

# Bifurcaciones horquilla y Hopf en un sistema de Lorenz extendido

## Pitchfork and Hopf Bifurcations in an Extended Lorenz System

Héctor Andrés Granada Díaz<sup>1</sup>, Luis Eduardo Olivar Robayo<sup>1</sup> y Simeón Casanova Trujillo<sup>2</sup>

### Resumen

Se presenta una clasificación analítica en un espacio tridimensional de parámetros para describir la dinámica para un sistema de Lorenz extendido del tipo Li-Ou, se dan condiciones para encontrar bifurcaciones de Hopf supercríticas y degeneradas y, una bifurcación horquilla. Finalmente, los resultados teóricos son comparados con simulaciones numéricas y diagramas de bifurcación.

**Palabras clave:** bifurcaciones, caos, sistemas tipo Lorenz.

### Abstract

An analytical classification in a three-dimensional parameter space is presented to describe the dynamics for an extended Lorenz system of the Li-Ou type, conditions are given to find supercritical and degenerate Hopf bifurcations and a pitchfork bifurcation. Finally, the theoretical results are compared with numerical simulations and bifurcation diagrams.

**Keywords:** bifurcations, chaos, Lorenz-type systems.

**Recepción:** 15-nov-2022

**Aceptación:** 16-mar-2023

---

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Tolima, Colombia

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Caldas, Colombia.

Correo electrónico: hgranadad@ut.edu.co

## 1 Introducción

Las ecuaciones de Lorenz con algunas variaciones pueden ser aplicadas para analizar algunos fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo, algunos modelos sobre climatología [3, 4], teoría semiclásica de amplificación y emisión de laser aplicando el modelo Lorenz-Haken [5, 7, 8, 9], generadores eléctricos [10], señales electrocardiográficas [11], entre otros. Dada su importancia, se resalta el interés en la identificación y caracterización de atractores de familias tipo Lorenz [12] o análisis sobre la dinámica de sistemas tipo Lorenz [1]. En [17] se analiza la bifurcación de Hopf del sistema introducido por Xianyi Li y Qianjun Ou [18], donde se muestran condiciones de una región de parámetros del sistema donde la bifurcación de Hopf es no degenerada y supercrítica para el caso en que  $a = b$ . En este artículo, mostraremos una clasificación analítica de la dinámica del sistema en el espacio tridimensional de parámetros  $abd$  donde se encuentran bifurcaciones de Hopf supercríticas, Hopf degeneradas y una bifurcación horquilla. Por lo tanto, la estructura del artículo se conforma en dos teoremas, uno para demostrar la bifurcación horquilla, y el segundo para demostrar la bifurcación de Hopf en el cual se emplea el teorema de la variedad central para obtener una expresión en términos de los parámetros  $a$  y  $b$  y de esta forma calcular el primer coeficiente de Lyapunov con el fin de caracterizar la estabilidad de los ciclos límites. Finalmente, los resultados teóricos son comparados con simulaciones numéricas y con diagramas de bifurcaciones. Algunos modelos presentados en [3, 4, 11, 5] se pueden representar por la familia tipo Lorenz de la ecuación (1) para ciertos valores de los parámetros.

## 2 Materiales y métodos

Se pueden enlistar los diferentes materiales usados en el proyecto y los métodos con los cuales se desarrolló. Si no aplica, se puede omitir esta sección.

## 3 Sistema Li-Ou y puntos de equilibrio

Considerando el sistema dinámico autónomo continuo de (2) formulado en [18] y que puede ser representado por el campo vectorial dado en (1), donde  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de variables de estado

y  $\rho = (a, b, g, d) \in [0, \infty)^2 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} = \Omega$  el vector de parámetros.

$$F : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \rho, X) \longmapsto F(t, \rho, X) = \dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= dy - xz \\ \dot{z} &= gx - bz \end{aligned} \quad (2)$$

El sistema (2) tiene solución única ya que el campo vectorial  $F$  es continuo, pues las derivadas parciales existen y son continuas en  $\Omega \times \mathbb{R}^3$ , la matriz jacobiana del campo  $F$  está dada por la ecuación (3)

$$DF = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -z & d & -x \\ gy & gx & -b \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Dependiendo del valor del parámetro  $d \in \mathbb{R}$  se ve afectado el comportamiento del sistema de Li-Ou. Por ejemplo, para  $d \leq 0$ , el sistema (2) tendrá sólo el punto  $P_0 = (0, 0, 0)$  como equilibrio. Ahora si  $d > 0$ , tendrá tres puntos de equilibrio, el punto  $P_0$  y los puntos  $P_{1,2}$  dados en la ecuación (4) para  $(a, b, g, d) \in [0, \infty)^2 \times (0, \infty)^2$ .

$$P_{1,2} = \left( \pm \sqrt{\frac{bd}{g}}, \pm \sqrt{\frac{bd}{g}}, d \right) \quad (4)$$

### 3.1 Invarianza del comportamiento cualitativo del sistema mediante la variación del parámetro $g > 0$

Al introducir la transformación  $(x, y, z) \rightarrow \left( \frac{x}{\sqrt{g}}, \frac{y}{\sqrt{g}}, Z \right)$ , el sistema (2) es topológicamente equivalente a un sistema que no depende del parámetro  $g$ :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a(Y - Z) \\ \dot{Y} &= dY - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (5)$$

por este motivo, en las pruebas numéricas de la sección 5.1 se toma  $g = 1$ .

