	█	6	-0.106	-0.080	37.720	0.000
█	█	7	-0.013	0.028	37.823	0.000
█	█	8	-0.012	-0.013	37.901	0.000
█	█	9	0.036	0.031	38.637	0.000
█	█	10	0.063	0.045	40.963	0.000
█	█	11	0.062	0.029	43.184	0.000
█	█	12	0.060	0.034	45.259	0.000
█	█	13	0.019	0.004	45.471	0.000
█	█	14	0.079	0.083	49.087	0.000

**Figura 3.** Correlograma – Prueba Ljung-Box

Adicionalmente, es necesario realizar el análisis del comportamiento temporal de la serie para verificar el supuesto de que los retornos son independientes en el tiempo, esto es, los retornos resultantes

en un periodo no dependen de periodos anteriores y, por lo tanto, se requiera modelar esta parte. Para ello, es utilizado el Correlograma<sup>20</sup> de la serie como se observa en la figura 3, en el cual se

<sup>20</sup> El Correlograma presenta gráficamente las correlaciones que existen entre las observaciones para diferentes periodos de tiempo. Presenta, además, el estadístico Q, el cual lleva a rechazar la hipótesis de Auto-Correlación si la probabilidad asociada es menor a 0.05.

obtienen probabilidades para el estadístico Q menores al 5% de significancia, y es evidencia de la presencia de autocorrelación serial. Las barras más gruesas que sobrepasan los límites de la función de autocorrelación de la serie indican excesos frecuentes sobre los intervalos de confianza y, por lo tanto, invalidan el supuesto de que las observaciones sean idénticamente distribuidas<sup>21</sup>. De igual forma, las barras más gruesas que sobresalen de la función de autocorrelación parcial indican excesos sobre los intervalos de confianza y, en este caso, invalidan el supuesto de independencia de la serie. Se observa que los retornos esperados para el periodo actual estarían dependiendo de lo ocurrido el día anterior y tres días atrás.

Para que los resultados arrojados por el EVT sean consistentes, es necesario que las series sean independientes e idénticamente distribuidas y, según los resultados previos, este supuesto no se cumple, y es una característica frecuente en las series financieras. Sin embargo, aunque el supuesto sea invalidado, en Embrechts<sup>22</sup> puede comprobarse que si las series financieras se suponen estacionarias, los resultados límite siguen siendo válidos bajo condiciones generales. Los resultados evidencian que la serie de retornos para la TRM es estacionaria, ya que el estadístico ADF presenta un valor absoluto alejado de los valores críticos a los diferentes niveles de significancia, como lo muestra la figura 4. Esto conlleva a concluir que los resultados obtenidos en el EVT pueden ser confiables.

<b>Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on TRM</b>		
Null Hypothesis: TRM has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-19.22474	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.441674	
5% level	-2.866428	
10% level	-2.569433	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

**Figura 4.** Prueba Dickey-Fuller aumentado para estacionariedad

<sup>21</sup> Cuando una serie es estacionaria su media y varianza son constantes en el tiempo.

<sup>22</sup> EMBRECHTS, MCNEIL and STRAUMANN, Op. cit.



En resumen, la serie de retornos logarítmicos diarios de la TRM tiene las siguientes características:

- Curtosis alta ( $> 3$ )
- Asimetría
- Autocorrelación de los datos
- Estacionariedad en la serie

Por lo tanto, la distribución de los retornos se caracteriza principalmente

por la presencia de colas gruesas y una mayor probabilidad de ocurrencia de eventos extremos, los cuales no son recogidos apropiadamente en la medición del riesgo bajo las condiciones de normalidad. Esta misma situación se presenta para los demás factores de riesgo del modelo seleccionados en esta investigación, tal como se presenta en el cuadro 1.

Estadísticos	C180	C365	IGBC
Media	0.00099	0.00087	-0.00029
Mediana	0.00046	0.00025	0.00065
Máximo	0.08137	0.06450	0.14688
Mínimo	-0.05980	-0.05419	-0.11052
Desv. Est.	0.01386	0.00973	0.01886
Asimetría	0.55950	0.78816	-0.13329
Curtosis	7.35355	12.25174	15.24466
Jarque-Bera	477.35667	2,080.87609	3,543.81587
Probabilidad	0.00000	0.00000	0.00000
Observaciones	567	567	567

**Cuadro 1.** Estadísticos factores de riesgo

Después de analizar funciones de autocorrelación sobre los retornos en niveles y al cuadrado, al igual que otras herramientas tradicionales en series de tiempo, se construyeron modelos ARMA GARCH para los retornos de las series de los factores de riesgo, a saber:

- Nodo COP 180: AR(1) AR(2) AR(4) ARCH(1) GARCH(1)
- Nodo COP 365: AR(1) AR(4) ARCH(1) GARCH(1)
- IGBC: AR(1) ARCH(1) GARCH(1)
- TRM: C AR(1) AR(20) ARCH(1) GARCH(1)

Los residuos de cada modelo se consideran las estimaciones de las

innovaciones. Las pruebas de diagnóstico sobre los residuales estandarizados del modelo muestran que no existen indicios de autocorrelación, ni de efectos ARCH remanentes.

