

Modelo matemático de una articulación tipo rotoide accionada por músculos artificiales

Mathematical Model of a Rotator Type Joint Actuated by Artificial Muscles

Santiago Zuñiga¹, Diego A. Bravo² y Carlos F. Rengifo³

Resumen

En este trabajo se muestra el modelo matemático de un músculo-tendón usado para el diseño de una articulación tipo rotoide accionada por músculos artificiales. El diseño asistido por computador (**CAD**) permite evaluar y validar los parámetros más convenientes para su construcción; la integración del modelo CAD con MATLAB nos permitió obtener los valores del rango del movimiento $\pm 20^\circ$ y un torque máximo de 6,0 kg-cm ejercido sobre el eje de rotación por el prototipo.

Palabras clave: Articulación tipo rotoide, Modelo matemático, Músculos artificiales, Prototipo

Abstract

In this work, the mathematical model of a muscle-tendon used for the design of a rotator-type joint actuated by artificial muscles is shown. Computer-aided design (**CAD**) allows evaluating and validating the most convenient parameters for its construction; the integration of the CAD model with MATLAB allowed us to obtain the values of the range of motion $\pm 20^\circ$ and a maximum torque of 6.0 kg-cm exerted on the axis of rotation for the prototype.

Keywords: Rotary joint, Mathematical model, Artificial muscles, Prototype

Recepción: 16-jun-2022

Aceptación: 10-sep-2022

¹Ingeniero Físico, Departamento de Física. Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.

²Ingeniero Físico, Ph.D. Profesor Departamento de Física. Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.

³Ingeniero Electricista, Ph.D. Profesor Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control. Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia. Correo electrónico: dibravo@unicauca.edu.co

1 Introducción

La investigación y desarrollo de los músculos artificiales ha ido aumentando a través de los años, debido al interés de los ingenieros y científicos en simular el comportamiento real de los músculos biológicos. Para lograr este objetivo se han desarrollado actuadores cuyo principio físico de funcionamiento puede ser neumático, hidráulico o electromagnético, esto genera que el actuador pueda doblarse, expandirse y contraerse gracias a la influencia de fuerzas extremas.

Los actuadores SMA (Shape Memory alloy) o actuadores de aleación con memoria de forma, son utilizados comúnmente en robots biomiméticos debido a su alta relación potencia-masa, conformidad inherente, niveles bajos de ruido y peso ligero [1]. Los actuadores SMA permiten al material recuperar su estado inicial mediante estímulos de calentamiento interno o externo. Sin embargo, este tipo de actuadores presenta una alta no linealidad y una incertidumbre paramétrica y es un reto para desarrollar una estrategia de control para este tipo de músculos con base en SMA [2].

El material más utilizado para la fabricación de los SMA es la aleación de Níquel y Titanio (NiTi) [3, 4, 5]. En la tabla 1 se pueden observar las propiedades que prestan los SMA activados térmicamente.

Tabla 1. Propiedades de los actuadores SMA activados térmicamente [5]

Tipo de actuador	SMA activados térmicamente
Estímulo	Calentamiento
Amplitud del estímulo	$\approx 4V$
Deformación [%]	< 8.5
Tensión [MPa]	< 700
Velocidad de deformación [% s^{-1}]	< 300
Densidad de trabajo [MJ m^{-3}]	< 10
Densidad de potencia [MW m^{-3}]	< 30
Resistencia a la tracción [MPa]	< 1900
Ancho de banda [Hz]	< 3
Eficiencia [%]	< 16

En la literatura se han desarrollado estrategias de control de los SMA, [6, 1]. El modelo Tanaka [4], describe las variables termoplásticas de los SMA, [7] en donde realizan un control feedback para medir la intensidad de corriente inducida en el material y

realizar su caracterización. Las estrategias de control sugeridos en la literatura son los siguientes:

- Feedforward control: Realizado para compensar las no linealidades del sistema o para realizar tareas simples.
- ON-OFF control: Para robots auto configurables y la locomoción de robots biomiméticos.
- Feedback control: Mejora el rendimiento de los actuadores, tener un mayor control de posición del SMA.
- Sliding mode control: Control de posición de los SMA.
- PID control: Control de posición de los SMA.
- Variable structure control: Control de posición de los SMA.

