Vol. 12 (núm. 1) pp. 33-41
Enero-Junio 2021
https://doi.org/10.19053/01217488.v12.n1.2021.11937

Propiedad χ en extensiones PBW torcidas graduadas

χ Property in Graded Skew PBW Extensions

Héctor Suárez[1], Fabián Anaya[2] y Armando Reyes[3]

Resumen

En este artículo estudiamos la propiedad χ de álgebras que son extensiones PBW torcidas graduadas. Demostramos que si $R = \oplus_{p\geq 0}R_p$ es un álgebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduada y $A = \sigma(R)\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada de R, entonces A satisface χ si y solo si R satisface χ. También damos condiciones suficientes para que una extensión PBW torcida graduada de R satisfaga χ.

Palabras clave**:** extensión PBW torcida graduada, propiedad χ, PI-algebra

Abstract

In this paper we study the χ property for algebras which are graded skew PBW extensions. It is shown that if $R = \oplus_{p\geq 0}R_p$ is a noetherian $\mathbb{N}$-graded algebra and $A = \sigma(R)\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ is a graded quasi-commutative skew PBW extension of R, then A satisfies χ if and only if R satisfies χ. Also we give sufficient conditions for that a graded skew PBW extension of R satisfies χ.

Keywords**:** graded skew PBW extension, χ property, PI-algebra

Recepción: 4-ago-2020
Aceptación: 15-nov-2020

[1]Escuela de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.
Correo electrónico: hector.suarez@uptc.edu.co
[2]Escuela de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.
Correo electrónico: fabianhernando.anaya@uptc.edu.co
[3]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C.
Correo electrónico: mareyesv@unal.edu.co

1 Introducción

La propiedad χ (véase la Definición 3) juega un papel importante en geometría algebraica no conmutativa. Artin y Zhang en [2] describen algunas álgebras graduadas que satisfacen la condición χ y demuestran que una importante clase de álgebras que satisfacen χ son las álgebras regulares.

Gallego y Lezama en [4] definieron una clase especial de anillos de tipo polinomial, los cuales son llamados extensiones PBW torcidas. Varias propiedades de estas extensiones han sido ampliamente estudiadas (véase por ejemplo [5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21]). Gran parte de los ejemplos, las propiedades y otros aspectos importantes de las extensiones PBW torcidas se encuentran compiladas en [3].

El primer autor en [18] definió las extensiones PBW torcidas graduadas como una generalización de las extensiones de Ore iteradas graduadas. Algunas propiedades de estas extensiones graduadas han sido estudiadas recientemente (véase por ejemplo [6, 20]).

Es natural preguntarnos qué condiciones deben cumplir las extensiones PBW torcidas graduadas para que satisfagan la propiedad χ. En este artículo mostramos que bajo ciertas condiciones para un anillo R, una extensión PBW torcida graduada de R satisface la propiedad χ. En especial, si R es un álgebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduada y A es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada, entonces R satisface χ si y solo si A satisface χ. Las extensiones PBW torcidas cuasi-conmutativas graduadas también tienen la propiedad χ cuando el anillo de coeficientes R cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) Si R es una PI-álgebra noetheriana.

(ii) Si R es un álgebra conmutativa noetheriana graduada.

(iii) Si R es un álgebra Artin-Schelter regular noetheriana.

También demostramos que las extensiones PBW torcidas graduadas de un álgebra conexa, finitamente presentada y Auslander-regular satisfacen χ.

Los principales resultados se encuentran en el Teorema 17, el Corolario 19, la Proposición 22 y la Proposición 26. Ilustramos estos resultados mediante algunos ejemplos.

2 Preliminares

En esta sección presentamos una serie de definiciones y propiedades que serán usadas posteriormente. Algunas de las definiciones y conceptos homológicos de la teoría de módulos, de la teoría de anillos y otros aspectos que utilizamos aquí, pueden encontrarse en [8].

Para lo que sigue del artículo fijamos la siguiente notación: $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales incluyendo el 0 y $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros, todos los anillos son asociativos con identidad, los módulos son izquierdos, $\mathbb{K}$ es un cuerpo, todas las álgebras son $\mathbb{K}$-álgebras, $\mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ es el álgebra libre en las variables $x_1,\dots,x_n$, $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ es una extensión de Ore del anillo R y $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ es una *extensión de Ore iterada* de R.

