

Artículo de revisión

Modelamiento matemático para la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque bajo los efectos del fuego, la lluvia y la competencia por el espacio

Mathematical modeling for the dynamics of savanna and forest ecosystems under the effects of fire, rain and competition for space

David Alejandro Muñoz ¹, Marlio Paredes Gutierrez ^{1,2,3} 

¹Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia

²School of Mathematical and Statistical Sciences, University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg, TX 78539, USA.

³Investigador Asociado, Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación, Universidad Francisco Gavidia, El Salvador.

Recepción: 12-ene-2024 **Aceptado:** 20-may-2024 **Publicado:** 23-jul-2024

Cómo citar: Paredes Gutierrez, M. (2024). Modelamiento matemático para la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque bajo los efectos del fuego, la lluvia y la competencia por el espacio. *Ciencia En Desarrollo*, 15(2). <https://doi.org/10.19053/uptc.01217488.v15.n2.2024.17086>

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las propiedades de las soluciones de un modelo matemático que examina la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque bajo los efectos típicos de fuego, lluvia y competencia por el espacio. En particular, se estudia la existencia de soluciones de equilibrio y su respectiva estabilidad en términos de los parámetros demográficos. Lo anterior, permite evaluar la resiliencia de los ecosistemas frente a perturbaciones, además, facilita el diseño de estrategias de conservación efectivas que promuevan la sostenibilidad a largo plazo. Los resultados obtenidos son comparados por medio de simulaciones numéricas con la ayuda del software MATLAB.

Palabras Clave: Soluciones de equilibrio, ecosistema de sabana, ecosistema de bosque, modelos matemáticos, sistemas dinámicos, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Abstract

The main objective of this work is to study the properties of the solutions of a mathematical model that examines the dynamics of savanna and forest ecosystems under the typical effects of fire, rain and competition for space. Particularly, the existence of equilibrium solutions and their respective stability in terms of demographic parameters are studied. This allows us to evaluate the resilience of ecosystems against disturbances and also facilitates the design of effective conservation strategies that promote long-term sustainability. The results obtained are compared through numerical simulations with the help of MATLAB software.

Keywords: Equilibrium solutions, savanna ecosystem, forest ecosystem, mathematical models, dynamical systems, systems of ordinary differential equations.

1. Introducción

Los problemas en distintas áreas del conocimiento como biología, física, química, ingeniería, economía, o como se verá a lo largo de este artículo, ecología; se pueden plantear en términos de modelos matemáticos. Muchos de estos modelos se pueden representar por medio de *ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)*. En este trabajo estamos interesados en los *sistemas dinámicos* (en especial, los denominados *sistemas autónomos*), los cuales permiten describir el paso del tiempo de todos los puntos de un espacio dado, de tal manera que con su estudio se puede reconstruir el pasado y predecir el futuro.

A medida que aumenta la complejidad de las ecuaciones diferenciales, mayor es la dificultad para obtener soluciones analíticas. Existen incluso ecuaciones que no se sabe cómo se resuelven o ecuaciones en las que obtener su solución es bastante costoso. Una alternativa es hacer un análisis cualitativo, pues en muchas ocasiones no es necesario o no se pueden determinar las soluciones exactas, entonces es muy útil obtener una descripción cualitativa de su comportamiento, saber si existen soluciones constantes, si existen soluciones periódicas o que pasa con las soluciones cuando la variable tiempo tiende a infinito.

Un ejemplo de esto se puede ver en [15], en donde *Staver y Levin* proponen un modelo matemático que examina la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque unificando la vida vegetal en cuatro estados; árboles de bosque, árboles de sabana, árboles jóvenes de sabana y pastos, bajo los efectos típicos de fuego, lluvia y competencia por el espacio.

Los biomas de sabana y bosque tropical representan entre el 15% al 20% de la superficie terrestre del planeta. Además, dichos biomas cumplen con la función de ser reservorios de carbono (la sabana en menor medida) [11]. En este sentido, es fundamental entender los mecanismos de la dinámica que caracteriza a estos dos biomas [2, 15], debido a que es necesario un análisis que abarque la transición de sabana a bosque para evaluar los procesos que diferencian a ambos [14].

Los ecologistas han notado que los principales mecanismos que determinan la dinámica son: la intervención humana, el pastoreo, el tipo de suelo, el cambio climático, el fuego, la competencia por nutrientes y espacio. Sin embargo, se ha observado que las lluvias y el fuego, junto con la competencia por espacio juegan un papel fundamental en la distribución de la sabana, los bosques y su cobertura arbórea.

La lluvia y el fuego están íntimamente relacionados, ya que la ausencia de lluvia puede generar aumento en la aparición de incendios. Por otra parte, los incendios afectan a mayor escala los bosques, pues los árboles de este tipo de bioma son más propensos a ser exterminados comparándolos con árboles de sabana con características similares [11]. Mientras que en el bioma de la sabana, el fuego actúa como un limitante de la cobertura arbórea, pues disminuye el reclutamiento de árboles jóvenes a adultos, ya que un árbol joven no puede alcanzar un tamaño resistente al fuego y se mantiene en un estado reprimido por episodios repetidos de muerte y rebrote [6]. Por lo anterior, la propagación del fuego actúa como un proceso de percolación, en el cual los pastos ayudan a la propagación mientras que los árboles actúan como barreras, interrumpiendo el paso del fuego. [15].

La importancia de comprender la dinámica de este tipo de ecosistemas de sabana y bosque radica en su contribución significativa a la biodiversidad global y a la provisión de servicios ecosistémicos fundamentales para la humanidad. Específicamente, estos biomas son el hábitat de una gran diversidad de especies vegetales y animales, muchas de las cuales son endémicas y están altamente adaptadas a estas configuraciones particulares [11]. Por lo tanto, la comprensión de los mecanismos que regulan la transición entre los biomas es crítica para prever y controlar los impactos del cambio climático, la deforestación y otras actividades humanas en estos ecosistemas [2, 15]. En este sentido, el modelado matemático es una herramienta

poderosa para analizar y pronosticar la dinámica de estos ecosistemas debido a que permite identificar patrones emergentes, evaluar escenarios de manejo y conservación, planificación de estrategias de adaptación al cambio climático, así como sugerir estrategias efectivas para la protección de la biodiversidad.

En este trabajo, partimos de un modelo matemático, estudiado inicialmente por *Staver y Levin* en [15], para predecir la distribución de biomas de sabana y bosque teniendo en cuenta la incidencia de incendios. A partir de este trabajo se introduce un cambio sustancial en el modelo en algunas variables demográficas que dependen de la propagación del fuego propuesto por *Brhane y Gebru* en [2]. El artículo está escrito de forma tal que pretende ser autocontenido, la idea es que pueda ser entendido por quienes no conocen las nociones básicas necesarias tanto de ecología como de matemáticas.

En cuanto a los requisitos necesarios para los resultados matemáticos obtenidos hemos incluido al final del artículo un Apéndice con los conceptos y resultados matemáticos usados a lo largo de este trabajo. En dicho apéndice, nos sumergimos de forma rápida por el mundo de los sistemas dinámicos, explorando conceptos como sistemas autónomos, equilibrios, estabilidad, entre otros. Asimismo, revisamos algunos resultados importantes del análisis cualitativo de sistemas autónomos. Referencias importantes para esta parte son [1, 10].

En la sección 2, se presentan los conceptos ecológicos necesarios para entender todo lo que desarrollamos en este trabajo. Conceptos ecológicos tales como bioma, sabana, bosque, entre otros, ver [7].

La sección 3 está enfocada en describir el modelo de *Staver y Levin* desarrollado en [15]. Igualmente, se busca revisar algunos resultados y conceptos estudiados en [2] por *Brhane*, motivados por el modelo antes mencionado pero enfocado solamente en el bioma de sabana. Hacemos una combinación de estos dos trabajos y obtenemos algunos resultados nuevos que mejoran los resultados obtenidos en estos artículos. Para el caso del Teorema 1 se presenta una demostración diferente a la presentada en [2].

En la sección 4 se estudia un caso particular del modelo de *Staver y Levin* [15], considerando coexistencia de hierba y árboles de bosque. Se presentan las demostraciones de algunos resultados que estaban en la literatura pero sin demostración, estos son las Proposiciones 1 y 2. Los demás resultados obtenidos son nuevos y así mismo las simulaciones de casos particulares presentadas en los ejemplos.

En la sección 5 estudiamos la dinámica generada por la coexistencia de hierba y árboles de sabana. Las demostraciones del Teorema 3 y la Proposición 4 se presentan con todos los detalles completando así las demostraciones presentadas en los artículos de referencia.