### 3.2 Estimación del umbral ( $u$ )

Luego de haber determinado que las distribuciones de las series de retornos para todos los factores de riesgo presentan colas gruesas y, por lo tanto, la metodología convencional de VaR no incorpora adecuadamente la posibilidad de eventos extremos, el siguiente paso consiste en definir el umbral ( $u$ ) para cada una de las innovaciones calculadas en el paso anterior. Sin embargo, en el

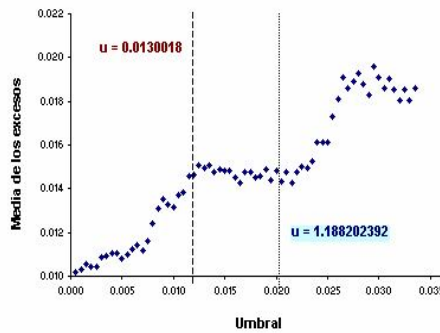
establecimiento del umbral se debe asegurar que éste sea lo suficientemente alto de tal forma que la distribución de los excesos se aproxime a la distribución GPD, pero, al mismo tiempo; se debe asegurar que exista un número adecuado de excesos con el fin de estimar los parámetros  $\gamma$  y  $\alpha$ .<sup>23</sup>

Hasta el momento no se ha desarrollado un algoritmo totalmente satisfactorio para el cálculo del umbral, pero, de todas formas, existen herramientas construidas a partir de la exploración analítica de los datos mediante las cuales se puede suplir esta deficiencia. Una de ellas es, precisamente, la media muestral de los excesos o *sample mean excess*.

En las series que presenten colas pesadas, el gráfico de la media de los excesos se caracterizará por mostrar una

tendencia alcista, mientras que para distribuciones de colas medianas la tendencia será horizontal y para las distribuciones de colas delgadas la tendencia será bajista<sup>24</sup>. Como se observa en la figura 5, el primer umbral ( $u = 0.0130018$ ) fue definido en donde la tendencia de las observaciones se vuelve lineal. Sin embargo, este umbral deja por fuera una gran cantidad de observaciones y, por lo tanto, no es representativo. Iteraciones posteriores llevaron a definir un nuevo umbral, esta vez en donde la tendencia horizontal de las observaciones cambia ( $u = 1.188202392$ ).

Este mismo procedimiento se realizó para las demás variables obteniendo los umbrales y número de observaciones que exceden dichos umbrales. Los resultados son presentados en el cuadro 2<sup>25</sup>.

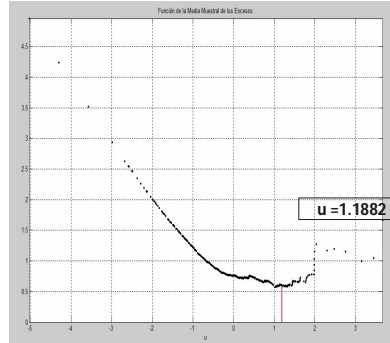


**Figura 5.** Umbral de los residuos de la TRM

<sup>23</sup> El mayor riesgo que se corre si el umbral es muy bajo radica en incluir observaciones que en realidad no hacen parte de la cola de la distribución, y, por ende, se estaría subestimando el VaR.

<sup>24</sup> Las gráficas de media de los excesos para los demás nodos analizados se encuentran en el anexo E del documento.

<sup>25</sup> GILLI, M. and KELLEZI, M., (2005), "An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk", Working Paper, University of Geneva and FAME.



**Figura 6.** Media de los excesos - Residuos TRM

Estimación	C180	C365	IGBC
N	563.0	563.0	566.0
Umbral ( $u$ )	1.34913	1.322605	1.133494
Excesos ( $'Nu$ )	56.0	56.0	56.0

**Cuadro 2.** Umbrales y excesos definidos para los nodos en Cop 180, 365 e IGBC

### 3.3 Estimación de los parámetros ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ )

Después de haber obtenido el umbral ( $u$ ) para cada uno de los factores de riesgo, y sabiendo que la distribución de las observaciones que exceden estos umbrales en la cola deben ajustarse a una GPD, el siguiente paso consistió en estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de dicha distribución.

Para realizar esta estimación se pueden

utilizar diferentes alternativas como la estimación a través de máxima verosimilitud, el método de los momentos, el método de la probabilidad ponderada de los momentos y el método del percentil elemental<sup>26</sup>. Para el caso práctico desarrollado en este documento, el método seleccionado fue la estimación a través de máxima verosimilitud.

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que fueron estimados para cada uno de los factores de riesgo:

<sup>26</sup> La explicación teórica de cada uno de estos métodos puede encontrarse en autores como Hosking y Wallis (1987).

Parámetro	C180	C365	IGBC	TRM
$\xi$	0.12358	0.182155	-0.14457	0.164034
$\beta$	0.63395	0.601422	0.579277	0.494966

**Cuadro 3.** Parámetros de la función GPD para los nodos COP 180 y 365, IGBC y TRM

De acuerdo con los resultados obtenidos, se presenta la gráfica de la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) empírica, junto con la GPD ajustada a las 54 observaciones extremas de la cola derecha (pérdidas) que superan un umbral de 1.1882.

Se observa que los valores extremos presentan un buen ajuste a la curva definida por la GPD y, por tanto, es la distribución adecuada para su descripción.

### 3.4 Construcción de las cópulas

A continuación se ilustrará el proceso requerido para la construcción de las cópulas entre los residuos evaluados en el primer paso sobre cada uno de los factores de riesgo: las tasas de interés en pesos de los nodos a 180 días, 365 días, la TRM y el IGBC.

En la primera etapa se realizó una aproximación a la construcción de las distribuciones marginales de cada una de los residuos de las variables en función de las muestras de datos disponibles. Para ello se construyeron las funciones de densidad empíricas

bivariadas y se comparan con la función de distribución normal bivariada, tal como se muestra en la figura 8. En este caso, ninguna de las distribuciones bivariadas empíricas se asemeja a la distribución normal bivariada, en cuyo caso sería incorrecto intentar describir la relación existente entre cada par de variables a través del uso del coeficiente de correlación de Pearson.

El cuadro 4 muestra las medidas de asociación calculadas sin relacionar alguna función cópula específica y su valor si se asume una cópula normal con funciones de distribución marginales empíricas.

#### 3.4.1 Propuesta de una “familia” de cópulas

En este caso no existe un criterio único ni definitivo para seleccionar una cópula a-priori sobre los datos; por lo tanto, se intentó realizar un ajuste a un conjunto de familias de cópulas que abarcan diferentes patrones de comportamiento. En ellas se encuentran funciones del tipo de distribuciones elípticas, de valor extremo y arquimedias.