Un álgebra A es llamada $\mathbb{Z}$-*graduada* si tiene una descomposición en $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $A=\oplus_{p\in\mathbb{Z}}A_p$ tal que $A_iA_j\subseteq A_{i+j}$, para todo $i,j\in\mathbb{Z}$; A_p se llama *componente de grado* p y un elemento de A_p es llamado *homogéneo* de grado p. Si $A_p=0$ para $p<0$, es decir, $A=\oplus_{p\in\mathbb{N}}A_p$, se dice que A es un álgebra *graduada positivamente* o $\mathbb{N}$-*graduada*. Un álgebra $\mathbb{N}$-graduada $A=\oplus_{p\geq 0}A_p$ es llamada *conexa* si $A_0=\mathbb{K}$. Sean A un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada y M un A-módulo. Se dice que M es un *módulo graduado* si posee una familia de subespacios $\{M_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $A_qM_p\subseteq M_{p+q}$, para cualesquiera $p,q\in\mathbb{Z}$.

ii) $M=\oplus_{p\in\mathbb{Z}}M_p$.

Si M es un módulo graduado, entonces dado un entero l, $M(l)$ es el módulo graduado cuya componente homogénea de grado p es M_{p+l}. Sean M y N A-módulos graduados, un A-homomorfismo $f:M\to N$ es *graduado* si $f(M_p)\subseteq N_p$, para cada $p\in\mathbb{Z}$; $\underline{\mathrm{Hom}}_A^d(M,N)$ denota el conjunto de todos los A-homomorfismos $h:M\to N$ tales que $h(M_i)\subseteq N_{i+d}$,

$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \oplus_{d\in\mathbb{Z}}\underline{\mathrm{Hom}}_A^d(M,N)$ y $\mathrm{Ext}_A^i(M,N)$ denota el correspondiente funtor derivado.

Una *identidad polinomial (PI)* para un álgebra A es un polinomio no nulo $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ en un número finito de variables no conmutativas $x_1,x_2,\dots,x_n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ tal que $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=0$, para todo $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$. Un álgebra para la cual existe una identidad polinomial se llama *PI-álgebra*.

Ejemplo 1. Los siguientes son algunos ejemplos de PI-álgebras.

(i) Las álgebras conmutativas, ya que $f(x,y)=xy-yx$ es una identidad polinomial.

(ii) Las álgebras Booleanas, pues $f(x)=x^2-x$ es una identidad polinomial.

(iii) Cualquier cuerpo finito con n elementos, pues $f(x)=x^n-x$ es una identidad polinomial.

En general las álgebras libres $\mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ con $n\geq 2$ no son PI-álgebras.

Una $\mathbb{K}$-álgebra A es *finitamente generada como álgebra* si existen elementos $a_1,\dots,a_n\in A$ tal que el conjunto $\{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}|1\leq i_j\leq n, m\geq 1\}\cup\{1\}$ genera a A como un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una $\mathbb{K}$-álgebra A, $\mathbb{N}$-graduada, conexa y finitamente generada se llama *finitamente presentada*, si existe un ideal homogéneo $I=\langle f_1,\dots,f_m\rangle$ generado por finitos elementos homogéneos, tal que $A\cong\mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n\rangle/I$. $\mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n\rangle/\langle f_1,\dots,f_m\rangle$ se llama una *presentación* de A con generadores $x_1,\dots,x_n$ y relaciones $f_1,\dots,f_m$.

Sea M un A-módulo. Se dice que M es *noetheriano* si todos los submódulos de M son finitamente generados. El anillo (álgebra) A se llama noetheriano si A como A-módulo es noetheriano. Un álgebra graduada se llama *noetheriana graduada* a izquierda (derecha) si todo ideal graduado izquierdo (derecho) es finitamente generado.

Se define el grado de un A-módulo M como $j_A(M):=\min\{p\mid \mathrm{Ext}_A^p(M,\ A)\neq 0\}$ o ∞ si no existe tal p. Notemos que $j_A(0)=\infty$. Cuando A es noetheriano, $j_A(M)\leq pd(M)$, donde $pd(M)$ denota la dimensión proyectiva de M.

Definición 2 ([10], Definición 2.1)**.** Sea A un anillo noetheriano.