### 3.2 Análisis de estabilidad en el punto de equilibrio $P_0$

#### 3.2.1 Caso $a, b = 0$

Si  $a = 0$ , el sistema de la ecuación (2) obliga a que  $x = x_0$  sea constante. Luego la estabilidad del sistema se discute a través del sistema lineal planar dado en la ecuación (6), el cual tendrá un subespacio de equilibrio si  $bd - gx_0^2 = 0$ . En caso contrario, se obtiene el punto de equilibrio  $(x_0, 0, 0)$  que será estable si  $d \leq 0$  e inestable para  $d > 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= dy - x_0z \\ \dot{z} &= gx_0y - bz \end{aligned} \quad (6)$$

Si  $b = 0$ , el sistema de la ecuación (2) queda como se muestra en la ecuación (7) y admite un subespacio de equilibrios  $(0, 0, z)$  que coexiste con el punto de equilibrio  $P_0$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= dy - xz \\ \dot{z} &= gxy \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.3 Bifurcación Tridente u Horquilla en el origen

Sea  $(a, b, g, d) \in (0, \infty)^3 \times \mathbb{R}$ . Dependiendo de la variación del parámetro  $d \in \mathbb{R}$ , se ve afectado el comportamiento del sistema, ya que para  $d \leq 0$ , se tendrá sólo el punto de equilibrio estable  $P_0$ , ya que al evaluar en la matriz jacobiana de la ecuación (3) en el punto  $P_0$  se obtiene una matriz triangular superior  $DF(P_0)$ , con valores propios  $\{-a, d, -b\}$  lo que garantiza que el punto de equilibrio es estable para  $d < 0$  e inestable si  $d > 0$ , caso en el cual coexiste con los puntos de equilibrio  $P_{1,2}$ . Es de notar que cuando  $d = 0$ , los puntos de equilibrio  $P_{1,2}$  y  $P_0$  colisionan ocasionando cambio de estabilidad en el punto  $P_0$ , generando una bifurcación horquilla. La demostración de esta bifurcación se realizará de forma análoga como se hizo en [6].

**Teorema 1.** Sean  $(a, b, g) \in (0, \infty)^3$  fijo,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $P_0$  el origen de coordenadas,  $d^* = 0$  y el sistema  $\dot{X} = F(X, d)$  conformado por las ecuaciones (1) y (2). Entonces el sistema experimenta una bifurcación horquilla en el punto  $P_0$  cuando el parámetro  $d$  varía a través del valor de bifurcación  $d^*$ . Además, si  $d = d^*$ , existe una cuenca de atracción para el punto  $P_0$ .

*Demostración.* Es evidente que para  $d = d^* = 0$ , se tiene que  $F(P_0, d^*) = 0$ ,  $\sigma(DF(P_0)) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} \neq 0\}$ . Además, para  $0 \in \sigma(DF(P_0))$  se obtienen los vectores propios a derecha  $v_0$  e izquierda  $w_0$  dados en la ecuación (8).

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Luego,

$$w_0^T F_d(P_0, d^*) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{P_0, d^*} = 0 \quad (9)$$

y

$$\begin{aligned} (w_0^T D^2 F(P_0, d^*)) (v_0, v_0) &= v_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Además,

$$\begin{aligned} v_0^T (w_0^T F_{Xd}(P_0, d^*))^T &= v_0^T \left( w_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= g (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

El teorema de Sotomayor [15] da condiciones suficientes más no necesarias para garantizar la bifurcación tridente u horquilla en este caso, ya que no se puede garantizar que  $(w_0^T D^3 F(P_0, d^*)) (v_0, v_0, v_0) \neq 0$ . Esto se debe a que

$$D^2 F(P_0, d) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & & \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

no depende del parámetro  $d$  y así  $D^3F = (0)_{3^3 \times 3}$  y por tanto  $(w_0^T D^3F(P_0, d^*)) (v_0, v_0, v_0) = 0$ .

Ahora, para  $d \neq -a$  y  $d \neq -b$ , la matriz  $DF(P_0)$  tiene como vectores propios  $v_1 = (a; a + d; 0)$ ,  $v_2 = (1; 0; 0)$  y  $v_3 = (0; 0; 1)$  asociados respectivamente a los valores propios  $\lambda = d$ ,  $\lambda = -a$  y  $\lambda = -b$ . De esta forma, para el caso en que  $d = 0$ , una base para el espacio vectorial tangente a la variedad estable esta dado en la ecuación (13)

$$E^s = \{v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

y el espacio vectorial tangente a la variedad central viene dado por la ecuación (14)

$$E^c = \{v_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (14)$$

de donde  $DF(P_0)$  puede ser representada por la ecuación (15)

$$DF(P_0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} = PDP^{-1}, \quad (15)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al introducir el cambio de variable  $X = PW$  para rotar los espacios  $E^s$  y  $E^c$  tenemos la ecuación (16)

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PW \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

De esta forma,  $W = P^{-1}X$  y al derivar respecto del tiempo, y al reemplazar las ecuaciones dadas en

(2) se tiene el siguiente sistema de la ecuación (17)

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\dot{X} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} - \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -xz \\ a(y-x) + xz \\ gxy - bz \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Al reemplazar las variables del vector  $X$  en términos de  $W$  de la ecuación (16) en (17), tenemos el sistema de la ecuación (18).