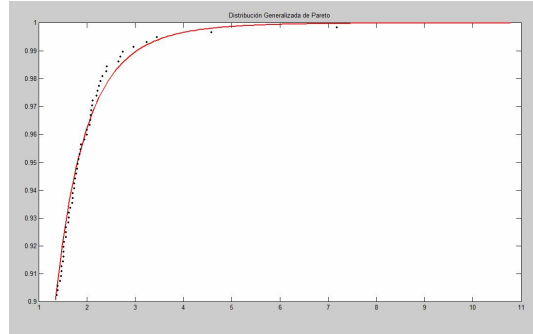


Figura 7. GPD ajusta a los valores extremos de la TRM

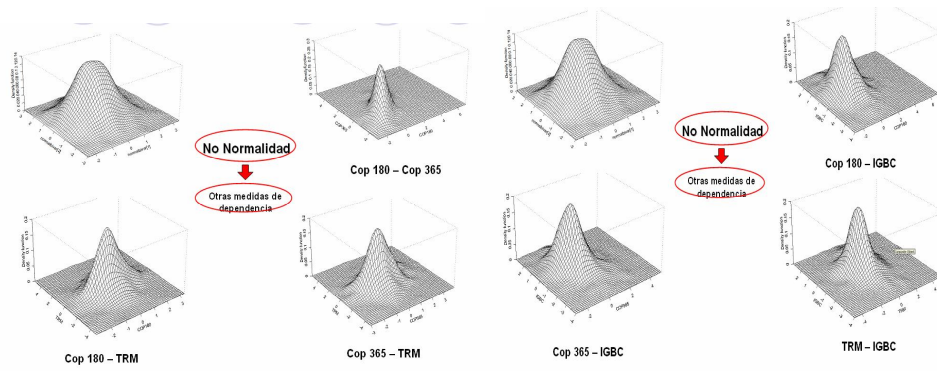


Figura 8. Comparación de las distribuciones empíricas divariadas vs. distribución normal bivariada

Datos		Correlación por Rango		Cópula Empírica	
Relación	Correlación Pearson	Tau-Kendall	Rho-Spearman	Tau-Kendall	Rho-Spearman
Cop180 - Cop365	0.7714	0.5842	0.7659	0.7411	0.9072
Cop180 - TRM	0.0944	0.0617	0.0915	0.9405	0.9902
Cop365 - TRM	0.1112	0.0638	0.0956	0.9031	0.9833
Cop180 - IGBC	-0.0997	-0.0449	-0.0674	0.3284	0.4613
Cop365 - IGBC	-0.2454	-0.1482	-0.2190	0.5865	0.7406
TRM - IGBC	-0.0126	0.0293	0.0422	0.7526	0.9088

Cuadro 4. Cálculo de diferentes medidas de correlación

ESTIMACIÓN DEL RIESGO EN UN  
PORTAFOLIO DE ACTIVOS

Familia	Cópula	Parámetros
Elíptica	Normal	Delta (0,1)
Arquimediana	Kimeldorf & Sampson	Theta < 0      Deltha >= 1
	Joe	Theta >= 1
	BB1	Theta < 0      Deltha >= 1
	BB3	Theta >= 1      Deltha > 0
	BB6	Theta >= 1      Deltha > = 1
Valor Extremo	BB7	Theta >= 0      Deltha > =0
	Gumbel	Delta >= 1
	Galambos	Delta > = 0
	Husler & Reis	Delta > = 0
Archimax	BB5	Theta >= 1      Delta > 0
	BB4	Theta >=0      Delta > =0

**Cuadro 5.** Familias y parámetros de las cópulas empleadas.

### 3.4.2 Elección de la cópula

La figura 9 muestra los contornos de las distribuciones empíricas bivariadas de la TRM y el IGBC vs. los contornos teóricos, representados por las líneas punteadas. Como se puede observar, si se utilizara el método gráfico para elegir una cópula que mejor describa la relación existente entre las variables, las cópulas gumbel y bb4 presentarían el

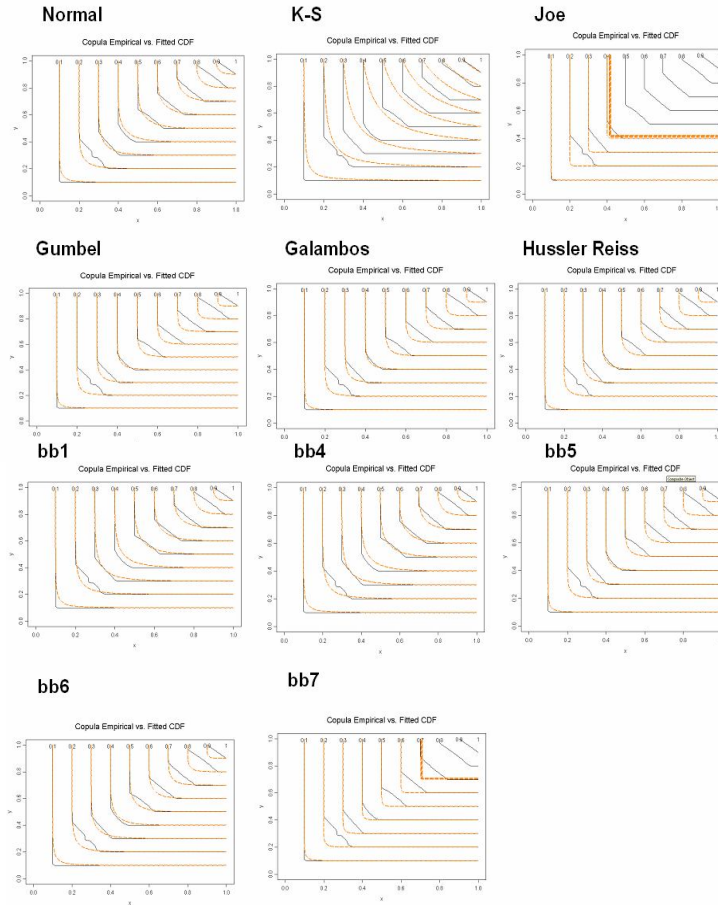
mejor ajuste al alcanzar la menor distancia.