(i) Se dice que un A-módulo M satisface la *condición de Auslander*, si $\forall\ p\geq 0$, $j_A(N)\geq p$ para todo A-submódulo N de $\mathrm{Ext}_A^p(M,\ A)$.

(ii) El anillo A se llama *Auslander-regular* de dimensión q si $gld(A)=q<\infty$ y cada A-módulo finitamente generado satisface la condición de Auslander.

Definición 3 ([2], Definición 3.7)**.** Sea A un álgebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduada y M un A-módulo graduado. Se dice que A *satisface* $\chi_i(M)$ para un A-módulo M, si para todo d y para todo $j\leq i$, existe un entero n_0 tal que $\mathrm{Ext}_A^j(A/A_{\geq n},M)_{\geq d}$ es un A-módulo finito, donde $A_{\geq n}=\oplus_{m\geq n}A_m$ y $n\geq n_0$. Si A satisface $\chi_i(M)$, para todo A-módulo finito M, se dice que A *satisface* χ_i y si A satisface χ_i para todo i, se dice que A *satisface* χ.

Definición 4 ([1], Página 171)**.** Sea $A=\mathbb{K}\oplus A_1\oplus A_2\oplus\cdots$ un álgebra graduada finitamente presentada sobre $\mathbb{K}$. El álgebra A es llamada *Artin-Schelter regular* si se tienen las siguientes propiedades:

(i) A tiene dimensión global finita d.

(ii) A tiene dimensión de Gelfand-Kirillov finita.

(iii) A es *Gorenstein*, es decir, $\mathrm{Ext}_A^i(\mathbb{K},A)=0$ si $i\neq d$ y para algún entero l, $\mathrm{Ext}_A^d(\mathbb{K},A)\cong\mathbb{K}(l)$.

Sea $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ una extensión de Ore iterada de R. Si para $1\leq i\leq n$, σ_i es el endomorfismo identidad entonces $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]:=R[x_1;\delta_1]\cdots[x_n;\delta_n]$ y se conoce como extensión de Ore iterada *de tipo derivación*. Si δ_i es la σ_i-derivación nula, entonces la extensión de Ore iterada se denota por $R[x_1;\sigma_1]\cdots[x_n;\sigma_n]$ y se llama extensión de Ore iterada de *tipo endomorfismo*; en tal caso $R[x_1;\sigma_1]\cdots[x_n;\sigma_n]$ es un álgebra $\mathbb{N}$-graduada.

Una clase especial de extensiones de Ore iteradas son los anillos de polinomios torcidos (véase [8]). Un *anillo de polinomios torcidos* es una extensión de Ore iterada $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \sigma_i(x_j) &= x_j, && j<i; \\ \delta_i(x_j) &= 0, && j<i; \\ \sigma_i\sigma_1 &= \sigma_1\sigma_i, && 1\leq i\leq n; \\ \delta_i\delta_1 &= \delta_1\delta_i, && 1\leq i\leq n; \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades se entienden que están restringidas al anillo R. Como una consecuencia de las propiedades en la definición de un anillo de polinomios torcidos, tenemos que $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ es un anillo de polinomios torcidos de R si y solo si

$$\begin{aligned} x_ix_j &= x_jx_i, && 1\leq i,j\leq n, \\ \sigma_i(R),\delta_i(R) &\subseteq R, && 1\leq i\leq n. \end{aligned}$$

Ejemplo 5 ([4])**.** Sea $R=\mathbb{K}[t_1,\ldots,t_n]$ y $A_n(\mathbb{K}):=R[x_1;\delta_1]\cdots[x_n;\delta_n]$ con $\delta_j=\frac{\partial}{\partial t_j}$, para $1\leq j\leq n$. $A_n(\mathbb{K})$ es una extensión de Ore iterada de tipo derivación y se conoce como álgebra de Weyl.

Definición 6 ([4], Definición 1)**.** Sean R y A anillos, se dice que A es una *extensión PBW torcida* de R si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $R\subseteq A$.