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -xy = 0w_1 - (w_1 + w_2)w_3 \\ \dot{w}_2 &= a(y-x) + xz = -aw_2 + (w_1 + w_2)w_3 \\ \dot{w}_3 &= gxy - bz = -bw_3 + g(w_1 + w_2)w_3. \end{aligned} \quad (18)$$

De esta forma, al definir

$$\left. \begin{aligned} f(w_1, w_2, w_3) &= -(w_1 + w_2)w_3, \\ G(w_1, w_2, w_3) &= \begin{pmatrix} -f(w_1, w_2, w_3) \\ -gf(w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix}, \\ w_2 &= h_1(w_1) = a_1w_1^2 + a_2w_1^3 + \dots \\ w_3 &= h_2(w_1) = b_1w_1^2 + b_2w_1^3 + \dots \\ A &= 0, \quad B = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

y al reemplazar las expresiones de (19) en la ecuación homológica (20) y al simplificar y considerar sólo los términos de orden 3, se obtiene el sistema de la ecuación (21).

$$\begin{aligned} Dh(w_1) [Aw_1 + f(w_1, h_1(w_1), h_2(w_1))] \\ - Bh(w_1) - G(w_1, h_1(w_1), h_2(w_1)) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} aa_1w_1^2 + aa_2w_1^3 + b_1w_1^3 + O(|w_1|^4) \\ bb_1w_1^2 + bb_2w_1^3 + gb_1w_1^3 + O(|w_1|^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Al resolver el sistema (21), se obtiene como solución  $a_1 = b/(ag)$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 0$ . De esta

forma, se procede a definir la variedad central por la ecuación (42).

$$W_{loc}^c(0) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \right) : \begin{array}{l} w_2 = h_1(w_1) = \frac{b}{ag} w_1^2, \\ w_3 = h_2(w_1) = w_1^3 \\ |w_1| < \delta \end{array} \end{array} \right\} \quad (22)$$

que verifica para  $\delta > 0$  que  $h_1(0) = h_2(0) = 0$  y  $Dh_1(0) = Dh_2(0) = 0$  y el comportamiento de las soluciones sobre  $W_{loc}^c(0)$  del sistema de las ecuaciones relacionadas en (18) está determinado por la solución de la ecuación diferencial sobre  $E^c$ :

$$\begin{aligned} \phi(w_1) = \dot{w}_1 &= -(w_1 + w_2)w_3 \\ &= -\left(w_1 + \frac{b}{ag} w_1^2\right) w_1^3 \\ &= -\frac{w_1^4}{ag} (ag + bw_1) \end{aligned} \quad (23)$$

y cuyo comportamiento se ve reflejado en la Figura 1, la cual representa que dada una condición inicial  $w_1 \geq 0$ , la solución de la ecuación converge a  $P_0$ , pero si  $w_1 < 0$ , la solución converge a  $-(ag)/b$  y cuya dinámica respecto de las variables de estado se concluye de la ecuación (24).

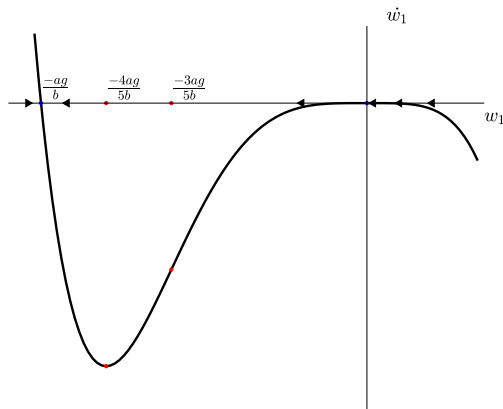


Figura 1.  $\dot{w}_1 = -\frac{w_1^4}{ag} (ag + bw_1)$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 + \frac{b}{ag} w_1 \\ 1 \\ w_1^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

■

#### 4 Análisis de estabilidad para el punto $P_1$

La matriz Jacobiana en el punto de equilibrio  $P_1 = \left(\sqrt{\frac{bd}{g}}, \sqrt{\frac{bd}{g}}, d\right)$  viene dada por la ecuación (25) y el respectivo polinomio característico en la ecuación (26).

$$DF(P_1) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -d & d & -\sqrt{\frac{bd}{g}} \\ \sqrt{bdg} & \sqrt{bdg} & -b \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - d)\lambda^2 + ab\lambda + 2abd. \quad (26)$$

Al tener en cuenta los coeficientes del polinomio y al aplicar el teorema de Routh-Hurwitz [16], se obtiene la relación dada en (27), que indica los valores de los parámetros para los cuales el punto de equilibrio  $P_1$  será inestable.

$$\phi = \frac{ab(a + b - 3d)}{a + b - d} < 0 \quad (27)$$

De esta forma, la clasificación de la estabilidad del punto de equilibrio  $P_1$  se establece como:

1. Estable:  $\{(a, b, d) : d < \frac{a+b}{3}\}$ .
2. Inestable:  $\{(a, b, d) : d \geq \frac{a+b}{3}\}$ .

#### 5 Bifurcación de Hopf en el sistema Li-Ou

**Teorema 2.** Sean  $(a, b, g, d) \in (0, \infty)^4$ . El sistema  $\dot{X} = F(X, d)$  conformado por las ecuaciones (1) y (2) admite una configuración de parámetros invariante para  $g$ , donde se garantiza la existencia de la bifurcación de Hopf supercrítica en el punto de equilibrio  $P_1 = \left(\sqrt{\frac{b(a+d)}{3g}}, \sqrt{\frac{b(a+d)}{3g}}, \frac{a+b}{3}\right)$  cuando  $d^* = \frac{a+b}{3}$ .