A partir de los resultados de la estimación, es necesario calcular las medidas de ajuste de cada una de las cópulas descritas en la sección anterior y, a su vez, las medidas de correlación para cada una de éstas. La cópula que se escoge es la que tiene mayor Akaike. El cuadro 6 resume estos resultados:

Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.7656	0.9269	-45.37	-45.33	-45.33
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.4271	0.5972	-45.35	-45.31	-45.34
BB1 <sup>1</sup>	0.7338	0.9009	-45.67	-45.58	-45.64
BB6 <sup>1</sup>	0.8540	0.8958	-46.28	-46.18	-46.22
BB7 <sup>1</sup>	0.9448	0.9318	-46.32	-46.23	-46.29
Gumbel <sup>2</sup>	0.8604	0.9719	-44.80	-44.75	-44.78
Galambos <sup>2</sup>	0.8601	0.9720	-44.82	-44.78	-44.80
BB5 <sup>2</sup>	0.8604	0.9723	-44.84	-44.84	-44.81
BB4 <sup>3</sup>	0.7353	0.7353	-45.69	-45.60	-45.65

1. Cópula de familia arquimediana
2. Cópula de valor extremo
3. Cópula Archimax

**Cuadro 6.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para la TRM y el IGBC.



**Figura 9.** Comparación de las curvas de nivel de las distribuciones empíricas bivariables vs. distribución normal bivariable.

Se observa que la cópula gumbel logra describir la relación existente entre las variables TRM e IGBC en la medida en que presenta el mejor ajuste (mayor AIC y demás criterios). Así, se tiene que la presencia de valores extremos que se presentan en las colas de las distribuciones marginales, donde la cópula gumbel en función de la estructura de dependencia encontrada en

la muestra, logra capturar asimetrías y observaciones extremas, cuyas medidas de correlación afirman una asociación positiva fuerte.

A continuación se muestran las medidas de correlación y criterios de selección entre los demás factores de riesgo.

- **Nodo COP 180 – Nodo COP 365**

ESTIMACIÓN DEL RIESGO EN UN  
PORTAFOLIO DE ACTIVOS

Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.7784	0.9345	-49.44	-49.40	-49.43
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.4061	0.5715	-47.82	-47.78	-47.80
BB1 <sup>1</sup>	0.8525	0.9687	-49.18	-49.09	-49.15
BB6 <sup>1</sup>	NA	NA	0.00	0.00	0.00
BB7 <sup>1</sup>	NA	NA	-49.68	-49.60	-49.65
Gumbel <sup>2</sup>	0.8714	0.9761	-49.16	-49.12	-49.15
Galambos <sup>2</sup>	0.8716	0.9763	-49.21	-49.16	-49.19
BB5 <sup>2</sup>	0.8729	0.9770	-49.27	-49.19	-49.24
BB4 <sup>3</sup>	0.4061	0.5715	-49.23	-49.14	-49.20

**Cuadro 7.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para los nodos COP 180 y COP 365.

Se observa que la cópula Kimeldorf & Sampson logra describir la relación existente entre las variables en la medida en que presenta el mejor ajuste (mayor AIC y demás criterios). A través de los coeficientes de correlación se observa la existencia de una relación positiva débil entre las variables.

• **Nodo COP 180 – TRM**

En el cuadro 8 se observa que la cópula Kimeldorf & Sampson logra describir la relación existente entre las variables en la medida en que presenta el mejor ajuste. En tanto las medidas de correlación describen una relación positiva débil.

Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.8149	0.9540	-47.84	-47.80	-47.82
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.4612	0.6379	-46.35	-46.31	-46.34
BB1 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
BB6 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
BB7 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
Gumbel <sup>2</sup>	0.8976	0.9848	-47.92	-47.88	-47.90
Galambos <sup>2</sup>	0.8976	0.9849	-47.94	-47.90	-47.92
BB5 <sup>2</sup>	0.8983	0.9852	-47.97	-47.88	-47.94
BB4 <sup>3</sup>	NA	NA	NA	NA	NA

**Cuadro 8.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para el nodo COP 180 y la TRM.

• **Nodo COP 365 – TRM**

El cuadro 9 ilustra que la cópula gumbel logra describir la relación existente entre las variables en la medida en que presenta el mejor ajuste. Por lo tanto, se tiene que la presencia de valores extremos

presentados en las colas de las distribuciones marginales. En donde la cópula gumbel en función de la estructura de dependencia encontrada en la muestra, logra capturar asimetrías y observaciones extremas, cuyas medidas de correlación afirman una asociación positiva fuerte.



Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.8483	0.9690	-51.78	-51.73	-51.76
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.5365	0.7220	-51.39	-51.34	-51.37
BB1 <sup>1</sup>	0.8520	0.9684	-51.85	-51.76	-51.81
BB6 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
BB7 <sup>1</sup>	0.9808	NA	-52.49	-52.41	-52.46
Gumbel <sup>2</sup>	0.9144	0.9893	-51.34	-51.30	-51.33
Galambos <sup>2</sup>	0.9144	0.9894	-51.36	-51.32	-51.34
BB5 <sup>2</sup>	0.9149	0.9896	-51.40	-51.31	-51.36
BB4 <sup>3</sup>	NA	NA	NA	NA	NA

**Cuadro 9.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para el nodo COP 365 y la TRM.

• **Nodo COP 180 – IGBC**

En el cuadro 10 se observa que la cópula Kimeldorf & Sampson logra describir la relación existente entre las variables en la medida en que presenta el mejor ajuste. En tanto las medidas de correlación describen una relación positiva débil.