Por último, en la sección 6 se estudia la dinámica que ocurre cuando coexisten hierba y árboles (tanto de sabana y bosque), considerando el modelo propuesto por *Staver y Levin* [15], teniendo en cuenta las modificaciones propuestas por *Brahne* [2]. En esta sección proporcionamos la prueba del Teorema 4, el cual es presentado en las referencias pero sin demostración.

En todos los casos estudiados en este trabajo, se analizan las múltiples soluciones de equilibrio y su respectiva estabilidad, así mismo, se hicieron simulaciones con ayuda del software MATLAB, para corroborar los resultados hallados. En todos los casos obtenemos nuevas simulaciones diferentes a las que son presentadas en los artículos de referencia.

2. Algunos conceptos ecológicos

En esta sección presentamos aquellos conceptos de ecología relevantes para el entendimiento del modelo, los cuales fueron tomados primordialmente del libro de *Ecología y Medioambiente* [7].

2.1. Organización ecológica

En ecología, los objetos de estudio se pueden observar en diferentes niveles de jerarquía. Estos niveles de organización, empiezan desde el individuo, especie, población, comunidad, ecosistema, bioma y por último, la biosfera. En este caso, se hablará de las características de los biomas, poniendo un enfoque especial en la sabana y los bosques tropicales (los objetos de estudio de este trabajo).

Bioma, es un sistema ecológico constituido por una gran zona geográfica generalmente ubicada a una cierta latitud. El área que ocupa no se encuentra del todo delimitada, pues más bien un bioma da paso a los adyacentes de forma gradual, sin embargo, su fisionomía nos permite distinguirlos de forma más o menos fácil debido a que presentan una cierta homogeneidad en cuanto a la forma en como están estructurados, su organización y sus patrones de funcionamiento. Entre los principales tipos de biomas conocidos, se encuentran los bosques, las sabanas, los desiertos, las tundras, y los ecosistemas acuáticos epicontinentales, litorales y oceánicos.

Sabana o pastizal, son comunidades caracterizadas por la presencia de pastos que representan las especies dominantes del ecosistema, pues los árboles y arbustos son escasos. Este tipo de bioma se encuentra sobre todo en planicies y mesetas, en regiones que tienen una larga época seca durante el año, donde el clima es desfavorable para los árboles que de otro modo podrían formar bosques. Por lo general, la sabana presenta un clima tropical seco con lluvias en verano, una temperatura promedio anual de alrededor de 20°C y una precipitación promedio de entre 250 y 2000 mm.

Bosque tropical, es un ecosistema con fauna y flora muy diversas, cada especie con frecuencia presenta una población no tan numerosa, pero si muy diseminada, por lo que no suele existir una clara especie dominante. La mayoría de los bosques tropicales se ubican a baja altitud y cercanas a la costa. Su clima suele ser cálido húmedo, con temperaturas promedio cercanas a los 27°C que no varían prácticamente con las estaciones o con la noche. La precipitación suele ser abundante y equitativamente repartida en todos los meses del año, por lo regular de más de 1000 mm anuales, aunque en algunas áreas del Amazonas o del sureste de Asia puede superar los 4000 mm por año.

Sucesión ecológica, es la variación temporal no estacional de la diversidad de especies que constituyen a una comunidad. Para que una sucesión ecológica tenga lugar es necesaria la existencia de un disturbio que afecte e incluso elimine a los organismos de la comunidad, dejando espacios abiertos a la colonización de nuevos organismos.

2.2. Estabilidad ecológica

El término estabilidad, en el contexto ecológico es multifacético. Dicho concepto puede referirse a la persistencia que tiene un ecosistema para preservar su estado a través del tiempo, esto quiere decir que un ecosistema que perdure durante más tiempo, será más estable. Por otra parte, también se puede hablar de estabilidad en términos de perturbación, esto es, si un ecosistema retorna a un estado de equilibrio después de perturbado entonces se dice que dicho ecosistema es estable, sin importar la magnitud de la perturbación [13, 9]. Esta última definición es equivalente a la estabilidad asintótica que se maneja en los modelos dinámicos en matemáticas, cuya definición se discute en el apéndice.

La estabilidad es un concepto que puede tener varias clasificaciones, dependiendo de la magnitud de la perturbación o de acuerdo a la coexistencia de más de un estado estable. A continuación se presentan algunas de estas clasificaciones.

Estabilidad local y global. Se dice que un sistema posee estabilidad local cuando es estable sobre pequeñas perturbaciones de corta duración, mientras que la estabilidad global se refiere a un sistema

altamente resistente al cambio en la composición de especies y/o la dinámica de la red alimentaria.

Estados estables alternativos. Un sistema posee estados estables alternativos si bajo las mismas condiciones externas (carga de nutrientes, temperatura, entre otras) puede establecerse en diferentes estados estables. Este nombre está reservado especialmente cuando se trabaja con modelos [8].

3. Modelo de Staver y Levin

El modelo del cual hablaremos en esta sección es el propuesto por *Staver y Levin* en [15], el cual busca establecer la dinámica entre los biomas de sabana y bosques, reduciendo la población vegetal a árboles de bosque (F), árboles de sabana (T), árboles jóvenes de sabana (S) y pastos (G), bajo los efectos típicos del fuego, la lluvia y la competencia por el espacio (ver Figura 1). El modelo en cuestión es temporal, debido a que no es espacialmente explícito pues todo el espacio se contabiliza implícitamente teniendo en cuenta que es ocupado por G , S , T o F en todo instante de tiempo, es decir,

$$G(t) + S(t) + T(t) + F(t) = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

3.1. Descripción del modelo

Los supuestos del modelo son:

1. El fuego genera disturbios en los ecosistemas, produce un proceso de sucesión ecológica, por tal motivo, se observa una jerarquización forestal en donde, la hierba se planta inicialmente, posteriormente llegan al lugar los árboles jóvenes y por último se establecen los árboles adultos.
2. La hierba dificulta la formación de árboles adultos al retrasar el reclutamiento de árboles jóvenes a adultos.
3. Los árboles jóvenes de sabana son producidos por los árboles adultos de sabana en proporción a la densidad de árboles.
4. Al morir los árboles (tanto de sabana como de bosque) son reemplazados por la hierba.

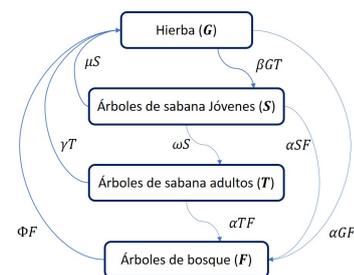


Figura 1: Diagrama de flujo del modelo (Adaptación de figura en [15]).

Con lo antes expuesto se presenta a continuación el sistema de ecuaciones que representa el modelo de *Staver y Levin*, además, en la Tabla 1, se presentan las variables de estado y demográficas del modelo así como su interpretación ecológica.

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF \\
 \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S - \alpha SF \\
 \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T - \alpha TF \\
 \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Los árboles jóvenes de sabana se establecen en espacio ocupado sólo por pasto y en proporción al número de árboles adultos de sabana presentes en el sistema (tasa constante β). El reclutamiento de árboles de sabana jóvenes a adultos se da a una tasa $\omega(G)$ en proporción a la cantidad de árboles jóvenes de sabana disponibles. Cuando mueren los árboles dicho espacio es ocupado por el pasto de acuerdo a la cantidad de árboles en el sistema (tasas μ , γ y $\phi(G)$). Los árboles de bosque se establecen en espacios ocupados por hierba y árboles de sabana en proporción a la cantidad de dichos árboles disponibles (tasa constante α).

Tabla 1: Parámetros y variables del modelo.

Símbolo	Interpretación Ecológica
Variables de Estado:	
G	Hierba o pastos.
S	Arboles de sabana jóvenes.
T	Arboles de sabana adultos.
F	Arboles de bosque.
Parámetros demográficos:	
α	Tasa de nacimiento de árboles de bosque (F).
β	Tasa de nacimiento de árboles de sabana jóvenes (S).
ω	Tasa de reclutamiento de árboles jóvenes (S) a adultos (T) de sabana.
ϕ	Tasa de mortalidad de los árboles de bosque (F).
μ	Tasa de mortalidad de árboles de sabana adultos (T).
γ	Tasa de mortalidad de árboles de sabana jóvenes (S).