*Demostración.* Suponemos que  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega_0$  es un cero del polinomio característico de la ecuación (26) con  $\omega_0 > 0$ . Al reemplazar  $\lambda = i\omega_0$  en (26) y al igualar las partes complejas tenemos:

$$\omega^2 = ab \quad (28)$$

y al igualar las partes reales tenemos:

$$(a + b - d)\omega^2 = 2abd \quad (29)$$

Dado que  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $d > 0$  se debe tener que  $0 < d < a + b$ . por tanto, la superficie paramétrica donde se puede alcanzar la bifurcación de Hopf se obtiene al reemplazar la ecuación (28) en (29), obteniendo el parámetro de bifurcación dado por la ecuación (30).

$$d^* = \frac{a + b}{3} \tag{30}$$

El Punto de equilibrio para el valor  $d = d^*$  viene dado por  $P_1^* = \left( \sqrt{\frac{b(a+b)}{3g}}, \sqrt{\frac{b(a+b)}{3g}}, \frac{a+b}{3} \right)$  y los valores propios de la matriz jacobiana en el punto  $P_1^*$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\omega_0 = \sqrt{abi} \\ \lambda_2 &= -i\omega_0 = -\sqrt{abi} \\ \lambda_3 &= -\frac{2(a+b)}{3}. \end{aligned} \tag{31}$$

Al emplear el teorema de la función implícita en (26) tenemos que  $\Re(\lambda)$  es una función creciente para cierta vecindad de  $d^* = \frac{a+b}{3}$ , cumpliendo así la condición de transversalidad de la ecuación (32).

$$\begin{aligned} \Re \left( \left. \frac{\partial \lambda}{\partial d} \right|_{\substack{d = \frac{a+b}{3} \\ \lambda = \sqrt{abi}}} \right) &= \Re \left( \frac{27ab + 18\sqrt{ab}(a+b)i}{18ab + 8(a+b)^2} \right) \\ &= \frac{27ab}{18ab + 8(a+b)^2} > 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Traduciendo el punto  $P_1^*$  al origen mediante la transformación  $X = P_1^* + Y$ , se obtiene la ecuación (33) y haciendo  $A = DF(P_1^*)$  que se obtiene al sustituir  $P_1^*$  en la ecuación (25), se obtiene la ecuación (34), que permite descomponer  $\dot{X} = F(X)$  como la suma de la parte lineal  $A(X - P_1^*)$  con la parte no lineal  $N_x = F(X) - A(X - P_1^*)$ .

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{b(a+b)}{3g}} + y_1 \\ y &= \sqrt{\frac{b(a+b)}{3g}} + y_2 \\ z &= \frac{a+b}{3} + y_3. \end{aligned} \tag{33}$$

Dado que  $X = P_1^* + Y$ , se obtiene la ecuación (34). En donde  $N_y$  representa la parte no lineal y viene dada por la ecuación (35).

$$\dot{X} = F(X) = F(P_1 + Y) = AY + N_y = \dot{Y}. \tag{34}$$

$$N_y = F(P_1 + Y) - AY = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ g y_1 y_2 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Al solucionar el sistema  $Aq = (\sqrt{ab})iq$ , se obtiene el vector propio complejo  $q$  de la ecuación (36).

$$\begin{aligned} q &= q_r + iq_i \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3a\sqrt{3b(a+b)}}{\sqrt{g(4a^2+5ab+b^2)}} \\ \frac{\sqrt{3b(a+b)}}{\sqrt{g(4a+b)}} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{(2a-b)\sqrt{3a(a+b)}}{\sqrt{g(4a^2+5ab+b^2)}} \\ \frac{2\sqrt{3a(a+b)}}{\sqrt{g(4a+b)}} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{36}$$

y dado que  $\lambda_3$  de la ecuación (31) es un valor propio de  $A$ , al resolver el sistema  $Av = -\frac{2(a+b)}{3}v$ , se obtiene el vector propio real  $v$  asociado a  $\lambda_3$  dado en la ecuación (37).

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{bg(a+b)}} \\ \frac{2b-a}{2\sqrt{3bg(a+b)}} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Ahora, considerando la matriz de cambio de base de la ecuación (38), se transforma el sistema (34) en (39).

$$P = [ q_i \quad q_r \quad v ] \tag{38}$$

$$\dot{Y} = PJP^{-1}Y + N_y. \tag{39}$$

Donde  $J$  es la matriz de Jordan real dada por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{ab} & 0 \\ \sqrt{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2(a+b)}{3} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Haciendo el cambio de variable  $Y = PZ$ , con  $Z = [z_1 \ z_2 \ \mu]^T$  y al sustituir en la ecuación (35), obtenemos que el sistema (39) se puede escribir como en la ecuación (41).

$$\dot{Z} = JZ + P^{-1}N_y = JZ + N_z. \tag{41}$$

Como consecuencia de la **variedad central**, existe  $\delta > 0$  y una función  $H$  en una vecindad del origen  $B_\delta(0)$ , que define la variedad central local de la ecuación (42),

$$W^c(0) = \{(z_1, z_2, \mu) : \mu = H(z_1, z_2), \|(z_1, z_2)\| < \delta\}. \tag{42}$$

De esta manera, se propone  $H$  como en la ecuación (43):

$$\mu = H(z_1, z_2) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2, \quad (43)$$

donde los coeficientes  $a_i$  para  $i = 1, 2, 3$  se pueden determinar bajo el siguiente procedimiento:

I al derivar  $\mu$  de (43), se obtiene:

$$\dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial H}{\partial z_2} \dot{z}_2 \quad (44)$$

donde  $\dot{z}_1$  y  $\dot{z}_2$  estan definidas por (41) y en las cuales se debe sustituir  $\mu$  por  $H$  dado en (43).