• **Nodo COP 365 – IGBC**

De acuerdo con el cuadro anterior la cópula gumbel logra capturar la presencia de valores extremos en las dos series, permitiendo el mejor ajuste. Por su parte, las medidas de correlación muestran un alto grado de asociación entre las variables.

Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.5692	0.7648	-34.51	-34.47	-34.49
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.2333	0.3421	-33.35	-33.31	-33.33
BB1 <sup>1</sup>	0.6244	0.8109	-34.23	-34.14	-34.19
BB6 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
BB7 <sup>1</sup>	0.8904	NA	-35.26	-35.17	-35.22
Gumbel <sup>2</sup>	0.7163	0.8886	-33.97	-33.93	-33.96
Galambos <sup>2</sup>	0.7150	0.8883	-34.05	-34.01	-34.03
BB5 <sup>2</sup>	0.7155	0.8891	-34.08	-33.99	-34.04
BB4 <sup>3</sup>	0.2333	0.3421	-34.33	-34.25	-34.30

**Cuadro 10.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para el nodo COP 180 y el IGBC.

Cópula	Tau-Kendall	Rho-Spearman	AIC	BIC	HQ
Normal	0.6875	0.8722	-40.29	-40.25	-40.28
Kimeldorf & Sampson <sup>1</sup>	0.3370	0.4833	-40.12	-40.08	-40.11
BB1 <sup>1</sup>	0.6120	0.7987	-40.40	-40.31	-40.36
BB6 <sup>1</sup>	NA	NA	NA	NA	NA
BB7 <sup>1</sup>	0.9130	NA	-41.19	-41.10	-41.16
Gumbel <sup>2</sup>	0.7960	0.9410	-39.27	-39.23	-39.25
Galambos <sup>2</sup>	0.7958	0.9412	-39.34	-39.30	-39.32
BB5 <sup>2</sup>	0.7968	0.9421	-39.39	-39.30	-39.35
BB4 <sup>3</sup>	0.3370	0.4833	-40.10	-40.02	-40.07

**Cuadro 11.** Medidas de correlación y criterios de selección de las cópulas analizadas para el nodo COP 180 y el IGBC.

### 3.5 Estimación del VaR

Por último, bajo las condiciones desarrolladas en esta investigación se introduce el VaR Dinámico, sumando al planteamiento EVT la incorporación de los modelos de series de tiempo AR-GARCH, de acuerdo con la metodología propuesta por McNeil & Frey<sup>27</sup>, para modelar el movimiento diario de la volatilidad aplicando EVT para la estimación de los máximos retornos esperados.

De esta manera, dada la naturaleza estocástica de la volatilidad, se proponen como medidas de riesgo dinámicas para un horizonte de un día:

$$\begin{aligned} \text{VeR}_{q,t} &= \text{t+1} + \text{t+1} \text{VeR}(Z)_q \\ \text{ES}_{q,t} &= \text{t+1} + \text{t+1} \text{ES}(Z)_q \end{aligned}$$

donde Z es un variable aleatoria que representa aquellas innovaciones que incorporan ruido a una determinada serie, en este caso, los retornos logarítmicos para los factores de riesgo seleccionados.

De igual manera, después de seleccionar las cópulas más apropiadas, es posible utilizar las correlaciones definidas en éstas para la medición de riesgo de mercado (VaR) y la pérdida esperada en las colas (ES) para un portafolio de \$30 mil millones de pesos, repartido en partes iguales entre tres activos, de la siguiente manera:

- Una inversión en dólares.
- Una inversión en un portafolio de acciones de la Bolsa de Valores de Colombia, cuyo indicador es el IGBC.
- Una inversión en un título TES tasa fija con las siguientes características:

Condiciones Faciales del Título	
Nemotécnico	TFIT05100709
Nominal	5,000,000,000
F. Emisión	10-Jul-04
F. Vencimiento	10-Jul-09
Cupón	0.125
Periodicidad	Año Vencido
Tipo	Tasa Fija
Moneda	Pesos
# Cupones faltantes	1

**Cuadro 12.** Condiciones faciales del TES

<sup>27</sup> McNEIL, A. and FREY, R., (2000), "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach", Journal of Empirical Finance, 7, 271-300.

Para el caso de instrumentos de deuda la estimación del valor en riesgo se realizó a través de la metodología de descomposición de flujos que propone JP Morgan en su documento *Riskmetrics*<sup>28</sup>. Esta metodología se basa en la separación de flujos de efectivo de un instrumento (cupones y principal) en dos flujos correspondientes a los vértices adyacentes de la curva de rendimientos de tasas de interés. Las premisas que deben cumplirse son las siguientes<sup>29</sup>:

- El valor de mercado de dos flujos de efectivo debe ser igual al valor de mercado del flujo de efectivo original.
- El riesgo de mercado del portafolio compuesto por dos flujos de efectivo debe ser igual al riesgo de mercado del flujo de efectivo original.
- El signo de dos flujos de efectivo debe ser igual al signo del flujo de efectivo original.

La manera de descomponer el flujo se puede profundizar en Lara H. De<sup>30</sup>.

En ese orden de ideas, los flujos del título escogido pueden mapearse en los dos nodos seleccionados en este estudio, los nodos COP 180 y 365 días, respectivamente.

Utilizando la información disponible hasta el 29 de agosto de 2008 y un período de tenencia de un día, se estimó el VaR y ES

del portafolio, para el primero de septiembre, con un nivel de confianza de 95%, con los cuáles se esperaba que las pérdidas del portafolio no superasen \$809 millones de pesos, y en caso de que dicho nivel hubiera sido sobrepasado, la pérdida promedio alcanzaría \$937 millones de pesos.