Este tipo de actuadores es muy utilizado para aplicaciones de la robótica como: robótica médica, robots auto-configurables, robots biomiméticos, manos robóticas y manipuladores y fabricación de exoesqueletos, [8, 9].

El objetivo principal de este artículo, es diseñar un actuador tipo rotoide usando músculos artificiales. Para cumplirlo, se debe determinar el modelo matemático del músculo-tendón con el fin de calcular los parámetros del modelo CAD, necesario para la implementación futura de un prototipo real. Este documento está escrito de la siguiente manera: la sección 2 describe el modelo dinámico del músculo-tendón. La sección 4 contiene el modelo CAD del prototipo propuesto para el actuador tipo rotoide. La sección 5 presenta los resultados de la simulación y validación del prototipo. Finalmente, en la sección 6 se concluye sobre el trabajo de esta investigación.

2 Modelo matemático del músculo-tendón

La figura 1 muestra que un modelo de músculo-tendón comprende la dinámica de activación y contracción. Las entradas para el modelo músculo-tendón son las excitaciones musculares u y la longitud de las fibras del músculo-tendón $l_{mt}(q)$, el

cual depende de la posición articular q . La variable intermedia a corresponde al nivel de activación del músculo. La salida f_t es la fuerza desarrollada por el músculo-tendón. En el modelo propuesto en [10], la dinámica de contracción se describe en términos de cuatro parámetros y cuatro curvas. Los parámetros son la fuerza isométrica máxima f_o , la longitud óptima de las fibras musculares l_o , la longitud en reposo del tendón l_s , y el ángulo de peneación* entre tendones y fibras musculares. Aquí, se asume que este ángulo es igual a cero. El modelo del tendón es definido por la función f_t que describe la relación entre la fuerza y la longitud de la fibra, mientras el modelo del músculo requiere la definición de una fuerza pasiva f_p y la fuerza activa f_a . Este último se define como el producto de tres términos: la activación muscular a , relación fuerza-longitud y relación fuerza-velocidad, respectivamente denotado como f_l y f_v ($f_a = a \cdot f_l \cdot f_v$). Las fuerzas f_t , f_p y f_a están normalizadas con respecto a la fuerza isométrica máxima f_o .

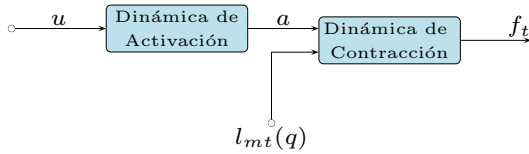


Figura 1. Interacción entre la dinámica de activación y contracción de un músculo-tendón. u es la excitación muscular, a es la activación muscular, $l_{mt}(q)$ es la longitud del músculo-tendón, y q es la posición angular de la articulación.

2.1 Dinámica de activación

La dinámica de activación establece la relación entre la excitación muscular u y la activación mecánica a . Aquí, el modelo es lineal y por partes, [11].

$$\dot{a} = \begin{cases} -\frac{a}{\tau_a} + \frac{u}{\tau_a}, & u \geq a \\ -\frac{a}{\tau_d} + \frac{u}{\tau_d}, & u < a, \end{cases} \quad (1)$$

$\tau_a = 1, ms$ y $\tau_d = 4 ms$ son constantes de tiempo de activación y desactivación, respectivamente. Los

* (Es el ángulo formado por los fascículos y la aponeurosis interna

niveles de excitación y desactivación son asumidos en el intervalo $[0, 1]$.

2.2 Dinámica de contracción

La dinámica de contracción establece la relación entre la fuerza ejercida por el tendón f_t y la fuerza f_a ejercida por el músculo. La interacción entre las fuerzas f_t , f_p y f_a se ilustra en la figura 2.

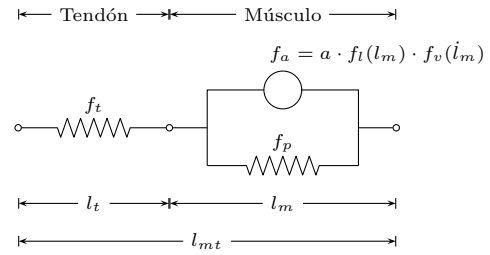


Figura 2. Modelo de Hill's para la dinámica de contracción. f_t es la fuerza del tendón, f_p es la fuerza pasiva muscular, y f_a es la fuerza muscular activa. $f_l(l_m)$ y $f_v(\dot{l}_m)$ son funciones no lineales que dependen de la longitud muscular l_m y su respectiva derivada con respecto al tiempo \dot{l}_m .