(ii) Existen en A elementos $x_1,\ldots,x_n$ tales que A es un R-módulo libre a izquierda, cuya base es el conjunto $\mathrm{Mon}(A)$ de los monomios estándar, $\mathrm{Mon}(A):=\{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\mid \alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\}$. En tal caso se dice que A es un anillo de polinomios a izquierda sobre R con respecto a $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

(iii) Para cada $1\leq i\leq n$ y $r\in R-\{0\}$, existe $c_{i,r}\in R-\{0\}$ tal que

$$x_ir-c_{i,r}x_i\in R.$$

(iv) Para todo $1\leq i,j\leq n$, existe $c_{i,j}\in R-\{0\}$ tal que

$$x_jx_i-c_{i,j}x_ix_j\in R+Rx_1+\cdots+Rx_n.$$

En tal caso, una extensión PBW torcida de R es denotada por $A:=\sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$.

Ejemplo 7. Todo anillo de polinomios torcidos es una extensión PBW torcida. En efecto, $x_ir-rx_i=\delta_i(r)$, $x_ix_j-x_jx_i=0$.

La siguiente propiedad es muy importante en el estudio de las extensiones PBW torcidas y su demostración puede consultarse en [4, Proposición 3].

Proposición 8 ([4], Proposición 3)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de R entonces para cada $1\leq i\leq n$, existe un endomorfismo inyectivo de anillos $\sigma_i:R\to R$ y una σ_i-derivación $\delta_i:R\to R$, tal que*

$$x_ir=\sigma_i(r)x_i+\delta_i(r), \tag{1}$$

para todo $r\in R$.

Dos subclases muy importantes de extensiones PBW torcidas son las siguientes.

Definición 9 ([4], Definición 4)**.** Sea $A=\sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida de R. A es *cuasi-conmutativa* si las condiciones (iii) y (iv) en la Definición 6 son reemplazadas por:

(iii)' Para cada $1\leq i\leq n$ y $r\in R-\{0\}$, existe $c_{i,r}\in R-\{0\}$ tal que

$$x_ir=c_{i,r}x_i.$$

(iv)' Para todo $1\leq i,j\leq n$, existe $c_{i,j}\in R-\{0\}$ tal que

$$x_jx_i=c_{i,j}x_ix_j.$$

A es *biyectiva* si σ_i es biyectiva para todo $1\leq i\leq n$ y $c_{i,j}$ es invertible para cualquier $1\leq i<j\leq n$.

Las extensiones de Ore y las extensiones de Ore iteradas (bajo algunas condiciones) son extensiones PBW torcidas. No todas las extensiones PBW torcidas son extensiones de Ore iteradas.

Ejemplo 10 ([4])**.** Cualquier extensión de Ore $R[x;\sigma,\delta]$, con σ inyectivo, es una extensión PBW torcida. Si además $\delta=0$, entonces $R[x;\sigma]$ es cuasi-conmutativa. Una extensión de Ore iterada $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ es una extensión PBW torcidas si satisface las siguientes condiciones:

- σ_i es inyectiva para todo $1\leq i\leq n$.
- Para todo $r\in R$, $\sigma_i(r),\delta_i(r)\in R$ con $1\leq i\leq n$.
- Para $i<j$, $\sigma_j(x_i)=cx_i+d$ con $c,d\in R$ y c invertible a izquierda.

- Para $i < j$, $\delta_j(x_i) \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$.

En particular un anillo de polinomios torcidos $\mathbb{K}[t_1,\ldots,t_n][x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ es una extensión PBW torcida si σ_i es inyectiva para $1 \leq i \leq n$ y para todo $p \in \mathbb{K}[t_1,\ldots,t_n]$, $\sigma_i(p), \delta_i(p) \in K[t_1,\ldots,t_n]$ con $1 \leq i \leq n$.

Si R es un anillo $\mathbb{N}$-graduado entonces las extensiones de Ore iteradas de R se pueden dotar de una graduación. Sea $A = R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ una extensión de Ore iterada de un anillo $\mathbb{N}$-graduado R. Entonces A es llamada *extensión de Ore iterada graduada* si $x_1,\ldots,x_n$ tienen grado 1 en A, cada σ_i es un automorfismo graduado de álgebras y cada δ_i es una σ_i-derivación graduada.

El primer autor definió en [18] las extensiones PBW torcidas graduadas como una generalización de las extensiones de Ore iteradas graduadas.