El modelo incorpora dos suposiciones fundamentales sobre la ecología de la sabana. Primero, se asume que la propagación del fuego en la sabana depende de la abundancia del pasto, como se refleja en la función $\omega(G)$ y $\phi(G)$. La sabana con una cobertura arbórea por debajo del 40 % se quema con frecuencia, pero el fuego es casi inexistente en los sistemas con cobertura arbórea por encima del umbral del 40 %. Se incorpora esta respuesta no lineal de frecuencia de incendios a la abundancia de pasto a través de $\omega(G)$, el reclutamiento de plántulas en árboles. El fuego rara vez mata a los árboles jóvenes de la sabana, que pueden rebrotar después del fuego, y rara vez afecta a los árboles adultos. El fuego impone un control importante sobre el reclutamiento de árboles jóvenes a adultos. Estas características de los sistemas de sabana significan que el reclutamiento de árboles debe ser alto cuando la abundancia de pastos (y la frecuencia de incendios) es baja, debe disminuir rápidamente cerca del 40 % de la cubierta de árboles y debe permanecer baja en abundancia de hierba alta [14].

Por otra parte, la ecología del bosque es diferente a la sabana. La propagación del fuego ejerce un limitante para los árboles, afectando directamente su tasa de mortalidad $\phi(G)$. En este caso igualmente se asume que la propagación del fuego en el bosque depende de la abundancia del pasto. Es decir, la mortalidad de los árboles de bosque intrínseca (causas ajenas a los incendios) debería ocurrir cuando la abundancia de pasto está por debajo del 40 % y que la mortalidad inducida por el fuego debe ocurrir cuando la abundancia del pasto sea alta [15]. En este caso, se asume que $\omega(G)$ y $\phi(G)$ son funciones suaves y poseen forma sigmoideal. La tasa de reclutamiento de árboles jóvenes a adultos de la Sabana (ω) junto con la tasa de mortalidad de los árboles de bosque (ϕ) están condicionadas por

la propagación del fuego y las condiciones climáticas, por tanto, indirectamente serán variables que dependerán de la disponibilidad de G (Figura 2).

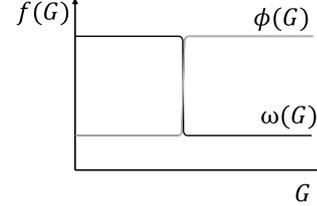


Figura 2: Gráfica de las funciones $\omega(G)$ y $\phi(G)$ (Adaptación de figura en [15]).

3.2. Algunos resultados del trabajo de Brhane

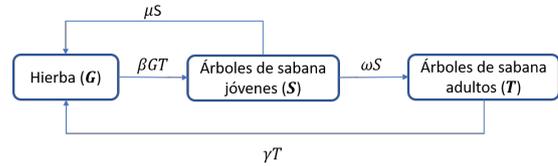


Figura 3: Diagrama de flujo del modelo (Adaptación de figuras en [14] y [2]).

En esta sección se presentan algunos resultados encontrados por *Brhane* en [2]. El modelo estudiado es el planteado en [14] y [15], sin embargo, se hace una simplificación al no incluir los árboles de bosque, es decir, esta enfocado sólo en el bioma de sabana (ver Figura 3). De acuerdo a lo anterior, el modelo simplificado es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T - \beta GT \\
 \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S \\
 \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Adicionalmente, se hace un cambio en la concepción de la función ω (ver Figura 4), pues tiene una discontinuidad de salto. Por tanto, en este trabajo se propuso definirla como una función a trozos (ver Figura 4) la cual se presenta a continuación

$$\omega(G) = \begin{cases} \omega_0 & \text{si } G \leq a, \\ \omega_0 - \frac{(G-a)(\omega_0-\omega_1)}{\epsilon} & \text{si } a \leq G \leq a + \epsilon, \\ \omega_1 & \text{si } G \geq a + \epsilon, \end{cases}
 \tag{4}$$

donde $\omega_0 > \omega_1 > 0$ y $0 < a < 1$, además, ϵ es un número suficientemente pequeño mayor que cero. Igualmente, se propone para trabajos futuros cambiar la función ϕ (ver Figura 4), como se describe a continuación

$$\phi(G) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } G \leq a, \\ \phi_0 - \frac{(G-a)(\phi_0-\phi_1)}{\epsilon} & \text{si } a \leq G \leq a + \epsilon, \\ \phi_1 & \text{si } G \geq a + \epsilon, \end{cases}
 \tag{5}$$

donde $\phi_1 > \phi_0 > 0$ y $0 < a < 1$, además, ϵ es un número suficientemente pequeño mayor que cero.

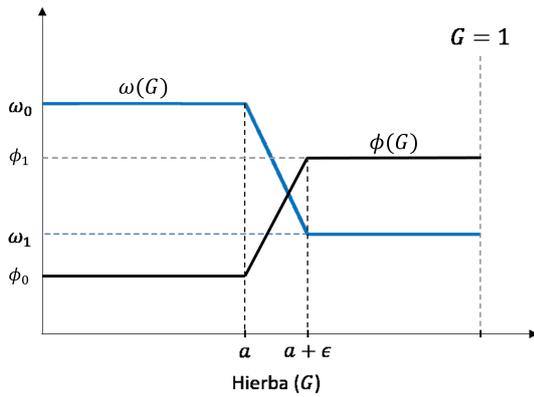


Figura 4: Representación de las función $\omega(G)$ y $\phi(G)$ (Adaptación de figura en [2]).

En este caso el dominio de definición de las soluciones será el conjunto

$$\Omega = \{(G, S, T) : G, S, T \geq 0, G + S + T = 1\}$$

Tenemos el siguiente resultado

Teorema 1. *Todas las soluciones del sistema con condición inicial positiva son no negativas para todo tiempo $t \geq 0$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $G(0) > 0, S(0) > 0$ y $T(0) > 0$. Definimos $\tau \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\tau = \sup \{t > 0, \forall s < t : G(s) > 0, S(s) > 0, T(s) > 0\}.$$

Note que si $\tau = \infty$ entonces el teorema está probado. Por tanto, procederemos por contradicción, suponiendo que $0 < \tau < \infty$. Se tendrán tres posibilidades, $G(\tau) = 0, S(\tau) = 0$ ó $T(\tau) = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $T(\tau) = 0$, evaluando en τ en el sistema (3) y reduciendo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt}(\tau) &= \mu S(\tau), \\ \frac{dS}{dt}(\tau) &= -[\omega(G(\tau)) + \mu]S(\tau), \\ \frac{dT}{dt}(\tau) &= \omega(G(\tau))S(\tau), \end{aligned} \tag{6}$$

y debemos anotar que estas ecuaciones se satisfacen puntualmente. Supongamos que la segunda ecuación se cumple para todo instante de tiempo t , en particular, se cumplirá para $t = \tau$. Así mismo, se supone que $\omega(G(\tau))$ es constante. Por tanto, se tendrá la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dS}{dt} = -[\omega(G(\tau)) + \mu]S(t), \tag{7}$$

La ecuación (7) es denominada de crecimiento exponencial o *modelo de Malthus* cuya solución será

$$S(t) = S(0)e^{-[\omega(G(\tau)) + \mu]t}.$$

Ahora, evaluando en $t = \tau$, obtenemos $S(\tau) = S(0)e^{-[\omega(G(\tau)) + \mu]\tau} > 0$. Tomando la tercera ecuación del sistema (6) se obtiene que

$$\frac{dT}{dt}(\tau) = \omega(G(\tau))S(\tau) > 0. \tag{8}$$

Por otra parte, notese que

$$\frac{dT}{dt}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \frac{T(\tau) - T(t)}{\tau - t} = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \frac{-T(t)}{\tau - t} < 0.$$

Lo anterior, contradice el resultado obtenido en (8), en consecuencia, se tiene que $T(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. De la misma manera como se procedió aquí, se puede probar que $G(t) > 0, \forall t \geq 0$ (ver [2]) y $S(t) > 0, \forall t \geq 0$. Con lo cual se concluye la prueba.

Corolario 1. *El conjunto Ω es positivamente invariante.*

Demostración. Supongamos que $(G(0), S(0), T(0)) \in \Omega$, es decir, $G(0) > 0, S(0) > 0, T(0) > 0$ y además $G(0) + S(0) + T(0) = 1$. Note que sumando el sistema de ecuaciones de (3) se obtiene

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT}{dt} = 0,$$

e integrando con respecto a t obtenemos $G(t) + S(t) + T(t) = c$, donde c es la constante de integración. Note que por la condición inicial se tiene que $c = 1$. Es decir obtenemos que, $G(t) + S(t) + T(t) = 1$. Por último, por el teorema demostrado previamente se tiene que las soluciones serán no negativas siempre que $t \geq 0$. En consecuencia, cualquier solución con $t \geq 0$ cumple las condiciones para pertenecer a Ω .