### 3.5.1 Pruebas de desempeño (Backtesting) del VaR y el ES

El proceso de *backtesting* es esencial en el proceso de evaluar y calibrar los modelos de medición de riesgos, ya que estas permiten establecer, sobre un rango de días observado, si las metodologías aplicadas para cuantificar el riesgo de un portafolio muestran un desempeño satisfactorio.

Para realizar un *backtesting* es necesario comparar el valor en riesgo observado con las pérdidas y ganancias reales. En dicha prueba lo que se mide es la eficiencia del modelo, contando las observaciones de pérdidas y/o ganancias que fueron mayores al VaR y el ES. De acuerdo con Lara, H De<sup>31</sup> los pasos a seguir para la elaboración del *backtesting* son los siguientes:

1. Las pérdidas y ganancias se calculan con cambios en los factores de riesgo o mark-to-market.
2. Se debe comparar periódicamente el valor en riesgo observado ajustado a

<sup>28</sup> Véase documento técnico Riskmetrics.

<sup>29</sup> DE LARA, H., (2005), "Medición y control de riesgos financieros", 3.ª edición, Editorial Limusa.

<sup>30</sup> Ibid

<sup>31</sup> Ibid

un día con las pérdidas y ganancias diarias.

3. Los errores o excepciones detectados se calculan contando el número de veces que las pérdidas y ganancias exceden el valor en riesgo observado y ES observado.
4. El nivel de eficiencia del modelo será: número de excepciones / número de observaciones.

Uno de los métodos más utilizados para verificar si el modelo es adecuado es el desarrollado por Kupiec en 1.995. Dicho método consiste en contar las veces que las pérdidas y/o ganancias exceden el VaR y ES durante un período. Se asume que  $N$  es el número de observaciones que exceden la pérdida o ganancia, y para un nivel de confianza dado  $(1 - p)$  se prueba si la  $N$  observada es estadísticamente diferente a la probabilidad de error  $p$  que se considera para el cálculo del VaR y ES.

La probabilidad de observar  $N$  excesos durante un periodo de  $T$  observaciones en total, se explica con una distribución binomial dada por:

$$(1 - p)^{T-N} p^N$$

La decisión práctica que se necesita tomar consiste en determinar si la relación de excesos de pérdidas y/o ganancias contra las observaciones totales, 1.5%, 6%, etc., es estadísticamente diferente a la probabilidad que se utiliza para el cálculo del valor en riesgo, es decir, 1%, 5%, 10%, etc.

Kupiec desarrolló regiones de confianza con base en una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad, considerando la hipótesis nula de que  $p$  es estadísticamente igual a la probabilidad utilizada para el VaR (ES) contra la hipótesis alternativa de que  $p$  sea diferente a dicha probabilidad. Estas regiones se determinaron de los extremos de la región de máxima verosimilitud dada por la siguiente expresión:

$$L = -2 \ln((1 - p)^{T-N} p^N) + 2 \ln((1 - (N/T))^{T-N} (N/T)^N)$$

donde,

- $c$  nivel de confianza
- $p$  probabilidad de error
- $N$  número de veces que se excedió el límite de VaR sobre  $T$  días.
- $N / T$  frecuencia en la que las pérdidas exceden el VaR (ES)

A continuación se evalúa si el cálculo de las medidas de riesgo, VaR y ES, mediante el uso de la estimación dinámica de la volatilidad de los factores de riesgo, a través del uso de los modelos ARMA-GARCH, junto con la teoría de valor extremo, y la determinación de la estructura de relación que existe entre estos a través del uso de las cópulas, presentan un buen desempeño en la práctica. Para ello se calcularon el VaR y ES para los tres siguientes meses (sept – nov 08).

Los gráficos de *backtesting* con un nivel de confianza  $\alpha = 0.95$ , se presentan en las figuras 10 y 11.

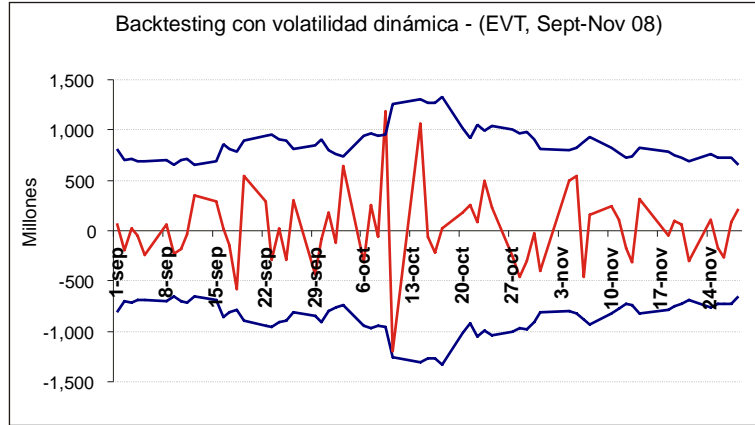


Figura 10. Backtesting mediante la estimación de la volatilidad a través de EVT

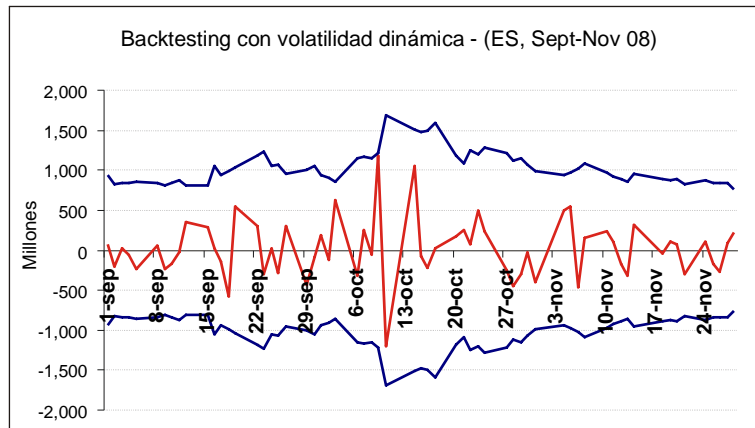


Figura 11. Backtesting mediante la estimación de la volatilidad a través de ES

En este caso, con 3 meses de observaciones ( $T = 62$ ) se esperaría observar  $N = pT = 0.05 * 62 = 3$  veces en que el valor a mercado excede el valor en riesgo, considerando un nivel de confianza de 95% para el cálculo del VaR y ES. Como se observa en el gráfico 10, se encuentra 1 observación fuera del VaR (10-Oct-