Proposición 11 ([18], Proposición 2.7)**.** *Sea $R = \oplus_{m\geq 0} R_m$ un álgebra $\mathbb{N}$-graduada y sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida biyectiva de R que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *σ_i es un homomorfismo de anillos graduados y $\delta_i : R(-1) \to R$ es una σ_i-derivación graduada para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, donde σ_i y δ_i están definidas como en la Proposición 8.*

(ii) $x_jx_i - c_{i,j}x_ix_j \in R_2 + R_1x_1 + \cdots + R_1x_n$ *y* $c_{i,j} \in R_0$.

Para $p \geq 0$, sea A_p el $\mathbb{K}$-espacio generado por el conjunto

$$\{r_t x^{\alpha} \mid t + |\alpha| = p,\ r_t \in R_t \ y \ x^{\alpha} \in \mathrm{Mon}(A)\}.$$

Entonces A es un álgebra $\mathbb{N}$-graduada con graduación

$$A = \oplus_{p\geq 0} A_p.$$

Definición 12 ([18], Definición 2.6)**.** Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida biyectiva de un álgebra $\mathbb{N}$-graduada $R = \oplus_{p\geq 0} R_p$. Se dice que A es una extensión PBW torcida graduada si A satisface las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 11.

A continuación presentamos un resultado que usamos en la demostración del Teorema 17 y que muestra que toda extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada es una extensión de Ore iterada graduada de tipo endomorfismo.

Proposición 13 ([20], Proposición 2.7)**.** *Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida graduada. Si A es cuasi-conmutativa, entonces A es isomorfa a una extensión de Ore iterada graduada de tipo endomorfismo $R[z_1;\theta_1]\cdots[z_n;\theta_n]$, donde θ_i es biyectiva, $\theta_i(r) = \sigma_i(r)$ para $r \in R$, $\theta_1 = \sigma_1$ y*

$$\theta_j : R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{j-1};\theta_{j-1}] \to R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{j-1};\theta_{j-1}]$$

es tal que $\theta_j(z_i) = c_{i,j}z_i$ ($c_{i,j} \in R_0$ como en (iv) de la Definición 6), $1 \leq i < j \leq n$.

Observación 14. La clase de extensiones de Ore iteradas graduadas es una subclase de las extensiones PBW torcidas graduadas (véase [18, Observación 2.11]).

La siguiente proposición es el análogo del teorema de la base de Hilbert para extensiones PBW torcidas graduadas.

Proposición 15 ([20], Proposición 2.7-(i))**.** *Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida graduada. Si R es un álgebra noetheriana a derecha (izquierda) graduada, entonces cada extensión PBW torcida graduada de R es noetheriana a derecha (izquierda) graduada.*

3 Propiedad χ

En esta sección presentamos algunos resultados de la condición χ en extensiones PBW torcidas graduadas. También damos otras propiedades que no presentamos en la sección anterior y que son necesarias para demostrar dichos resultados.

Un elemento a de un anillo R se llama *normal* si $Ra = aR$.

Proposición 16 ([2], Teorema 8.8)**.** *Sea A un álgebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduada con un elemento normal a de grado positivo. Entonces A satisface χ si y solo si $A/\langle a\rangle$ satisface χ, donde $\langle a\rangle$ es el ideal bilátero de A generado por a.*

Teorema 17. *Sean $R = \oplus_{p\geq 0} R_p$ un álgebra noetheriana $\mathbb{N}$-graduada y $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada. Entonces R satisface χ si y solo si A satisface χ.*

Proof. Por la Proposición 13 tenemos que A es isomorfa a una extensión de Ore iterada $\mathbb{N}$-graduada de tipo endomorfismo

$$R[z_1;\theta_1]\cdots[z_n;\theta_n],$$

donde θ_i es biyectiva para cada i; $z_1, z_2, \dots, z_n$ son elementos homogéneos de grado 1; $\theta_1 = \sigma_1$; y para $1 < j \leq n$,

$$\theta_j : R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{j-1};\theta_{j-1}] \to R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{j-1};\theta_{j-1}]$$

cumple las siguientes condiciones:

(i) $\theta_j(z_i) = c_{i,j}z_i$, $c_{i,j} \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.

(ii) $\theta_i(r) = \sigma_i(r)$, para $r \in R$.