Para reducir la complejidad del sistema (3), se puede utilizar la condición espacial, $S(t) = 1 - G(t) - T(t)$ para todo instante de tiempo $t \geq 0$, con lo cual se obtiene un sistema de dos ecuaciones ordinarias no lineales como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T \end{aligned} \tag{9}$$

Teorema 2. *El sistema de ecuaciones diferenciales no posee soluciones periódicas en Ω .*

Demostración. En este caso, el conjunto solución Ω es simplemente conexo (pues, geométricamente es la porción de un plano limitado en el primer octante). Por otra parte,

$$\frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{dG}{dt} \right) = -\mu - \beta G, \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{dT}{dt} \right) = -\omega(G) - \gamma.$$

Tomando $\phi(G, T) = 1$, entonces $\frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{dG}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{dT}{dt} \right)$ no cambia de signo por lo menos en Ω . En consecuencia, usando el *criterio de Dulac* (Teorema 10) se concluye que el sistema no posee soluciones periódicas en Ω .

4. Coexistencia de hierba (G) y árboles de bosque (F)

Esta sección la dedicamos al estudio de un caso particular del modelo de *Staver y Levin* [15], en donde se conocerán las soluciones de equilibrio del sistema con la ausencia de los árboles de Sabana (S y T), mirando la dinámica poblacional que puede ocurrir entre la hierba (G) y los árboles de bosque (F) (ver Figura 5). Adicionalmente, se tomará la función ϕ tal como lo sugiere *Brhane* [2] (ver ecuación (5) y Figura 4). En este caso el sistema a estudiar es

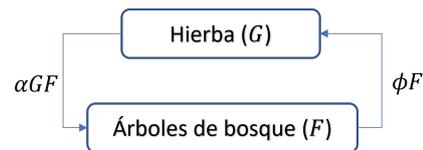


Figura 5: Diagrama de flujo del modelo (Adaptación de figura en [15]).

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \phi(G)F - \alpha GF \\ \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F \end{aligned} \tag{10}$$

4.1. Soluciones de equilibrio

El sistema (10) se anula siempre que $F = 0$ y $G = 1$, este es el equilibrio trivial del sistema. Ahora, supongamos que los árboles de bosque y la hierba coexisten simultáneamente (esto es $F > 0$); en este caso, por la condicional espacial se puede reducir el sistema (10) de la siguiente manera

$$\frac{dG}{dt} = \phi(G)(1 - G) - \alpha G(1 - G) \quad (11)$$

Proposición 1. Las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (10) se obtienen cuando

$$\check{G} = \frac{\phi(\check{G})}{\alpha}, \quad \check{F} = \frac{\alpha - \phi(\check{G})}{\alpha}.$$

Demostración. Note que (11) se anula siempre que $\phi(G) = \alpha G$. El resultado es inmediato despejando la variable \check{G} de la condición anterior, posteriormente usando la condición espacial se determina \check{F} .

El equilibrio trivial siempre es admisible. Por otra parte, las soluciones de equilibrio no triviales serán admisibles siempre que la tasa de nacimientos de árboles de bosque sea superior a la tasa de mortalidad de árboles de bosque, es decir, $\alpha > \phi$. En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evoluciona a un estado donde solo existe hierba (G).

Definiendo una función g que depende de G tal que,

$$g(G) = \alpha \cdot G, \quad G \in [0, 1]. \quad (12)$$

Se puede inferir por medio de lo anterior que toda solución de equilibrio del sistema debe satisfacer que $\phi(G) = g(G)$. Así mismo, las soluciones de equilibrio son raíces de la función definida como

$$m_1(G) = g(G) - \phi(G),$$

donde la función m_1 representa la tasa de variación de los árboles de bosque. Bajo ciertas condiciones que deben satisfacer los parámetros demográficos, se puede garantizar la existencia de un máximo de cuatro soluciones de equilibrio. El siguiente resultado nos da razón de las condiciones para encontrar los equilibrios no triviales y la cuantía de estos.

Lema 1. Suponga que $g(1) > \phi_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño

1. Si $g(a) < \phi_0$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial (\check{G}, \check{F}) para el sistema (10) tal que $a + \epsilon < \check{G} < 1$.
2. Si $g(a) > \phi_1$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial (\check{G}, \check{F}) para el sistema (10) tal que $0 < \check{G} < a$.
3. Si $\phi_0 < g(a) < \phi_1$ entonces existen soluciones de equilibrio no triviales $(\check{G}_1, \check{F}_1)$, $(\check{G}_2, \check{F}_2)$ y $(\check{G}_3, \check{F}_3)$ para el sistema (10) tal que $0 < \check{G}_1 < a$, $a < \check{G}_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < \check{G}_3 < 1$.

Demostración. En primer lugar, caractericemos la función $m_1(G)$. La derivada de dicha función es $m'_1(G) = \alpha - \phi'(G)$. Note que $m'_1(G) > 0$ siempre que $0 < G < a$ ó $a + \epsilon < G < 1$, mientras que será negativa si $a < G < a + \epsilon$. Lo anterior garantiza que dicha función es estrictamente decreciente o creciente en alguno de los tres intervalos.

1. Consideremos el intervalo $0 < G < a$ para el cual tenemos

$$m_1(G) = g(G) - \phi(G) = g(G) - \phi_0 < g(a) - \phi_0 < 0,$$

Entonces, la función m_1 no posee raíces para $0 < G < a$. En consecuencia, no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, consideremos el intervalo $a < G < a + \epsilon$

$$\begin{aligned} m_1(a) &= g(a) - \phi(a) = g(a) - \omega_0 < 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 \\ &= g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < \phi_0 + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que la función m_1 posee comportamiento estrictamente monótono, dicha función no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia, no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Finalmente, para este caso consideremos el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 \\ &< \phi_0 + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0, \\ m_1(1) &= g(1) - \phi_1 > 0, \quad m'_1(G) > 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

2. Considere el intervalo $0 \leq G \leq a$.

$$m_1(a) = g(a) - \phi_0 > \phi_1 - \phi_0 > 0, \quad m_1(0) = -\phi_0 < 0.$$

Por el Teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $0 < G < a$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$, entonces $m_1(G) = g(G) - \phi(G) > g(a) - \phi(G) > \phi_1 - \phi(G) > 0$. Esto prueba que la función m_1 no posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} m_1(G) &= g(G) - \phi_1 > g(a) - \phi_1 > 0, \\ m_1(1) &= g(1) - \phi_1 > 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m_1 no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia tampoco existe solución de equilibrio en este intervalo.

3. Considere el intervalo $0 \leq G \leq a$, entonces $m_1(a) = g(a) - \phi_0 > 0$, $m_1(0) = -\phi_0 < 0$. Por el Teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $0 < G < a$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$, tenemos

$$\begin{aligned} m_1(a) &= g(a) - \phi_0 > 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. La unicidad de dicha raíz se garantiza por la monotonicidad de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo. Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$, entonces

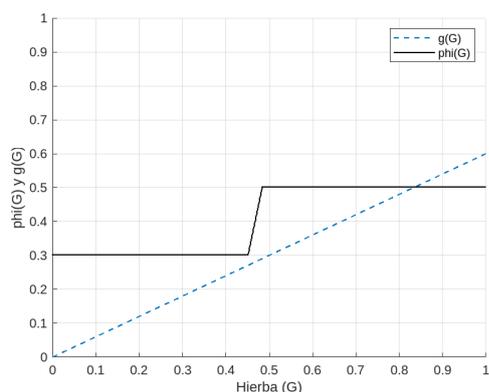


Figura 6: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del Lema 1.

$$m_1(1) = g(1) - \phi_1 > 0,$$

$$m_1(a + \epsilon) = g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0.$$

Por el Teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

A continuación presentamos algunos ejemplos donde se evidencia la existencia de las soluciones de equilibrio no triviales de acuerdo al lema 1.

Ejemplo 1. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0,6$, $\phi_0 = 0,3$, $\phi_1 = 0,5$, $a = 0,45$, $\epsilon = 0,033$.

Con estos valores se obtiene $g(1) = 0,6 > 0,5 = \phi_1$ y además, $g(a) = 0,27 < 0,3 = \phi_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 6.