2008), de tal manera que resulta un nivel de eficiencia de 98.38%. Por lo tanto, se acepta la hipótesis nula de que una (1) desviación sea igual al 5% de probabilidad para el cálculo del valor en riesgo y no es necesario realizar algún ajuste al modelo, debido a que se encuentra en el nivel de confianza deseado.

Por último, otro factor importante es observar el comportamiento del ES como modelo apropiado para la medición de riesgo. Al evaluar el desempeño del ES utilizando la metodología propuesta se encuentra que para todos los niveles de confianza, el ES obtenido es adecuado, tal como se observa en la figura 11.

#### 4. Conclusiones

En este documento, se presentaron la definición, implicaciones y metodologías para el desarrollo de modelos de medición de riesgo asociados con la teoría de valor extremo y de cópulas, analizando un portafolio compuesto por tres activos del mercado colombiano: el índice general de la bolsa de valores (IGBC), la tasa de cambio (TRM) y un título genérico con vencimiento en julio de 2009 (TES).

Es importante señalar que uno de los aspectos más fuertes sobre los cuales se basa toda la teoría de valor en riesgo bajo los modelos paramétricos comunes, consiste en la suposición de normalidad en el comportamiento de los precios de los activos financieros que, aún cuando este supuesto pudo haber sido una buena herramienta en las primeras etapas del VaR, en la actualidad ha sido ampliamente comprobado que las series de precios de los activos financieros no se comportan en forma normal, lo cual naturalmente invalida en gran parte la estimación del riesgo proporcionada por esta metodología. En particular, en este estudio se observó que la distribución

de los retornos de los factores de riesgo utilizados para la medición del Valor en Riesgo del portafolio presenta colas gruesas en todos los casos, alejándose de la hipótesis de distribución normal y dando mayor probabilidad a la ocurrencia de eventos extremos (pérdidas no esperadas).

De otro lado, un análisis descriptivo de las series indica que en promedio el IGBC y la TRM son los factores que presentan mayores probabilidades de presentar observaciones extremas. Aunque las series de retornos logarítmicos para los nodos no son independientes en el tiempo, logró validarse estacionariedad en todas las series y, por tanto, los resultados obtenidos a través del EVT son confiables.

La Teoría del Valor Extremo (EVT) resultó ser una herramienta útil para caracterizar el comportamiento de situaciones extremas en la medición del riesgo. Bajo estas condiciones, la Distribución Generalizada de Pareto resultó apropiada para caracterizar los eventos extremos de las series de retornos para todos los factores.

Finalmente, el estudio de la dependencia hace parte del corazón de la economía financiera actual. De ahí que encontrar e intentar entender la dependencia en la determinación del precio de un activo, en la inversión en un portafolio ó evaluar los efectos de un mercado a otro, ha sido uno de los principales temas de investigación en econometría, así como en finanzas. En

este documento se presentaron las cópulas como funciones que aproximan el comportamiento conjunto de variables aleatorias, a partir de sus comportamientos individuales (marginales). Otras medidas de correlación no dan cuenta completamente de las relaciones de dependencia. Las cópulas han ganado importancia, debido a que el conocimiento del comportamiento conjunto de los diferentes factores de riesgo resulta importante en asignación de riesgos de un portafolio, tal como el riesgo de mercado. Por esta razón, se contruyeron cópulas entre los factores de riesgo, bajo una propuesta de cópulas de las familias elípticas, arquimedianas y de valor extremo. Como resultado, se identificó que las cópulas gumbel (valor extremo) y Kimeldorf & Sampson describen de manera adecuada la estructura de dependencia entre los 4 factores de riesgo analizados. De esta manera, se identificó la correlación definida mediante el Tau de Kendall como medida de asociación para el cálculo del VaR del portafolio.

Este documento presenta una parte de la teoría básica y aplicaciones de las cópulas. Un análisis más detallado puede encontrarse en textos como, por ejemplo, Nelsen<sup>32</sup>, y McNeil et ál.<sup>33</sup> entre otros.

### ***Conclusiones: "impacto sobre el VaR"***

Para algunas instituciones financieras y regulatorias la medición de un riesgo

significaba resumir su distribución en función de parámetros como la media y desviación estándar, pero estas medidas no brindan información respecto de situaciones extremas. Es importante entender la dificultad y complejidad a la que se enfrentan diariamente los gestores de riesgo, ante la incertidumbre presente en los mercados financieros. Bajo este concepto la teoría EVT presenta un gran aporte en la cuantificación de los riesgos, al permitir estimar niveles de pérdida que superan los observados, aunque en ocasiones pueda resultar de difícil aceptación los criterios económicos y/o financieros que se utilizaron para realizar las estimaciones, aún más cuando estos criterios puedan ser considerados improbables para los expertos. Bajo el análisis de EVT, las alteraciones en las condiciones normales del mercado se ven reflejadas en cambios de los parámetros estimados por EVT. Un sobresalto importante en un día altera significativamente el parámetro de forma que es el que define el peso de la cola de la distribución y que entraría a determinar el nivel del VaR. De otro lado, los cambios significativos en el umbral podrían presentarse solo en los casos en que el comportamiento de las series cambiara de nivel (subida sostenida de las tasas) o al presentarse un cambio en el máximo de la serie histórica, de lo contrario, como se logró revisar en el desarrollo del documento, las alteraciones no son representativas y no se presentan con

<sup>32</sup> NELSEN, R., (1999), "An Introduction to Copulas", Inc, Springer- Verlag, New York.