II Debido a que la tercera componente de  $\dot{Z}$  es  $\dot{\mu}$ , se reemplaza en esta componente  $\mu$  por  $H$ .

III Igualando polinómicamente (I) con (II) y despreciando los términos de orden superior, en este caso, los que satisfacen  $z_1^i z_2^j$  tales que  $i + j \geq 3$ , se obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuyas variables son los  $a_i$  que dependen de los parámetros  $a$  y  $b$ . Es decir, sólo se tendrá en cuenta para la igualdad, los coeficientes independientes y los que acompañan a las variables de la forma  $z_1, z_2, z_1^2$  y  $z_2^2$ .

Al realizar el procedimiento antes mencionado, los valores de los coeficientes  $a_i$  vienen dados en la ecuación (45),

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{81a^2b(2a-b)^3}{2(a+b)} \Psi \\ a_2 &= -\frac{9\sqrt{ab}(2a-b)(8a^3-60a^2b-45ab^2-4b^3)}{a+4b} \Psi \\ a_3 &= -\frac{27ab(32a^4+38a^3b-132a^2b^2-61ab^3-4b^4)}{2(a+b)} \Psi. \end{aligned} \quad (45)$$

Donde  $\Psi$  está definida por:

$$\Psi = \frac{1}{(4a+b)^3(a+4b)(a^2+11ab+b^2)}. \quad (46)$$

De esta forma, el **Flujo en la variedad central** viene definido por el sistema planar de la ecuación (47):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sqrt{ab}z_2 + N_1(z_1, z_2), \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{ab}z_1 + N_2(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (47)$$

y las partes no lineales  $N_k$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= -6a(8z_2(a+b)^2 + 9z_1\sqrt{ab^3})\Omega, \\ N_2 &= 3\sqrt{a}(\theta_1 + \theta_2)\Omega. \end{aligned} \quad (48)$$

Donde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2z_1(4\sqrt{a^5} - 2\sqrt{ab^2} + 11\sqrt{a^3b}), \\ \theta_2 &= z_2(20a^2\sqrt{b} - 4\sqrt{b^5} + 7a\sqrt{b^3}) \quad \text{y} \quad (49) \\ \Omega &= \frac{z_1(2a-b) + 3z_2\sqrt{ab}}{(a+4b)(4a+b)^3}. \end{aligned}$$

El primer coeficiente de Lyapunov dado en la ecuación (50) se calcula como en [19].

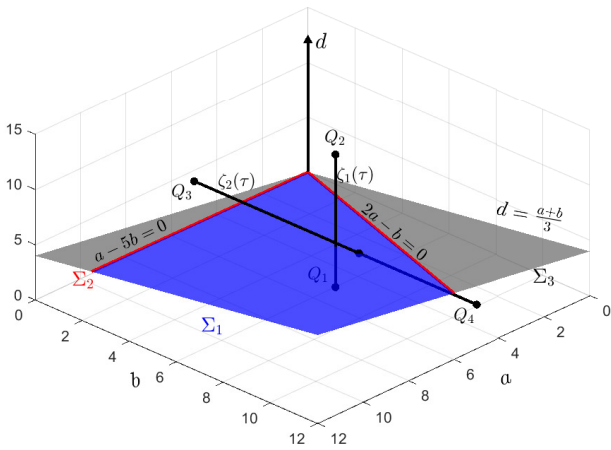
$$L_1 = \frac{243a^2b(a-5b)(2a-b)}{8(4a+b)^3(a+b)(a^2+11ab+b^2)}. \quad (50)$$

Por la relación dada en (32),  $\Re\left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)\Big|_{d=\frac{a+b}{3}, \lambda=\sqrt{abi}} > 0$  y la relación obtenida en (50) se puede clasificar la bifurcación de Hopf en función de los parámetros del espacio  $abd$  como sigue:

1.  $\Sigma_1 = \{(a, b, d) : \frac{b}{2} < a < 5b, b > 0, d = \frac{a+b}{3}\}$ , bifurcación de Hopf supercrítica con  $L_1 < 0$ , se generan ciclos límites estables.
2.  $\Sigma_2 = \{(5b, b, 2b) : b > 0\} \cup \{(a, 2a, a) : a > 0\}$ , bifurcación de Hopf degenerada con  $L_1 = 0$ .
3.  $\Sigma_3 = \{(a, b, d) : d = \frac{a+b}{3}, a < \frac{b}{2} \vee a > 5b\}$ , No se generan ciclos límites. ■