El tendón se modela como un elemento pasivo:

$$f_t(l_t) = k_t \left[\frac{l_t - l_s}{l_s} \right], \quad (2)$$

Donde f_t es la fuerza desarrollada por el tendón, l_t es la longitud del tendón, l_s es la longitud del tendón en reposo, y k_t es la constante de rigidez. Se asume que $l_s \leq l_t \leq 1.1 l_s$. El valor $1.1 l_s$ es la longitud máxima antes de la ruptura de las fibras del tendón. La fuerza pasiva es debido a la elasticidad del tejido muscular. Esta fuerza, denotada por f_p , esta descrita por [12]:

$$f_p(\bar{l}_m) = \frac{2.5}{1 + e^{-12(\bar{l}_m - 1.425)}}$$

$\bar{l}_m \triangleq l_m/l_o$ es la longitud normalizada de las fibras del músculo. \bar{l}_m esta en el rango $[0.5, 1.8]$. El elemento activo representa la capacidad muscular para generar una fuerza, basada en la activación muscular a . La fuerza activa f_a es el producto de tres términos: la relación fuerza-longitud denotada $f_l(\bar{l}_m)$, la relación fuerza-velocidad $f_v(\dot{\bar{l}}_m)$, y el nivel de activación muscular a .

$$f_a(a, \bar{l}_m, \dot{l}_m) = a \cdot f_l(\bar{l}_m) \cdot f_v(\dot{l}_m) \quad (3)$$

- Relación fuerza-longitud:

$$f_l(\bar{l}_m) = \frac{1}{1 + e^{-12(\bar{l}_m - 0.6)}} + \frac{1}{1 + e^{+12(\bar{l}_m - 1.4)}} - 1 \quad (4)$$

- Relación fuerza-velocidad:

$$f_v(\dot{l}_m) = \begin{cases} f_{v_{\min}}, & \dot{l}_m < \dot{l}_{m_{\min}} \\ \frac{2}{1 + e^{-6\dot{l}_m}}, & \dot{l}_{m_{\min}} \leq \dot{l}_m \leq \dot{l}_{m_{\max}} \\ f_{v_{\max}}, & \dot{l}_m > \dot{l}_{m_{\max}} \end{cases} \quad (5)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{m_{\min}} &= -1 & f_{v_{\min}} &= \frac{2}{1 + e^6} \\ \dot{l}_{m_{\max}} &= -\frac{1}{6} \ln\left(\frac{2}{1.8} - 1\right) & f_{v_{\max}} &= 1.8 \end{aligned}$$

Niveles de saturación $\dot{l}_{m_{\min}}$ y $f_{v_{\max}}$, $\dot{l}_{m_{\max}}$ y $f_{v_{\min}}$ se deducen para asegurar la continuidad de f_v con respecto a \dot{l}_m .

La figura 3 muestra la relación gráfica de la función fuerza-longitud (4) y de la función fuerza-velocidad f_v . A partir del balance entre las fuerzas f_t , f_p , y f_a alrededor del punto de unión entre el músculo y el tendón (figura 2) y considerando la igualdad $l_t = l_{mt} - l_m$, obtenemos:

$$f_t(l_{mt} - \bar{l}_m \cdot l_o) = f_p(\bar{l}_m) + a \cdot f_l(\bar{l}_m) \cdot f_v(\dot{l}_m) \quad (6)$$

La dinámica de contracción es obtenida mediante la inversión de la función f_v :

$$\dot{l}_m = g_{cd}(f_v) \triangleq \begin{cases} \dot{l}_{m_{\min}}, & f_v < f_{v_{\min}} \\ -\frac{1}{6} \ln\left(\frac{2}{f_v} - 1\right), & f_{v_{\min}} \leq f_v \leq f_{v_{\max}} \\ \dot{l}_{m_{\max}}, & f_v > f_{v_{\max}} \end{cases} \quad (7)$$