Además,

$$z_1 r = \theta_1(r) z_1 = \sigma_1(r) z_1 \in R z_1$$

y como $\sigma_1^{-1}(r) = \theta_1^{-1}(r) \in R$, entonces $z_1\theta_1^{-1}(r) \in z_1R$, pero

$$z_1\theta_1^{-1}(r) = \sigma_1(\theta_1^{-1}(r))z_1 = \sigma_1(\sigma_1^{-1}(r))z_1 = rz_1,$$

es decir, $rz_1 \in z_1R$. Por lo tanto, $z_1 \in A_1$ es un elemento normal no nulo de $A^{(1)} := R[z_1;\theta_1]$. Nótese que $A^{(1)}/\langle z_1\rangle = R$. Por la Proposición 16, $A^{(1)} = R[z_1;\theta_1]$ satisface χ si y solo si $A^{(1)}/\langle z_1\rangle = R$ satisface χ. Ahora, $z_2 \in A_1$ es un elemento normal no nulo de $A^{(2)} := A^{(1)}[z_2;\theta_2] = R[z_1;\theta_1][z_2;\theta_2]$ y $A^{(2)}/\langle z_2\rangle = A^{(1)}$. Como R es noetheriana y $\mathbb{N}$-graduada, $R[z_1;\theta_1]$ es noetheriana (Proposición 15) y $\mathbb{N}$-graduada. Por la Proposición 16, $A^{(2)} = R[z_1;\theta_1][z_2;\theta_2]$ satisface χ si y solo si $A^{(2)}/\langle z_2\rangle = R[z_1;\theta_1]$ satisface χ. Finalmente, supongamos que

$$A^{(n-1)} := R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{n-1};\theta_{n-1}]$$

satisface χ. Notemos que $z_n \in A_1$ es un elemento normal no nulo de

$$\begin{aligned} A^{(n)} &:= A^{(n-1)}[z_n;\theta_n] \\ &= R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{n-1};\theta_{n-1}][z_n;\theta_n] = A. \end{aligned}$$

Como R es noetheriana y $\mathbb{N}$-graduada, $A^{(n-1)} := R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{n-1};\theta_{n-1}]$ es noetheriana (Proposición 15) y $\mathbb{N}$-graduada. Por la Proposición 16, $A^{(n)} = R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{n-1};\theta_{n-1}][z_n;\theta_n] = A$ satisface χ si y solo si $A^{(n)}/\langle z_n\rangle = R[z_1;\theta_1]\cdots[z_{n-1};\theta_{n-1}]$ satisface χ. Por transitividad tenemos que R satisface χ si y solo si A satisface χ. □

El siguiente teorema lo usamos en la demostración del Corolario 19.

Teorema 18 ([2], Teorema 5.1)**.** *Si R es una PI-álgebra $\mathbb{N}$-graduada noetheriana, entonces R satisface χ.*

Corolario 19. *Sea $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada.*

(i) Si R es una PI-álgebra noetheriana entonces A satisface χ.

(ii) Si R es un álgebra conmutativa noetheriana graduada entonces A satisface χ.

Proof. Sea $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada de un álgebra R. Por la Definición 12 tenemos que R es $\mathbb{N}$-graduada.

(i) Si R es una PI-álgebra noetheriana entonces por el Teorema 18 tenemos que R satisface χ. Ahora, por el Teorema 17 tenemos que A satisface χ.

(ii) Si R es un álgebra conmutativa entonces por el Ejemplo 1 tenemos que R es una PI-álgebra. Como además R es noetheriana, entonces por el ítem (i) anterior tenemos que A satisface χ.

□

La propiedad Artin-Schelter regular de un álgebra R pasa a las extensiones PBW torcidas cuasi-conmutativas graduadas (véase [20]).

Proposición 20. *Sea R un álgebra Artin-Schelter regular y sea $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada. Entonces A es Artin-Schelter regular.*

Artin y Zhang en [2] demuestran que las álgebras Artin-Schelter regulares noetherianas satisfacen χ.

Proposición 21 ([2], Teorema 8.1)**.** *Sea A un álgebra Artin-Schelter regular noetheriana. Entonces A satisface la condición χ.*

De las dos proposiciones anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 22. *Toda extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada de un álgebra Artin-Schelter regular noetheriana satisface χ.*

Proof. Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada de un álgebra Artin-Schelter regular noetheriana R. Por la Proposición 20 tenemos que A es Artin-Schelter regular y por la Proposición 15 tenemos que A es noetheriana. Por lo tanto, aplicando la Proposición 21 concluimos que A satisface χ. □

Usando los resultados anteriores, tenemos los siguientes ejemplos de extensiones PBW torcidas cuasi-conmutativas graduadas que satisfacen la condición χ.