### 5.1 Prueba numérica de la Bifurcación de Hopf supercrítica

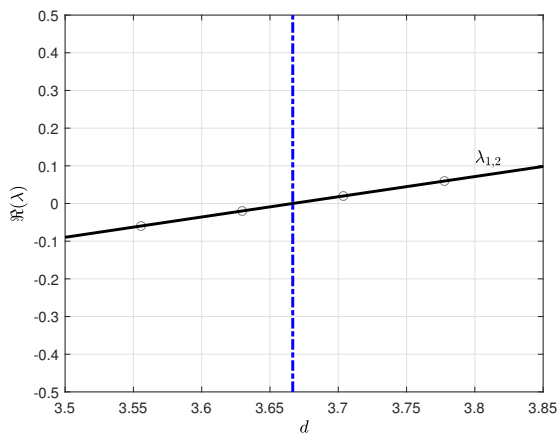
En el Teorema 2 se demostró la existencia de la bifurcación de Hopf, la cual es invariante respecto al parámetro  $g$ . Para mostrar la existencia de un ciclo límite estable bajo la variación del parámetro  $d \in [d^* - \varepsilon, d^* + 2\varepsilon]$  con  $\varepsilon = 0,1$ . Sean  $g = 1, (a, b, d^*) = (5, 6, 11/3) \in \Sigma_1$ . La condición de transversalidad dada en la ecuación (32) con  $\Re\left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)\Big|_{d=\frac{a+b}{3}, \lambda=\sqrt{abi}} = 0,537$ , se verifica en la Figura 3, la cual muestra la variación de la parte real de los valores propios  $\lambda_{1,2}$  a medida que  $P_1$  varia mediante lo hace  $d$ , donde la línea punteada de color



**Figura 2.** Clasificación de la dinámica según el primer coeficiente de Lyapunov y la estabilidad del punto  $P_1^*$ .

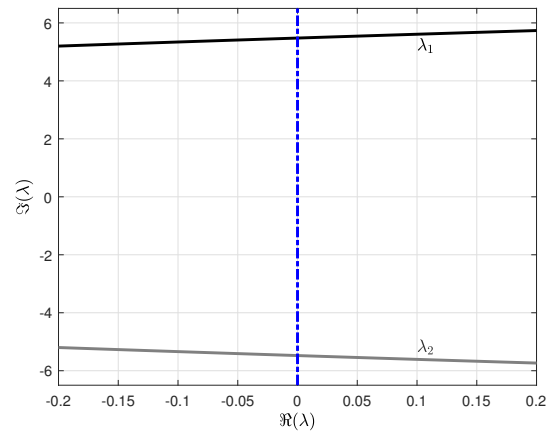
azul representa que  $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$  cuando  $d = d^*$ , para este valor del parámetro, la Figura 4 muestra que se obtienen dos valores puros conjugados.

La estabilidad del punto  $P_1$  mediante la variación del parámetro  $d$  se determina con la clasificación presentada en la sección 4 y es representada por la Figura 5, donde muestra que el punto  $P_1$  de color negro es estable cuando  $d < d^*$  y para  $d \geq d^*$  el punto de equilibrio representado de color azul es inestable. Esto sucede cuando la terna  $(a, b, d^*) \in \Sigma_1$  correspondiente a la región azul de la Figura 2.



**Figura 3.** Condición de transversalidad.

Las órbitas de la Figura 5 fueron obtenidas por el método de Runge kuta de orden 4 con paso constante  $\Delta t = 0,05$  y cuya condición inicial y tiempo de integración se especifica en cada caso. El plano gris de



**Figura 4.** Variación de la parte compleja de los valores propios  $\lambda_{1,2}$ .

ecuación  $d = d^* - \varepsilon/2$  contiene la órbita que converge al punto de equilibrio  $P_1$ , la cual se obtuvo dado el punto inicial de color azul  $x_0 = (6,556, 6,821, 6,289)$  y al integrar para  $t \in [0, 2000]$ . El plano azul de ecuación  $d = d^*$  muestra que a partir de este valor se originan los ciclos límites estables. Para ver dicho comportamiento, consideramos el plano  $d = 3,755 > d^*$ , el punto inicial como el punto de equilibrio  $P_1$  redondeado a tres cifras decimales y al integrar para  $t \in [0, 1000]$ , se observa que la órbita se aleja del punto de equilibrio acercándose al ciclo límite representado de color rojo sobre el mismo plano, el último valor de la integración es tomado como condición inicial y se integra para  $t \in [0, 5000]$  para generar la órbita de período  $T = 1,5155$  de color roja. Para comprobar la convergencia al ciclo límite, dada la condición inicial  $x_0 = (5,942, 8,144, 4,810)$  sobre el mismo plano  $d = 3,755$ , se integra para  $t \in [0, 2000]$  donde se muestra que la órbita converge al ciclo límite.

La Figura 6 muestra la dinámica sobre la variedad central cuando  $d = d^*$ , cuyas ecuaciones se relacionan en (47) y el ciclo límite de color rojo tiene período  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}} \approx 1,147$ . El primer coeficiente de Lyapunov  $L_1 = -0,0054$  se calcula con la ecuación (50) y de esta manera se justifica que el ciclo límite es estable y por tanto, se tiene la bifurcación de Hopf supercrítica.



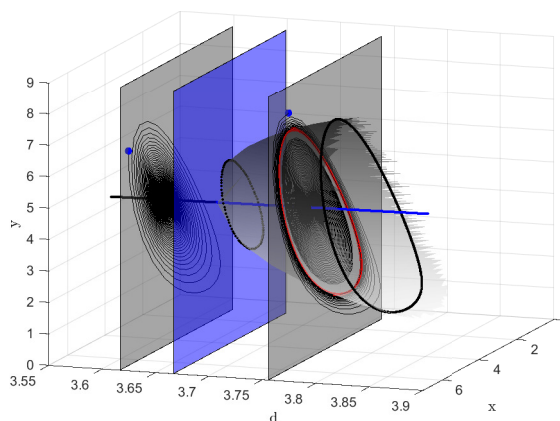


Figura 5. Bifurcación de Hopf.