Con:

$$f_v = \frac{f_t(l_{mt} - \bar{l}_m \cdot l_o) - f_p(\bar{l}_m)}{a \cdot f_l(\bar{l}_m)} \quad (8)$$

Cuando $f_v \in [f_{v_{\min}}, f_{v_{\max}}]$, \dot{l}_m pertenece a $[\dot{l}_{m_{\min}}, \dot{l}_{m_{\max}}]$. Las indeterminaciones y divisiones por cero se evitan limitando el valor de a a 10^{-3} . Las variables a y l_{mt} son las entradas del modelo que representa la dinámica de contracción. Escribiéndolo como una ecuación de estado:

$$\dot{l}_m = g_{cd}(\bar{l}_m, a, l_{mt}) \quad (9)$$

La igualdad $l_t = l_{mt} - \bar{l}_m \cdot l_o$ es remplazada en la Ec. (2) para expresar f_t en términos del estado músculo-tendón \bar{l}_m y la entrada l_{mt} .

$$f_t = k_t \left[\frac{l_{mt} - \bar{l}_m \cdot l_o - l_s}{l_s} \right] \quad (10)$$

3 Recuperación de energía vinculada al accionamiento con musculotendones

Consideremos el sistema mecánico de la figura 4. Suponemos un torque Γ constante de valor estrictamente positivo y una distribución de fuerzas: $f_1 = \Gamma/r + \Delta_f$, $f_2 = \Delta_f$ ($\Delta_f > 0$).

Esta distribución de fuerzas es equivalente a la activación simultánea de dos músculos en una configuración antagonista en un sistema biomecánico. Si no consideramos la recuperación de energía vinculada a los actuadores, la energía total producida por ellos en un intervalo de tiempo T viene dada por:

$$E = \int_0^T |f_1 \cdot (r\dot{\theta})| dt + \int_0^T |f_2 \cdot (r\dot{\theta})| dt$$

Llevamos los valores de f_1 y f_2 en la ecuación anterior:

$$E = \int_0^T r \left| \left(\frac{\Gamma}{r} + \Delta_f \right) \cdot \dot{\theta} \right| dt + \int_0^T r |\Delta_f \cdot \dot{\theta}| dt$$

Dado que Γ , r y Δ_f son positivos, entonces:

$$E = \int_0^T |\Gamma \cdot \dot{\theta}| dt + 2r \int_0^T |\Delta_f \cdot \dot{\theta}| dt$$

El primer término en la ecuación anterior es la energía transferida por los actuadores al sistema

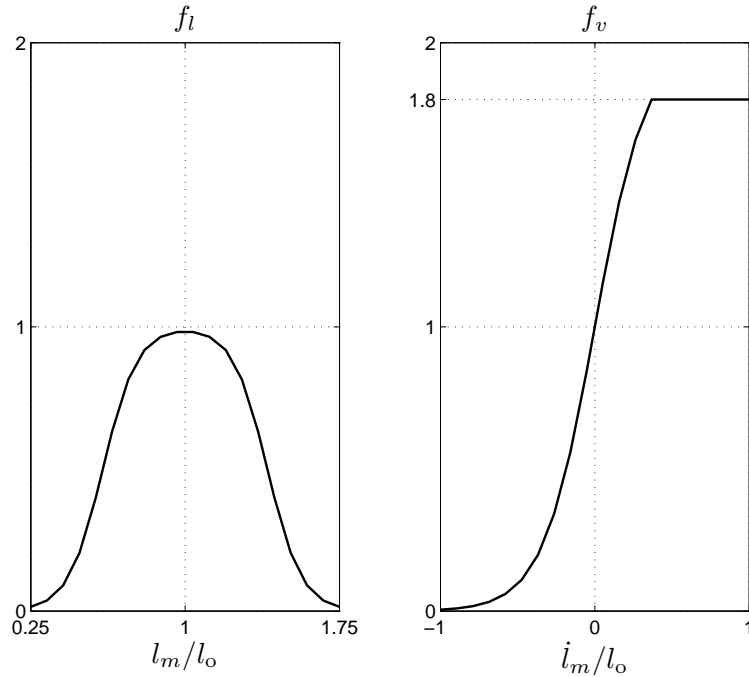


Figura 3. f_l es la función fuerza-longitud (4) y f_v es la función fuerza-velocidad (5).