Ejemplo 2. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0,88$, $\phi_0 = 0,25$, $\phi_1 = 0,42$, $a = 0,52$, $\epsilon = 0,001$.

Con estos valores se obtiene que $g(1) = 0,88 > 0,42 = \phi_1$ y además, $g(a) = 0,45 < 0,42 = \phi_1$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 7.

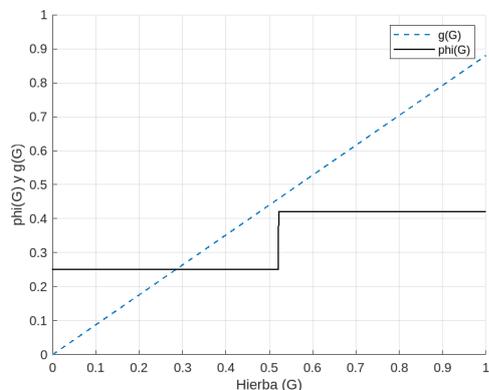


Figura 7: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del Lema 1.

Ejemplo 3. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0,6$, $\phi_0 = 0,28$, $\phi_1 = 0,52$, $a = 0,52$, $\epsilon = 0,001$.

Al utilizar los valores de este ejemplo se obtiene que $g(1) = 0,6 > 0,52 = \phi_1$ y además, $\phi_0 = 0,28 < g(a) = 0,45 < 0,42 = \phi_1$. En consecuencia se cumple el tercer caso del lema anterior, por tanto, existen tres soluciones de equilibrio tal como lo muestra la figura 8.

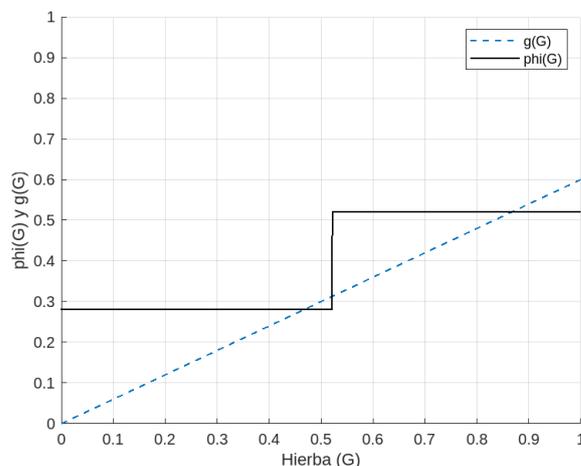


Figura 8: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (c) del Lema 1.

4.2. Análisis de estabilidad

En esta sección presentamos una condición que garantiza que las soluciones halladas en la sección anterior sean asintóticamente estables. En primera instancia, miremos un resultado relacionado con la estabilidad de la solución de equilibrio trivial.

Lema 2. La solución de equilibrio $(1, 0)$ del sistema (10) es asintóticamente estable siempre que $g(1) < \phi_1$. Por el contrario, si $g(1) > \phi_1$ entonces el equilibrio $(1, 0)$ es inestable.

Demostración. Derivando la ecuación (11) con respecto a G y evaluando en $G = 1$ se obtiene que,

$$\frac{d}{dG} \left(\frac{dG}{dt} \right) \Big|_{G=1} = -(\phi(1) - \alpha).$$

Por el Teorema 5 (Apéndice), el sistema es asintóticamente estable si la derivada presentada previamente es negativa, lo cual ocurre siempre que $\alpha < \phi(1)$.

Proposición 2. Cualquier solución de equilibrio (\check{G}, \check{F}) del sistema (10) es asintóticamente estable siempre que,

$$\alpha > \phi'(\check{G}),$$

donde el lado derecho de la expresión es la derivada del parámetro ϕ .

Demostración. Derivando la ecuación (11) con respecto a G y evaluando en $G = \check{G}$ se obtiene

$$\frac{d}{dG} \left(\frac{dG}{dt} \right) \Big|_{G=\check{G}} = \left(\frac{\alpha - \phi(\check{G})}{\alpha} \right) (\phi'(\check{G}) - \alpha).$$

Por el Teorema 5, el sistema es asintóticamente estable si la derivada presentada previamente es negativa, lo cual ocurre siempre que $\phi'(\check{G}) < \alpha$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.

Corolario 2. Suponga que $g(1) > \phi_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño

1. Toda solución de equilibrio no trivial G del modelo (10) tal que $0 < G < a$ ó $a + \epsilon < G < 1$ es asintóticamente estable.

2. Toda solución de equilibrio no trivial G del modelo (10) tal que $a < G < a + \epsilon$ es inestable.

Ejemplo 4. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0,5$, $\phi_0 = 0,4$, $\phi_1 = 0,8$, $a = 0,45$, $\epsilon = 0,033$.

Con estos valores se obtiene que $g(1) = \alpha = 0,5 < 0,8 = \phi_1$. En consecuencia, el sistema no admite soluciones de equilibrio no triviales, entonces la única solución de equilibrio será $E_1 = (0, 1)$. Por el Lema 2, se puede aseverar que la solución de equilibrio E_1 es estable. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_1 , se toma el valor inicial $(G(0), F(0)) = (0,20, 0,80)$. Como se observa en la Figura 9, el sistema evoluciona rápidamente a la solución de equilibrio trivial.

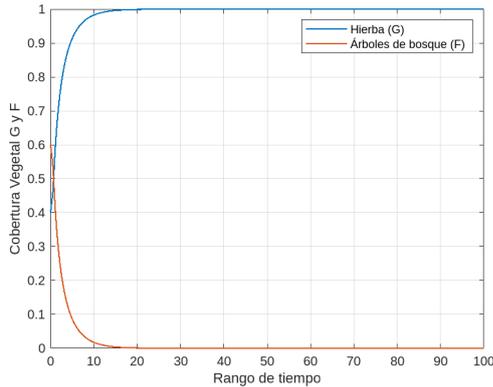


Figura 9: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0,80, 0,20)$.

Ejemplo 5. Considere los parámetros demográficos del ejemplo 3

De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el lema 1, existen cuatro soluciones de equilibrio $E_1 = (1, 0)$, $E_2 = (0,4667, 0,5333)$, $E_3 = (0,5201, 0,4799)$, and $E_4 = (0,8667, 0,1333)$. Por el Lema 2 y el Corolario 2, se tiene que E_2 y E_4 son asintóticamente estables, mientras que E_1 y E_3 son inestables. Si se toma el valor inicial $(G(0), F(0)) = (0,35, 0,65)$, el sistema evoluciona rápidamente al equilibrio E_1 , como se muestra en la Figura 10.

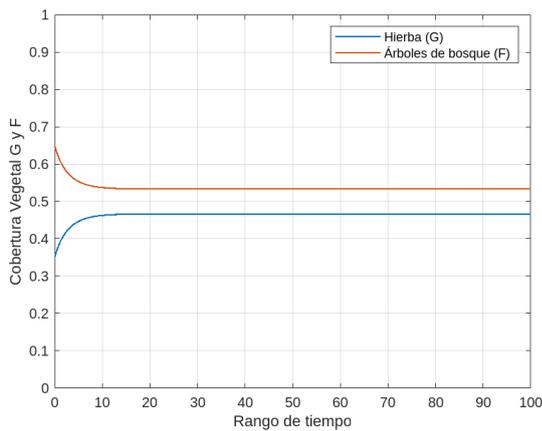


Figura 10: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0,35, 0,65)$.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio E_4 , se toma como valor inicial $(G(0), F(0)) = (0,55, 0,45)$. En este caso, como se observa en la Figura 11, el sistema evoluciona rápidamente a este equilibrio. De esta simulación se puede asegurar que coexisten para el sistema dos equilibrios simultáneamente estables.

Para el caso donde se presenta ausencia del fuego, el sistema tiende a evolucionar a un estado donde predominan los árboles de bosque

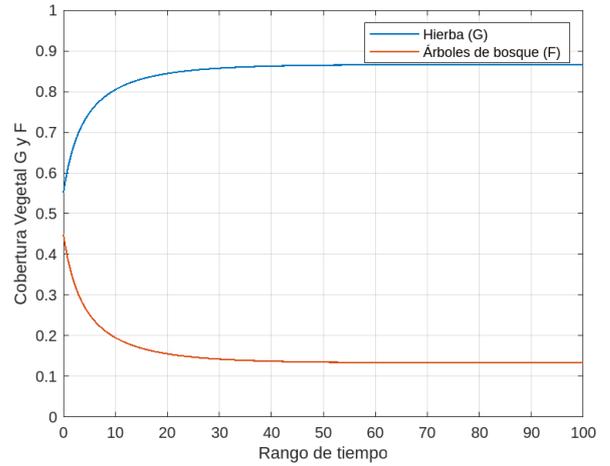


Figura 11: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0,55, 0,45)$.