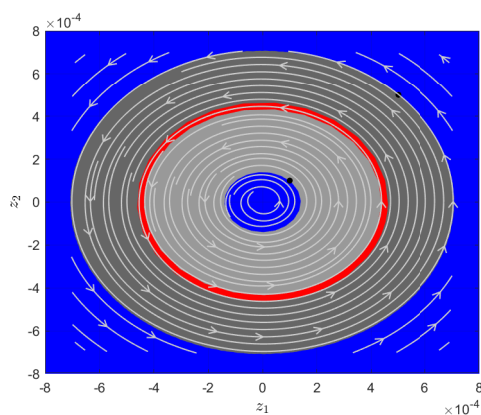


Figura 6. Dinámica sobre la variedad central con  $(a, b) = (5, 6) \in \Sigma_1$ .

### 5.2 Diagramas de bifurcaciones

Sean  $Q_1 = (5, 6, 0)$ ,  $Q_2 = (5, 3, 12)$ ,  $Q_3 = (5, 0, 4)$  y  $Q_4 = (5, 12, 4)$  y los segmentos  $\zeta_1(d) := \overline{Q_1 Q_2}$  para  $d \in [0, 12]$ , que intersecta a  $\Sigma_1$  en el punto  $(5, 6, 11/3)$  y, el segmento  $\zeta_2(b) := \overline{Q_3 Q_4}$  con  $b \in [0, 12]$  que intersecta a  $\Sigma_1$  en el punto  $(5, 7, 4)$ , como se puede apreciar en la Figura 2. De esta forma, para cada variación de los parámetros  $(a, b, d) \in \zeta_i$  se analizará el comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio  $P_1$  bajo un diagrama de bifurcaciones, que se obtiene bajo el siguiente procedimiento:

1. Vector de parámetros: Se generan 3000 valores de los parámetros  $(a, b, d)$  mediante la parametrización de  $\zeta_i$ .
2. Condición inicial: Para cada valor de los parámetros definidos por  $\zeta_i$ , se calcula el punto

de equilibrio  $P_1$  y se redondea con tres cifras decimales.

3. Integrador: Se integra el sistema con un Rungekuta de Orden 4 con la condición inicial del paso (2) e incremento  $\Delta t = 0,005$  para un intervalo de tiempo de  $[0, 5000]$ .
4. Punto de equilibrio  $P_1$ : si el punto es inestable se representa de color azul y de color negro si es estable.
5. Estado estacionario: Se toman los últimos 500 puntos de la evolución de la trayectoria asumiendo que ha alcanzado el estado estacionario y son intersectados con la sección de Poincaré [15] definida por los máximos locales de cada variable de estado.
6. Diagrama: Se grafican los parámetros respecto a los puntos sobre la sección de Poincaré.

La Figura 7 muestra el diagrama de bifurcaciones bajo la variación de  $d$ , donde indica que apartir del valor de  $d = d^*$  se originan ciclos límites estables hasta un valor cercano a  $d = 4$ , que es donde las órbitas empiezan a presentar mayor como se muestra en el zoom de la figura.

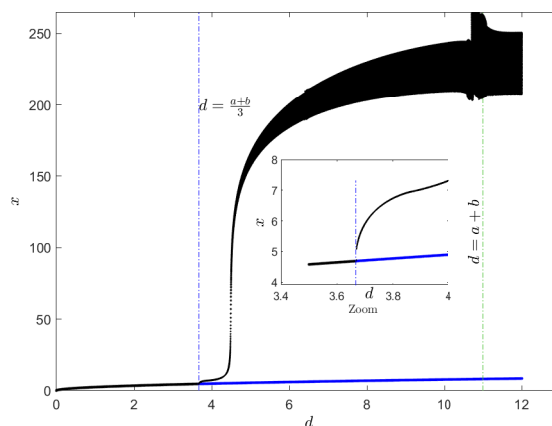


Figura 7.  $\overline{Q_1 Q_2}$ .

La Figura 8 muestra el diagrama de bifurcaciones bajo la variación de  $b \in [0, 0,67)$ , donde se representan órbitas de período alto y caos. Cuando  $b = 0,67$ , el coeficiente  $a_2$  de la variedad central de la ecuación (42) se anula y es representado con la línea punteada de color verde. El primer coeficiente de Lyapunov es positivo ( $L_1 > 0$ ) para  $b \in [0, 1)$ . Cuando  $b = 1$ ,

se tiene que  $L_1 = 0$  y para  $b \in (1, 7)$  se tiene que  $L_1 < 0$  y el punto de equilibrio es inestable como lo muestra el diagrama de bifurcaciones. En  $b = 7$ , el segmento  $\zeta_2$  intersecta el plano  $d = \frac{a+b}{3}$ , de esta forma para  $b > 7$  el segmento  $\zeta_2$  esta por debajo del plano  $d = \frac{a+b}{3}$  como se muestra en la Figura 2. Es decir,  $\frac{a+b}{3} > d$  y el punto de equilibrio es estable para estos valores.