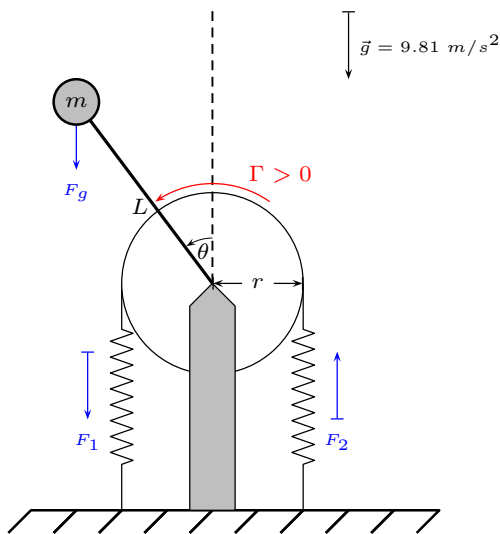


Figura 4. Accionamiento antagonista de un sistema mecánico.

mecánico para hacer que el péndulo se mueva. Si el valor de Δ_f es cero, dicha energía es igual a la energía producida por los actuadores. De lo contrario, solo una parte de la energía generada por los actuadores se transfiere al sistema mecánico.

Destacamos que si $\Gamma \equiv \Gamma^d$, la energía E_g depende

solo del movimiento deseado y de los parámetros musculoesqueléticos : k_α , k_β et \tilde{q} . Una vez definido el movimiento de referencia, la recuperación de energía solo es posible gracias a los elementos elásticos presentes en el actuador.

4 Materiales y métodos

El actuador tipo rotoide más utilizado en la robótica es el servomotor, [13]. Por esta razón en el diseño mecánico del prototipo propuesto tiene una forma geométrica similar al servomotor convencional. La figura 5 ilustra la parte interior del prototipo, se colocaron resortes para la recuperación de la energía elástica almacenada en el actuador, tal como se observa en la figura 4. Las características más importantes de un servomotor comercial *POWER HD* se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. Características del Servomotor

Especificación	Unidad
Peso	43 g
Dimensión	54 × 40 × 20 mm
Torque	3.5 kg-cm
Giro	±90°
Señal de Control	PWM

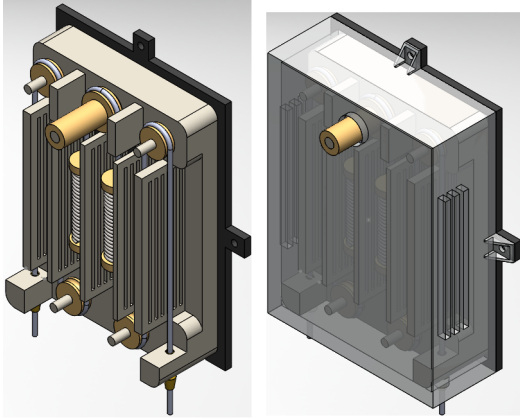


Figura 5. Modelo CAD, prototipo de la articulación tipo rotoide, parte interna y externa.

4.1 Diseño conceptual del actuador

Para el diseño conceptual del prototipo se tuvieron en cuenta los siguientes requerimientos:

- Forma geométrica similar a la de un servomotor comercial.
- Rango de giro $\pm 20^\circ$
- Recuperación de la energía mecánica.
- Músculos artificiales SMA.
- Control electrónico para la activación de los músculos SMA.

Teniendo en cuenta los requerimientos anteriores, se diseñó en SolidEdge el modelo CAD presentado en la figura 5, en el cual se mantiene la forma geométrica de un servomotor comercial. En el diseño mecánico se colocaron dos resortes en su parte interna, emulando la recuperación de la energía mecánica similar al modelo matemático del músculo-tendón presentado en la sección 2. Los alambres tienen las propiedades del Nitinol (NiTi), un material SMA, que permite tener un comportamiento dinámico de activación y contracción, el control electrónico se puede hacer mediante activación térmica y/o eléctrica. El modelo CAD se importa a MATLAB y gracias al uso del toolbox Simscape Multibody™ es posible calcular el torque máximo y el rango de movimiento del actuador tipo rotoide propuesto.