(en este caso se habla del equilibrio E_2). Por otra parte, cuando hay mayor incidencia de incendios, como es de esperar, la hierba se vuelve dominante (para este caso se habla del equilibrio E_4), debido a que el fuego ejerce un limitante para los árboles de bosque.

5. Coexistencia de Hierba (G) y árboles de Sabana (S y T)

Esta sección está enfocada en encontrar las soluciones de equilibrio del sistema con la ausencia de los árboles de bosque (F), mirando los equilibrios y la dinámica que puede ocurrir entre la hierba y los árboles de sabana. En este caso el sistema que se estudiará es

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T \end{aligned} \tag{13}$$

5.1. Soluciones de equilibrio

Dentro de los equilibrios del sistema, podemos encontrar que existe un equilibrio trivial cuando todo el espacio está ocupado por hierba, esto es, $G = 1$ y $S = T = 0$. Ahora, supongamos que los árboles de sabana y la hierba coexisten simultáneamente (esto es, $S > 0$, $T > 0$). Por la ausencia de bosque y teniendo en cuenta que $S = 1 - G - T$, obtenemos la siguiente reducción del sistema (13),

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T \end{aligned} \tag{14}$$

Proposición 3. Las soluciones de equilibrio no triviales $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ del sistema (14) satisfacen que

$$\hat{T} = \frac{(1 - \hat{G})\omega(\hat{G})}{\omega(\hat{G}) + \gamma}, \quad \hat{G} = \frac{(\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma}{\omega(\hat{G})\beta}, \quad \hat{S} = \frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\omega(\hat{G}) + \gamma}.$$

Demostración. Por la definición de solución de equilibrio, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT &= 0, \\ \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Despejando T de la primera ecuación de (15) obtenemos $T = \frac{(1-G)\mu}{\mu + \beta G - \gamma}$. Así mismo, despejando la misma variable de la segunda ecuación de (15) obtenemos $T = \frac{\omega(G)(1-G)}{\omega(G) + \gamma}$, igualando los resultados hallados previamente tenemos

$$T = \frac{\omega(G)(1-G)}{\omega(G) + \gamma} = \frac{(1-G)\mu}{\mu + \beta G - \gamma} \implies \frac{\omega(G)}{\omega(G) + \gamma} = \frac{\mu}{\mu + \beta G - \gamma},$$

Despejando la variable G obtenemos $G = \frac{(\omega(G) + \mu)\gamma}{\omega(G)\beta}$. Por último, para determinar la expresión faltante para S basta con utilizar la condición $S = 1 - G - T$ y reemplazar la expresión hallada para la variable T . **Lema 3.** Las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (14) son admisibles siempre que $\omega(\hat{G})(\beta - \gamma) > \gamma\mu$.

Demostración. Para que $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ sea una solución de equilibrio no trivial, se debe garantizar que $\hat{S}, \hat{T} > 0$, lo cual se cumple siempre que $1 - \hat{G} > 0$, por tanto

$$\begin{aligned} 1 - \hat{G} > 0 &\implies 1 - \frac{(\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma}{\omega(\hat{G})\beta} > 0 \implies \omega(\hat{G})\beta - (\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma > 0 \\ &\implies \omega(\hat{G})(\beta - \gamma) - \mu\gamma > 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de equilibrio no triviales deben satisfacer las ecuaciones propuestas en 3, sin embargo, basta con que se cumpla la ecuación para la variable G , pues las demás variables dependen de ésta. Despejando de la condición para G el parámetro ω obtenemos $\omega(\hat{G}) = \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma}$. Definimos la función f que depende de G tal que

$$f(G) = \frac{\mu\gamma}{\beta G - \gamma}, \tag{16}$$

con dominio $(\gamma\beta^{-1}, 1]$. De esto se puede inferir que toda solución de equilibrio del sistema debe satisfacer que $\omega(G) = f(G)$. Por otra parte, las soluciones de equilibrio son raíces de la función definida como $m(G) = f(G) - \omega(G)$.

Aparte de la condición descrita en el Lema 3, las soluciones de equilibrio no triviales existen siempre y cuando $\gamma\beta^{-1} < 1$, lo cual es equivalente a $\beta > \gamma$. En otras palabras, las soluciones de equilibrio no trivial son admisibles siempre y cuando la tasa de natalidad de árboles de sabana jóvenes (S) supere la tasa de mortalidad de árboles de sabana jóvenes (S). En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evoluciona al estado donde solo existe hierba (G).

De acuerdo a las ecuaciones de la Proposición 3 que debe satisfacer todo equilibrio no trivial, se pueden encontrar un máximo de cuatro soluciones de equilibrio (una de ellas es la trivial). Los dos siguientes resultados nos dan razón sobre las condiciones que deben satisfacer los parámetros para garantizar la existencia de las soluciones de equilibrio y su cuantía.

Lema 4. Suponga que $f(1) > \omega_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

(a) Si $f(a) > \omega_0$ entonces no existen soluciones de equilibrio no triviales para el sistema (3).

(b) Si $f(a) < \omega_0$ entonces existen dos soluciones de equilibrio no triviales $(\hat{G}_1, \hat{S}_1, \hat{T}_1)$ y $(\hat{G}_2, \hat{S}_2, \hat{T}_2)$ del sistema (3) con $\gamma\beta^{-1} < \hat{G}_1 < a$ y $a < \hat{G}_2 < a + \epsilon$.

Demostración. La función f como se definió en la ecuación (16) es estrictamente decreciente, debido a que su derivada siempre es negativa. Además, dicha función es continua en su dominio de definición, lo cual induce que m también lo sea.

(a) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$\begin{aligned} m(G) &= f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_0 \geq f(a) - \omega_0 > 0, \\ m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0. \end{aligned}$$

La derivada de la función m es

$$m'(G) = -\frac{\gamma\mu\beta}{(\beta G - \gamma)^2} + \frac{\omega_0 - \omega_1}{\epsilon}.$$

Por tanto, tenemos que $m'(G) > 0$ en $a < G < a + \epsilon$, debido a que ϵ es suficientemente pequeño. Por lo anterior la función m no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon < G < 1$

$$\begin{aligned} m(G) &= f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) = f(1) - \omega_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión no existen soluciones de equilibrio no triviales con las condiciones dadas.

(b) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$

$$m(a) = f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 < 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty.$$

Note que para $G \in (\gamma\beta^{-1}, a] \cup [a + \epsilon, 1]$ la derivada de m será $m'(G) = -\frac{\gamma\mu\beta}{(\beta G - \gamma)^2}$, debido a que la función $\omega(G)$ es constante. En consecuencia, $m'(G) < 0$. Esto prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$, es decir que existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) \\ &= f(a) + O(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + O(\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) \\ &= f(a) + O(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + O(\epsilon) > 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) > 0, \quad m'(G) < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$, es decir no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existen dos soluciones G_1 y G_2 tal que $\gamma\beta^{-1} < G_1 < a$ y $a < G_2 < a + \epsilon$ con las condiciones dadas.

Ejemplo 6. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,5$, $\gamma = 0,2$, $\beta = 0,7$, $\omega_0 = 0,8$, $\omega_1 = 0,15$, $a = 0,4$, $\epsilon = 0,06$. Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0,2 > 0,15 = \omega_1$ y además, $f(a) = 1,25 > 0,8 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, no existen soluciones de equilibrio tal como lo muestra la Figura 12.

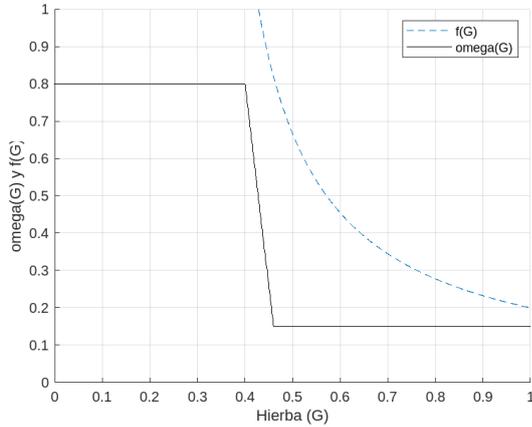


Figura 12: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del Lema 4.