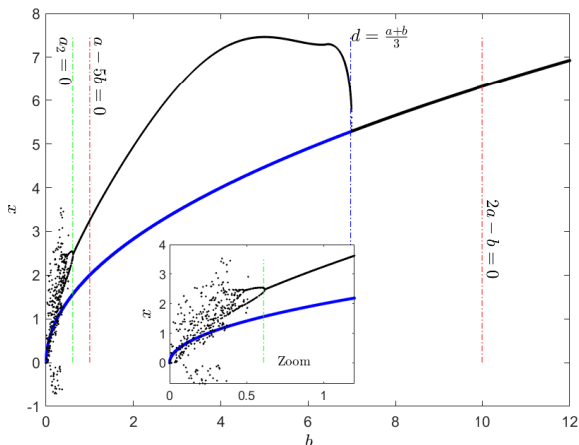


Figura 8.  $\overline{Q_3Q_4}$ .

## 6 Resumen

Se presenta una clasificación analítica de la dinámica del sistema de Li-Ou en el espacio tridimensional de parámetros  $abd$  donde se encuentran bifurcaciones de Hopf supercríticas, Hopf degeneradas y una bifurcación horquilla. Finalmente los resultados teóricos son comparados con simulaciones numéricas y con diagramas de bifurcaciones.

## 7 Conclusiones

Los resultados analíticos de la clasificación de la dinámica del sistema de Li-Ou en cuanto a la bifurcación de Hopf supercrítica fueron comparados con simulaciones numéricas que permitieron obtener ciclos límites estables.

En la sección 4 se clasificó la estabilidad del punto  $P_1$  y el teorema 2 divide al plano  $d = \frac{a+b}{3}$  en tres regiones  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_3$ . Por lo anterior, cuando la órbita atraviesa el conjunto  $\Sigma_1$  representado por la sección azul se alcanza la bifurcación de Hopf supercrítica y de esta forma se garantiza la existencia de ciclos

límites estables para ciertos valores del parámetro  $\frac{a+b}{3} \leq d \leq a+b$ .

## Agradecimientos

Los autores H. A. Granada D. y L. E. Olivar R. agradecen el apoyo de la Universidad del Tolima y del grupo de Matemáticas del Tolima Grupo- MaT, Ibagué y el autor S. Casanova T. agradece el apoyo del GTA Cálculo Científico y Modelamiento matemático de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

## Referencias

- [1] Li, You and Zhao, Ming and Geng, Fengjie, "Dynamical Analysis and Simulation of a New Lorenz-Like Chaotic System", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2021.
- [2] I. ElAgib, J. Csikai, J. Jordanova y L. OlaAh, "Leakage neutron spectra from spherical samples with a Pu-Be source", *Applied Radiation and Isotopes*, vol. 51, pp. 329-333, 1999.
- [3] J. D. Daron y D. A. Stainforth. "On quantifying the climate of the nonautonomous Lorenz-63 model", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, 2015.
- [4] A. Atencia y I. Zawadzki. "Analogues on the Lorenz Attractor and Ensemble Spread", *Monthly Weather Review*, vol. 145, 2017.
- [5] G. J. Valcárcel, E. Roldán y F. Prati. "Semi-classical theory of amplification and lasing", *Revista mexicana de física E, Sociedad Mexicana de Física*, vol. 52, 2006.
- [6] K. López, S. Casanova, C. D. Acosta y H. A. Granada. "Dynamical analysis of a continuous stirred-tank reactor with the formation of biofilms for wastewater treatment", *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-10, 2015.
- [7] G. J. Valcárcel, E. Roldán y R. Vilaseca. "Lorenz character of the Doppler-broadened far-infrared laser", *JOSA B, Optical Society of America*, vol. 12, 1991.

- [8] J. Ohtsubo. "Semiconductor lasers: stability, instability and chaos", *Springer*, 2012.
- [9] S. Ayadi y O. Haeberlé . "The Lorenz model for single-mode homogeneously broadened laser: analytical determination of the unpredictable zone", *Versita, Open Physics*, vol. 12, 2014.
- [10] I. S. Aranson, A. Pikovsky, N. F. Rulkov y L. S. Tsimring. "Advances in Dynamics, Patterns, Cognition: Challenges in Complexity", *Springer*, 2017.
- [11] E. Barbará, E. Alba, O. Rodríguez y others . "Modulación de señales electrocardiográficas mediante algoritmos caóticos", *Ingeniería e Investigación; Universidad Nacional de Colombia*, vol. 32, 2012.
- [12] I. Pan y S. Das. "Evolving chaos: Identifying new attractors of the generalised Lorenz family", *Applied Mathematical Modelling, Elsevier*, vol. 57, 2018.
- [13] T. Li y J. Yorke. "Period Three Implies Chaos", *American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 10, pp. 985-922. 1975
- [14] H. A. Granada. "Nonlinear dynamics of a demographic, economic and environmental complex system for sustainable development", *Ph.D dissertation. National University*. 2014.
- [15] L. Perko. "Differential Equations and Dynamical Systems", *2nd edition, Springer, USA*. 2001.
- [16] S. Norman. "Control Systems Engineering ", *4th Ed., John Wiley & Sons, Inc.* 2004.
- [17] P. E. Calderon y E. Muñoz. "Tratamiento analítico de la bifurcación De hopf en una extensión del sistema de lü ", *Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones*, vol. 25, no 1, pp. 29-40, 2018.
- [18] X. Li y Q. Ou. "Dynamical properties and simulation of a new Lorenz-like chaotic system", *Nonlinear Dynamical*, vol. 65, no. pp. 255-270, 2011.
- [19] Kuznetsov, Yuri A and Kuznetsov, Iu A and Kuznetsov., "Elements of applied bifurcation theory ", *Springer*. 1998.