Ejemplo 23 (*Álgebra de operadores parciales lineales con q-dilatación*)**.** Para un elemento fijo $q \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, el álgebra de operadores parciales lineales con q-dilatación y coeficientes polinomiales es $\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n][H_1^{(q)},\dots,H_m^{(q)}]$, $n \geq m$, sujeto a las relaciones: $t_jt_i = t_it_j$, $1 \leq i < j \leq n$; $H_i^{(q)}t_i = qt_iH_i^{(q)}$, $1 \leq i \leq m$; $H_j^{(q)}t_i = t_iH_j^{(q)}$, $i \neq j$; $H_j^{(q)}H_i^{(q)} = H_i^{(q)}H_j^{(q)}$, $1 \leq i < j \leq m$. De acuerdo a las relaciones dadas anteriormente, tenemos que esta álgebra es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada del álgebra $\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]$. Como $\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]$ es un álgebra conmutativa noetheriana entonces por el Corolario 19 (ii) tenemos que $\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n][H_1^{(q)},\dots,H_m^{(q)}]$ satisface χ.

Ejemplo 24 (*Análogo multiplicativo del álgebra de Weyl*)**.** Esta álgebra es denotada por $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ y es generada por $x_1,\dots,x_n$ sujeta a las relaciones: $x_jx_i = \lambda_{ji}x_ix_j$, $1 \leq i < j \leq n$, $\lambda_{ji} \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Entonces $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa graduada de $\mathbb{K}[x_1]$. Si $n = 2$, esta álgebra es llamada el *plano cuántico*. Nótese que $\mathbb{K}[x_1]$ es un álgebra conmutativa noetheriana, así, por el Corolario 19 (ii) tenemos que $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ satisface χ.

Usamos la siguiente proposición para la demostración de la Proposición 26.

Proposición 25 ([20], Proposición 3.5)**.** *Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida graduada. Si R es un álgebra conexa, finitamente presentada y Auslander-regular, entonces A es Artin-Schelter regular.*

Proposición 26. *Toda extensión PBW torcida graduada de un álgebra conexa, finitamente presentada y Auslander-regular satisface χ.*

Proof. Sea $A = \sigma(R)\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ una extensión PBW torcida graduada de un álgebra R conexa, finitamente presentada y Auslander-regular. Por la Definición 2 tenemos que R es noetheriana y por la Proposición 15 concluimos que A es noetheriana. Ahora, por la Proposición 25 tenemos que A es Artin-Schelter regular. El resultado sigue entonces de la Proposición 21. □

Los siguientes dos ejemplos son extensiones PBW torcidas graduadas no cuasi-conmutativas que satisfacen χ.

Ejemplo 27. El plano de Jordan A es el álgebra libre generada por x, y con la relación $yx = xy + x^2$, es decir, $A = \mathbb{K}\langle x,y\rangle/\langle yx - xy - x^2\rangle$. Por lo tanto, esta álgebra es una extensión PBW torcida de $\mathbb{K}[x]$. Para mayor información acerca del plano de Jordan, véase [5]. Como $\mathbb{K}[x]$ es noetheriana, finitamente presentada y Auslander-regular entonces por la Proposición 26 tenemos que el plano de Jordan satisface χ.

Ejemplo 28. Sea $\mathscr{G}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ con base $\{x_1,\dots,x_n\}$ y $\mathscr{U}(\mathscr{G})$ su álgebra envolvente. El *álgebra envolvente homogeneizada* de $\mathscr{G}$ es $\mathscr{A}(\mathscr{G}) := T(\mathscr{G}\oplus\mathbb{K}z)/\langle R\rangle$, donde $T(\mathscr{G}\oplus\mathbb{K}z)$ es el álgebra tensorial (libre), z es una nueva variable, y R es el subespacio generado por $\{z\otimes x - x\otimes z \mid x \in \mathscr{G}\} \cup \{x\otimes y - y\otimes x - [x,y]\otimes z \mid x,y \in \mathscr{G}\}$. Esta es un álgebra de Lie sobre el cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(z)$. Por lo tanto $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ es una extensión PBW torcida graduada de $\mathbb{K}[z]$ (véase [18, Ejemplo 2.9]). Como $\mathbb{K}[z]$ es noetheriana, finitamente presentadas y Auslander-regular entonces por la Proposición 26 tenemos que el álgebra envolvente homogeneizada satisface χ.