5 Resultados y discusión

Simscape Multibody™ permite integrar sistemas de control al modelo CAD obtenido en Solid Edge; para una referencia de $\theta_d = 11.5^\circ$ en la posición angular del eje, el actuador alcanza la posición deseada en un intervalo de $11.5 \pm 0.5^\circ$ a los 3 segundos como se puede observar en la figura 6.

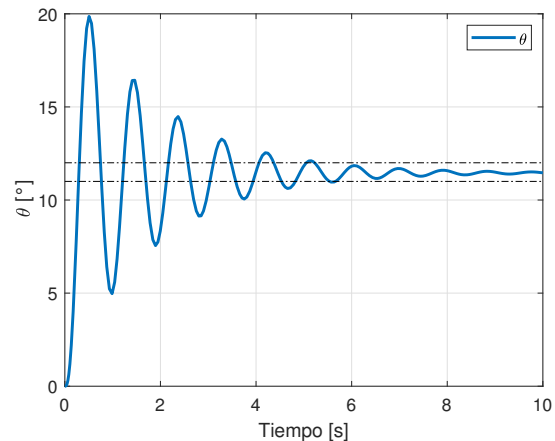


Figura 6. Variación temporal de la posición angular, para un $\theta_d = 11.5^\circ$.

El actuador diseñado tiene una respuesta dinámica subamortiguada, típica de los servomecanismos, [14], la evolución de la velocidad angular se muestra en la figura 7, cuando es cercana a cero el actuador llega a la posición angular θ_d deseada, se valida que el actuador la alcanza en 3 segundos para el intervalo de $11.5 \pm 0.5^\circ$. A partir de los resultados de la

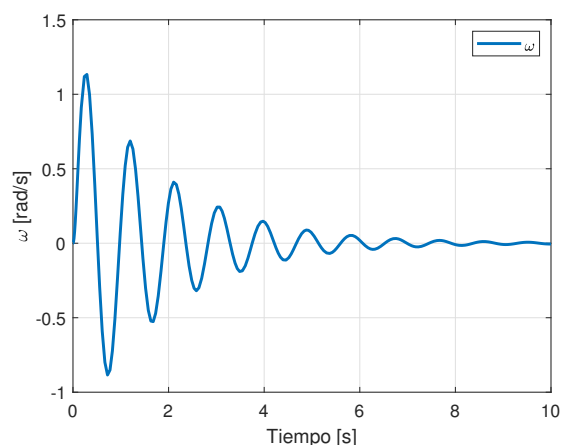


Figura 7. Velocidad angular del eje de rotación.

simulación es posible obtener el torque máximo ejercido sobre el eje de rotación del actuador, de la figura 8 el torque máximo ejercido es de $0.06\text{kg} -$

$cm \approx 6kg - m$, este valor es 1.7 veces el valor del torque de un servomotor comercial (ver Tabla 2). La principal desventaja frente a un servomotor

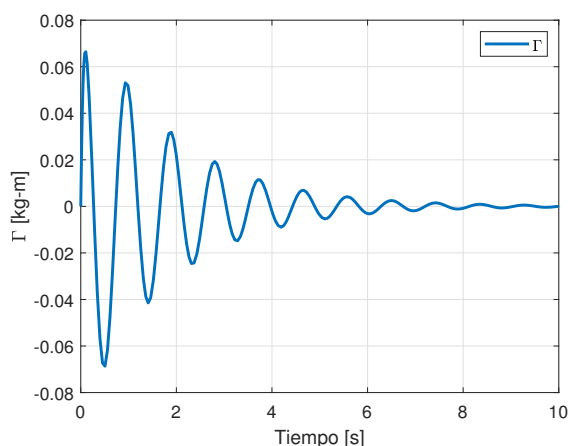


Figura 8. Torque [kg-m] alcanzado producido por el eje de rotación.

comercial es el rango del ángulo de giro, debido principalmente a la limitada dilatación del Nitinol (NiTi) ($< 8.5\%$) de la longitud total, [5]. Sin embargo, la mayoría los movimientos articulares de un ser humano están alrededor de este valor $\pm 20^\circ$, [15]. Las características del prototipo propuesto se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3. Características del prototipo

Especificación	Unidad
Peso	43 g
Dimensión	$54 \times 40 \times 20$ mm
Torque	6.0 kg-cm
Giro	$\pm 20^\circ$
Señal de Control	Análoga

La aplicación esperada de este prototipo esta para el uso de pequeñas cargas que emulen el movimiento del ser humano, al ser bioinspirado y accionado por músculos artificiales, sus potenciales aplicaciones serán en robótica médica y humanoide.