Ejemplo 7. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,6$, $\gamma = 0,2$, $\beta = 0,8$, $\omega_0 = 0,85$, $\omega_1 = 0,15$, $a = 0,44$, $\epsilon = 0,06$. Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0,2 > 0,15 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0,79 < 0,85 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existen dos soluciones de equilibrio no triviales, tal como lo muestra la Figura 13.

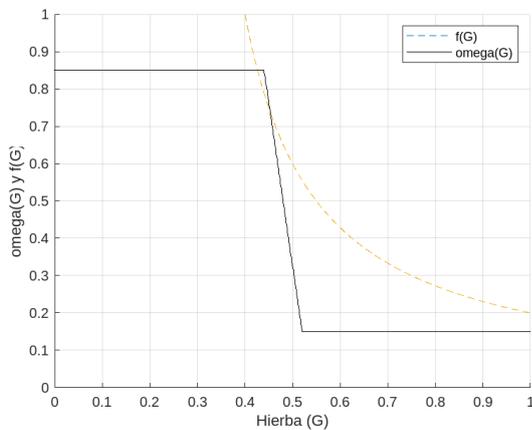


Figura 13: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del Lema 4.

Lema 5. Suponga que $f(1) < \omega_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

- (a) Si $f(a) > \omega_0$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ para el sistema (3) tal que $a + \epsilon < \hat{G} < 1$.
- (b) Si $f(a) < \omega_1$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ para el sistema (3) tal que $\gamma\beta^{-1} < \hat{G} < a$.
- (c) Si $\omega_1 < f(a) < \omega_0$ entonces existen soluciones de equilibrio no trivial $(\hat{G}_1, \hat{S}_1, \hat{T}_1)$, $(\hat{G}_2, \hat{S}_2, \hat{T}_2)$ y $(\hat{G}_3, \hat{S}_3, \hat{T}_3)$ para el sistema (3) tal que $\gamma\beta^{-1} < \hat{G}_1 < a$, $a < \hat{G}_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < \hat{G}_3 < 1$.

Demostración. (a) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$m(G) = f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_0 \geq f(a) - \omega_0 > 0,$$

$$m(a) = f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty.$$

Esto quiere decir que la función m no posee raíces para $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. Por lo tanto no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$m(a) > 0, \quad m'(G) < 0,$$

$$m(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1$$

$$= f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + \mathcal{O}(\epsilon) > 0.$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$ y en consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Por último considere el intervalo $a + \epsilon < G < 1$, entonces $m(1) = f(1) - \omega_1 < 0$, $m(a + \epsilon) > 0$ y $m'(G) < 0$. Lo cual significa que la función m posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$ y en consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

(b) Consideremos el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$, entonces tenemos que $m(a) = f(a) - \omega_0 = \omega_1 - \omega_0 < 0$, $m(\gamma\beta^{-1}) = \infty$ y $m'(G) < 0$. Esto prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$ y que por tanto existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$, entonces

$$m(a) = f(a) - \omega_0 < \omega_1 - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0,$$

$$m(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 < 0.$$

Lo anterior prueba que la función m no posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$m(a + \epsilon) < 0, \quad m'(G) < 0 \text{ y } m(1) = f(1) - \omega(1) < 0.$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existe una solución G tal que $\gamma\beta^{-1} < G < a$ con las condiciones dadas.

(c) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. Entonces, $m(a) = f(a) - \omega_0 < 0$, $m(\gamma\beta^{-1}) = \infty$, $m'(G) < 0$. Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$ y en consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$.

$$m(a) = f(a) - \omega_0 < \omega_1 - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0,$$

$$m(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1 = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > 0.$$

Esto prueba que la función m posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$ y por lo tanto existe solución de equilibrio en dicho intervalo. Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$, para el cual tenemos que $m(a + \epsilon) > 0$, $m'(G) < 0$, y $m(1) = f(1) - \omega(1) < 0$. Por tanto la función m posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existen tres soluciones de equilibrio G_1, G_2 y G_3 tal que $\gamma\beta^{-1} < G_1 < a$, $a < G_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < G_3 < 1$ con las condiciones dadas.

Ejemplo 8. Presentamos algunas simulaciones para el lema anterior

- a) Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,3$, $\gamma = 0,3$, $\beta = 0,7$, $\omega_0 = 0,6$, $\omega_1 = 0,4$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0,05$. Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0,225 < 0,4 = \omega_1$ y además, $f(a) = 1,8 > 0,6 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la Figura 14.

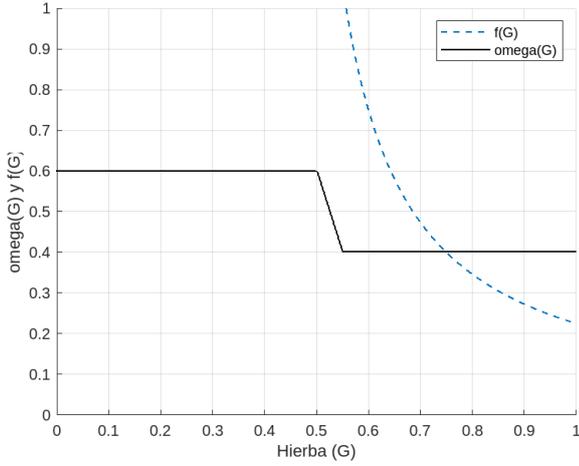


Figura 14: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del Lema 5.

b) Consideramos ahora los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,4$, $\gamma = 0,2$, $\beta = 0,6$, $\omega_0 = 0,75$, $\omega_1 = 0,6$, $a = 0,6$, $\epsilon = 0,01$. Se obtiene que $f(1) = 0,2 < 0,6 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0,5 < 0,6 = \omega_1$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la Figura 15.

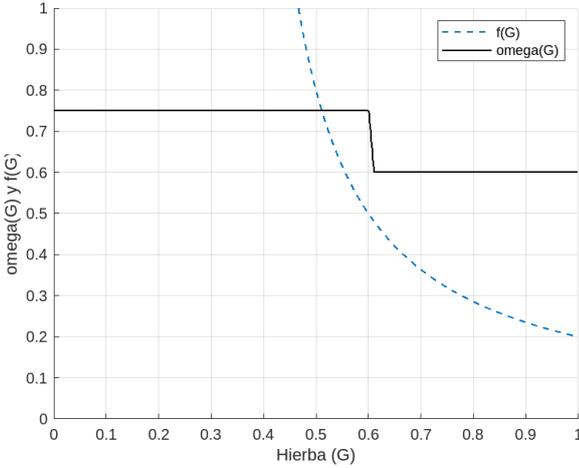


Figura 15: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del Lema 5.

c) Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,2$, $\gamma = 0,1$, $\beta = 0,8$, $\omega_0 = 0,2$, $\omega_1 = 0,08$, $a = 0,4$, $\epsilon_1 = 0,01$ y $\epsilon_2 = 0,08$. Con los parámetros mencionados previamente se cumple el caso (c) del lema anterior. Se tienen tres soluciones de equilibrio, sin embargo, dicha existencia depende del parámetro ϵ . En la Figura 16 se observa que para $\epsilon = 0,01$ se logran obtener las tres soluciones (caso A). Mientras que cuando se toma $\epsilon = 0,08$ solo se obtiene una solución (Caso B).

5.2. Análisis de estabilidad

En esta sección se determina una condición para que las soluciones halladas en la sección anterior sean asintóticamente estables. En primera instancia, miremos un resultado relacionado con la estabilidad de la solución de equilibrio trivial.

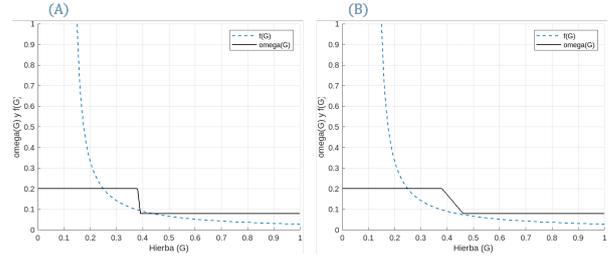


Figura 16: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (c) del Lema 5.

Teorema 3. Si $\omega_1(\beta - \gamma) < \gamma\mu$ entonces el equilibrio $(1, 0, 0)$ del sistema (14) es asintóticamente estable.