Referencias

[1] M. Artin and W. F. Schelter, “Graded algebras of global dimension 3”, *Adv. Math.*, vol. 66, pp. 171-216, 1987.

[2] M. Artin and J. J. Zhang, “Noncommutative projective schemes”, *Adv. Math.*, vol. 109, pp. 228-287, 1994.

[3] W. Fajardo, C. Gallego, O. Lezama, A. Reyes, H. Suárez and H. Venegas, *Skew PBW extensions: Ring and Module-theoretic Properties, Matrix and Gröbner Methods, and Applications*, Algebra and Applications, vol. 28, Springer, Springer International Publishing, 2020.

[4] C. Gallego and O. Lezama, “Gröbner bases for ideals of $\sigma-$PBW extensions”, *Comm. Algebra*, vol. 39, pp. 50-75, 2011.

[5] J. A. Gómez y H. Suárez, “Algunas propiedades homológicas del plano de Jordan", *Ciencia en Desarrollo*, vol. 9, no. 2, pp. 69-82, 2018.

[6] J. Y. Gómez and H. Suárez, “Double Ore extensions versus graded skew PBW extensions”, *Comm. Algebra*, vol. 48, no. 1, pp. 185-197, 2020.

[7] N. R. González y Y. P. Suárez, “Ideales en el anillo de polinomios torcidos $R[x;\sigma,\delta]$", *Ciencia en Desarrollo*, vol. 5, no. 1, pp. 31-37, 2014.

[8] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts, London, second edition, 2004.

[9] M. Hamidizadeh, E. Hashemi and A. Reyes, “A classification of ring elements in skew PBW extensions over compatible rings", *Int. Electron. J. Algebra*, vol. 28, pp. 75-97, 2020.

[10] T. Levasseur, “Some properties of non-commutative regular graded rings”, *Glasglow Math. J.*, vol. 34, pp. 277-300, 1992.

[11] O. Lezama and E. Latorre, “Non-commutative algebraic geometry of semi-graded rings”, *Internat. J. Algebra Comput.*, vol. 27, no. 4, pp. 361-389, 2017.

[12] O. Lezama and A. Reyes, “Some homological properties of skew PBW extensions”, *Comm. Algebra*, vol. 42, no. 3, pp. 1200-1230, 2014.

[13] A. Reyes and H. Suárez, “Some remarks about the cyclic homology of skew PBW extensions", *Ciencia en Desarrollo*, vol. 7, no. 2, pp. 99-107, 2016.

[14] A. Reyes and H. Suárez, “Radicals and Köthe’s conjecture for skew PBW extensions”, *Commun. Math. Stat.*, 2019, https://doi.org/10.1007/s40304-019-00189-0

[15] A. Reyes and H. Suárez, “Skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions over weak compatible rings”, *J. Algebra Appl.*, vol. 19, no. 12, pp. 2050225(1)-2050225(21), 2020.

[16] A. Reyes and H. Suárez, “Skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions over weak zip rings”, *Beitr. Algebra Geom.*, vol. 60, pp. 197-216, 2019.

[17] L. Salcedo, “Hopf algebras and skew PBW extensions”, *Ciencia en Desarrollo*, vol. 10, no. 2, pp. 125-135, 2019.

[18] H. Suárez, “Koszulity for graded skew PBW extensions”, *Comm. Algebra*, vol. 45, no. 10, pp. 4569-4580, 2017.

[19] H. Suárez, O. Lezama and A. Reyes, “Some relations between *N*-Koszul, Artin-Schelter regular and Calabi-Yau algebras with skew *PBW* extensions”, *Ciencia en Desarrollo*, vol. 6, no. 2, pp. 205-213, 2015.

[20] H. Suárez, O. Lezama and A. Reyes, “Calabi-Yau property for graded skew PBW extensions”, *Rev. Colombiana Mat.*, vol. 51, no. 2, pp. 221-238, 2017.

[21] H. Suárez and A. Reyes, “Nakayama automorphism of some skew PBW extensions”, *Ingeniería y Ciencia*, vol. 15, no. 29, pp. 157-177, 2019.