6 Conclusiones

En este trabajo se presenta el modelo matemático de un músculo-tendón, usado para el diseño conceptual de un actuador tipo rotoide accionado por músculos artificiales. El análisis de recuperación de energía solo es posible en el caso de actuadores con elementos elásticos como el propuesto en este trabajo, a diferencia de un servomotor convencional

donde la energía total es disipada por el servo en forma de calor. Los parámetros obtenidos del modelo permitieron diseñar un actuador bioinspirado y los resultados de simulación permiten validar su construcción mediante prototipo rápido usando impresión 3D.

Como trabajo futuro construiremos el actuador usando el Nitinol (NiTi) y un sistema de control electrónico para controlar su deformación, también se espera comparar los datos del prototipo virtual y su funcionamiento real.

Referencias

- [1] H. Liu, Q. Cheng, J. Xiao, and L. Hao, "Data-driven adaptive integral terminal sliding mode control for uncertain sma actuators with input saturation and prescribed performance", *ISA Transactions*, 2021.
- [2] F. Jin, C. Zhao, P. Xu, J. Xue, and F. Xia, "Nonlinear eccentric bending and buckling of laminated cantilever beams actuated by embedded pre-stretched sma wires", *Composite Structures*, 2022.
- [3] W. Liang, H. Liu, K. Wang, Z. Qian, L. Ren, and L. Ren, "Comparative study of robotic artificial actuators and biological muscle", *Advances in Mechanical Engineering*, 2020.
- [4] J. Zhang, J. Sheng, C. T. O'Neill, C. J. Walsh, R. J. Wood, J.-H. Ryu, J. P. Desai, and M. C. Yip, "Robotic artificial muscles: Current progress and future perspectives", *Ieee Transactions on Robotics*, vol. 35, 2019.
- [5] S. M. Mirvakili and I. W. Hunter, "Artificial muscles: Mechanisms, applications, and challenges", *Advanced Materials*, 2017.
- [6] N. Simiriotis, M. Fragiadakis, J. Rouchon, and M. Braza, "Shape control and design of aeronautical configurations using shapememory alloy actuators", *Computers and Structures*, 2021.

- [7] A. J. Theodore and P. L. Bishay, "Experimental analysis of fiber-reinforced laminated composite plates with embedded sma wire actuators", *Composite Structures*, 2022.
- [8] N. A. Mansour, T. Jangc, H. Baekc, B. Shinb, B. Ryub, and Y. Kimb, "Compliant closed-chain rolling robot using modular unidirectional sma actuators", *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020.
- [9] C. Rengifo and D. Bravo, "A control strategy for bipedal robots with musculotendon actuators in the knees", *Int J Dyn Control*, Sept. 2022.
- [10] K. B. Shelburne, M. R. Torry, and M. G. Pandy, "Muscle, ligament, and joint-contact forces at the knee during walking", *Medicine and science in sports and exercise*, vol. 37, pp. 1948-1956, November 2005.
- [11] J. M. Winters and L. Stark, "Analysis of fundamental human movement patterns through the use of in-depth antagonistic muscle models", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. BME-32, no. 10, pp. 826-839, 1985.
- [12] C. F. Rengifo, Y. Aoustin, F. Plestan, and C. Chevallereau, "Distribution of forces between synergistics and antagonistics muscles using an optimization criterion depending on muscle contraction behaviour", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 132, no. 4, pp. 1-11, 2010.
- [13] J. Song, N. Xi, F. Xu, K. Jia, and F. Zou, "Servomotor modelling and control for safe robots", in *2015 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pp. 1221-1226, 2015.
- [14] R. Ambrose and R. Askew, "An experimental investigation of actuators for space robots", in *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 2625-2630, 1995.
- [15] D. Meng, T. Shoepe, and G. Vejarano, "Accuracy improvement on the measurement of human-joint angles", *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 20, no. 2, pp. 498-507, 2016.