<sup>33</sup> McNEIL, A.; FREY, R.; and EMBRECHTS, P., (2005), Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton University Press.

frecuencia. El parámetro de escala  $\alpha$ , es el más estable de los tres y su variación es poco significativa ante cambios importantes en los retornos.

Finalmente, el cálculo del Valor en Riesgo

por la metodología del Valor Extremo y la estructura de dependencia definida por la cópula presenta mayor cobertura ante cambios significativos en las condiciones del mercado, tal como se evidenció en las pruebas de *backtesting*.

## Bibliografía

- ARTZNER, Delbaen; Eber, J.; and HEATH, D., (1997), Thinking coherently, Risk 10, 68-71.
- BALKEMA, A. y DE HAAN, L., (1974), Residual Lifetime at Great Age, Annals of Probability, 2, 792-804.
- BALZAROTTI, V. y DELFINE, M., (2001), Teoría de Valores Extremos aplicada a la medición de riesgos de mercado en Argentina, Documento de Trabajo, Banco Central de Argentina, Argentina.
- BECERRA, O. y MELO, L. F., (2008), "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones", Borradores de Economía, N.º. 489, Banco de la República.
- BENSALAH, Y., (2000), "Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: A Review", Working Paper, Bank of Canada.
- CARDOZO, P. (2004). Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la Teoría de Valor Extremo, Artículo realizado como parte de la tesis de la Maestría de Economía, Universidad de los Andes, Bogotá.
- CASTAÑO, E. V., (S. F.), Manejo conjunto de riesgos financieros: no todo es Correlación.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; y VECCHIATO, W., (2004), "Copula Methods in Finance", John Wiley and Sons, New York.
- DANIELSON J. and DE VRIES, C., (2000), "Value-at-risk and Extreme Returns", Annales d'Economie et de Statistique, 60, 239-270.
- DANIELSON, J.; HARTMAN, P., and DE VRIES, C., (1998), "The Value of Value at Risk: Statistical, Financial and Regulatory Considerations", Perspective on Economic Highlights of the Year, 4(3), 2, 107-108, Federal Reserve Bank of New York,
- DE LARA, H., (2005), "Medición y control de riesgos financieros", 3.ª edición, Editorial Limusa.
- DIAS, A. and EMBRECHTS, P., (2004), "Dynamic Copula Models for Multivariate High Frequency Data in Finance", Working Paper, Departamento de Matemáticas, Zurich: ETH.



- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; and STRAUMANN, D., (1999), "Correlation: Pitfalls and Alternatives", Discussion Paper, ETH Zurich.
- FERNÁNDEZ, V., (2003), "Extreme Value Theory and Value at Risk", en Revista de Análisis Económico, Universidad de Chile, Chile.
- FREGOSO L. J., (S.F.). Teoría de Portafolios, presentación, Universidad Anáhuac.
- GILLI, M. and KELLEZI, M., (2005), "An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk", Working Paper, University of Geneva and FAME.
- GLASSERMAN, P.; HEIDELBERGER, P., and SHAHABUDDIN, P., (2002), "Portfolio Value-At-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors", Mathematical Finance, volume, 12, N.º 3, 239-269
- HOSKING, J. and WALLIS, J., (1987), Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, Technometrics, 29, 339-349.
- HOTTA, L.K.; LUCAS, E.C., and PALARO, H.P., (2006), "Estimation of VaR Using Copula and Extreme Value Theory", Working Paper, ESAMC, Universidad Campinas, Brazil.
- MANGANELLI, S. and ENGLE, R., (2001), "Value at Risk Models in Finance", Working Paper Series, European Central Bank.
- McNEIL, A. and FREY, R., (2000), "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach", Journal of Empirical Finance, 7, 271-300.
- McNEIL, A., (1999), "Extreme Value Theory for Risk Managers", Working Paper, ETH Zurich.
- McNEIL, A.; FREY, R.; and EMBRECHTS, P., (2005), Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton University Press.
- MORGAN, J., (1996), Riskmetrics – documento técnico, JP Morgan, Nueva York..
- NELSEN, R., (1999), "An Introduction to Copulas", Inc, Springer- Verlag, New York.
- ODENING, M. and HINRICHS, J., (1999), Using Extreme Value Theory to Estimate Value-at-Risk, Humboldt University.
- PATTON and ANDREW, J., (2001), Estimation of copula models for times series of possibly different lengths, Universidad de California de San Diego, Economics Working Paper Series, N.º 17.
- PICKANDS, J., (1975), Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. Annals of Statistics, 3, 119-131.
- QUEVEDO, R., (S. F.), Dependencia entre activos financieros: un ejemplo para la relación Tes-Dólar más allá de los supuestos, Facultad de Economía, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.
- ROMANO, C., (2003), "Applying Copula Function to Risk Management", Working Paper. University of Rome "La Sapienza", Risk Management Function, Rome.

SALINAS, M., (2009), "Estimación del Valor en Riesgo (Var) desde la Teoría de Valor Extremo y Cópulas: aplicación a un portafolio de activos", Trabajo de Grado.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA, (2003), Circular Básica Contable y Financiera, Capítulo XXI, "Criterios y procedimientos para medición de riesgos de mercado".

VÉLEZ, Julio, (2007), Teoría de Cópulas aplicada a la predicción, Universidad

Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Madrid.

VILLAREAL, J., CRUZ, J.; y ROSILLO, J., (2003), Finanzas corporativas. Valoración, política de financiamiento y riesgo. Teoría y práctica, Thomson.

ZIVOT, E., and WANG, J., (2006), Modeling Financial Time Series with S-Plus, Springer.