Demostración. La matriz de linealización en la solución de equilibrio trivial es

$$J(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & \omega_1 \\ \gamma - \mu - \beta & -(\omega_1 + \gamma) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Note que la traza de esta matriz es negativa. En consecuencia, se debe garantizar que $\det J(1, 0, 0) > 0$ para concluir que la solución es asintóticamente estable (Teorema 5). Esto es, $\det J(1, 0, 0) = \mu(\omega_1 + \gamma) + \omega_1(\gamma - \mu - \beta) > 0$, entonces debemos tener que $\mu\gamma + \omega_1\gamma - \omega_1\beta > 0$ ó $\mu\gamma - \omega_1(\beta - \gamma) > 0$. En conclusión, el equilibrio trivial es estable siempre que $\omega_1(\beta - \gamma) < \gamma\mu$.

A continuación, presentamos un resultado que nos ayudará a determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales por medio de la función f , descrita en (16).

Proposición 4. Cualquier equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ es asintóticamente estable siempre que

$$\omega'(\hat{G}) > \frac{-\beta\mu\gamma}{(\beta\hat{G} - \gamma)^2},$$

donde el lado izquierdo de la expresión es la derivada del parámetro ω mientras que el lado derecho es la derivada de la función f , descrita en la ecuación (16).

Demostración. Determinemos la matriz de la comunidad del modelo (14),

$$J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta\hat{T}) & \omega'(\hat{G})\hat{S} - \omega(\hat{G}) \\ \gamma - \mu - \beta\hat{G} & -(\omega(\hat{G}) + \gamma) \end{bmatrix}$$

Note que la traza de la matriz es negativa, por tanto, por las condiciones del Teorema 5 los equilibrios antes mencionados serán asintóticamente estables siempre que $\det J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) > 0$. Denotemos como A al producto de la diagonal principal, mientras que B será el producto de la diagonal secundaria de la matriz $J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S})$. Ahora se reducirá las expresiones para A y B teniendo en cuenta la Proposición 3 y el parámetro ω evaluado en \hat{G} . Se hará un abuso de la notación para reducir escritura, tomando $\omega = \omega(\hat{G})$ y $\omega' = \omega'(\hat{G})$. Empecemos por reducir A , esto es

$$\begin{aligned} A &= (\mu + \beta\hat{T})(\omega + \gamma) = \left(\mu + \beta \left(\frac{(1 - \hat{G})\omega}{\omega + \gamma} \right) \right) (\omega + \gamma), \\ &= \mu(\omega + \gamma) + \beta\omega(1 - \hat{G}), \\ &= \mu \left(\frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} + \gamma \right) + \beta \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} (1 - \hat{G}), \\ &= \mu \left(\frac{\mu\gamma + \beta\gamma\hat{G} - \gamma^2}{\beta\hat{G} - \gamma} \right) + \frac{\mu\gamma\beta}{\beta\hat{G} - \gamma} (1 - \hat{G}), \\ &= \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} (\mu + \beta\hat{G} - \gamma + \beta(1 - \hat{G})), \end{aligned}$$

Haciendo lo propio con B obtenemos

$$\begin{aligned} B &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G})(\omega' \hat{S} - \omega) \\ &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\omega + \gamma} \right) - \omega \right), \\ &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} + \gamma} \right) - \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \\ &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\frac{\mu\gamma + \gamma\beta\hat{G} - \gamma^2}{\beta\hat{G} - \gamma}} \right) - \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \\ &= -(1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' - \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma}, \\ &= - \left((1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' + \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \end{aligned}$$

Por la condición que debe satisfacer el determinante tenemos que

$$\begin{aligned} \det J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) &= \frac{\mu\gamma(\mu - \gamma + \beta)}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' + \\ &\quad + \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} > 0 \\ \frac{\mu\gamma(\mu - \gamma + \beta + \gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' &> 0 \\ \frac{\mu\gamma\beta(1 - \hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' &> 0 \end{aligned}$$

Por último, despejando ω' de la desigualdad anterior se obtiene la expresión deseada.

En la sección pasada probamos que pueden existir hasta cuatro soluciones de equilibrio, sin embargo, no se conoce nada acerca de su estabilidad. A continuación se presenta un resultado, cuya demostración es consecuencia directa de la Proposición 4, que da razón de la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales.

Corolario 3. Dada una solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ se cumple que

- a) es asintóticamente estable si $\gamma\beta^{-1} < \hat{G} < a$ ó $a + \epsilon < \hat{G} < 1$.
- b) es inestable si $a < \hat{G} < a + \epsilon$.

Ejemplo 9. Considere los parámetros demográficos del literal c) del ejemplo 8 (Caso A). De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el Lema 5, existen cuatro soluciones de equilibrio que se describen a continuación

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= (0,250, 0,250, 0,500), \\ E_3 &= (0,389, 0,314, 0,297), & E_4 &= (0,438, 0,312, 0,250). \end{aligned}$$

Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0,03 < 0,08 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0,09 < 0,20 = \omega_0$, $f(a) = 0,09 > 0,08 = \omega_1$. Por el Corolario 3, se puede aseverar que las soluciones de equilibrio E_1 y E_3 son inestables, mientras que las otras serán asintóticamente estables. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_2 , se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0,50, 0,20, 0,30)$. Como se observa en la Figura 17, el sistema evoluciona rápidamente a la solución E_2 .

Por otra parte, si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0,40, 0,40, 0,20)$, el sistema evoluciona rápidamente al otro equilibrio estable, es decir E_4 , tal como se observa en la Figura 18.

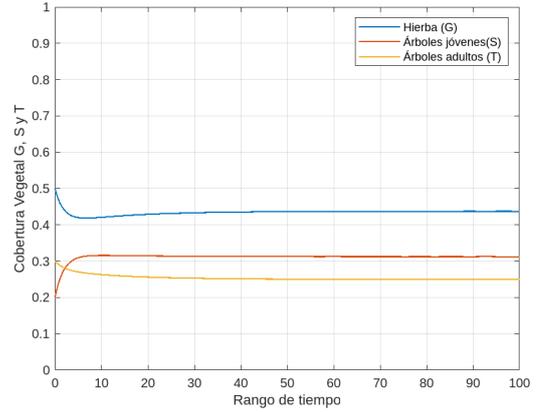


Figura 17: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0,50, 0,20, 0,30)$.

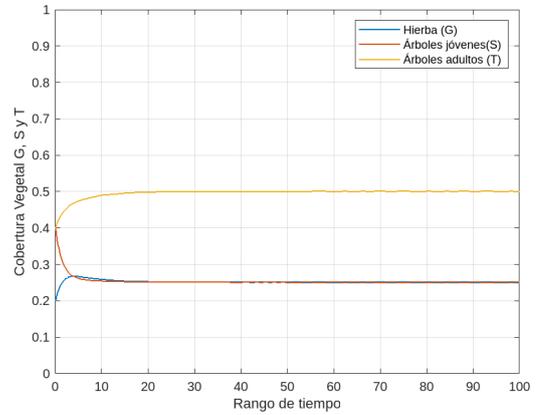


Figura 18: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0,40, 0,40, 0,20)$.

En términos ecológicos, la simulación hecha en este ejemplo permite evidenciar que coexisten dos equilibrios simultáneamente estables. Uno de ellos está asociado a la ausencia de fuego, en este caso se habla del equilibrio E_2 . Bajo estas condiciones, predominan los árboles de sabana adultos. Por otra parte, cuando hay incidencia de incendios el sistema tiende a un estado en el que predomina la hierba (asociado al equilibrio E_4), en cuyo caso, esta es la dinámica usual de los biomas de sabana.

Ejemplo 10. Considere los parámetros demográficos del ejemplo 7. De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el Lema 4, existen tres soluciones de equilibrio que son $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0,427, 0,109, 0,464)$ y $E_3 = (0,448, 0,115, 0,437)$. Con estos valores de los parámetros se obtiene que $f(1) = 0,2 > 0,15 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0,79 < 0,85 = \omega_0$. Por el Corolario 3, se tiene que E_1 y E_2 son asintóticamente estables, mientras que E_3 es inestable. Si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0,60, 0,30, 0,10)$, el sistema evoluciona rápidamente al equilibrio E_1 , como se muestra en la Figura 19.

Ahora, estudiaremos la estabilidad del equilibrio E_2 . Para ello, tomaremos el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0,40, 0,10, 0,50)$. En este caso, como se observa en la Figura 20, el sistema evoluciona rápidamente a este equilibrio.

Nuevamente, se obtienen dos equilibrios estables. Cuando hay incidencia de incendios, los árboles de sabana tienden a desaparecer, evolucionando a un estado donde la hierba es la única variable que se encuentra. Sin embargo, cuando hay ausencia de fuego, los árboles adultos de sabana predominan.

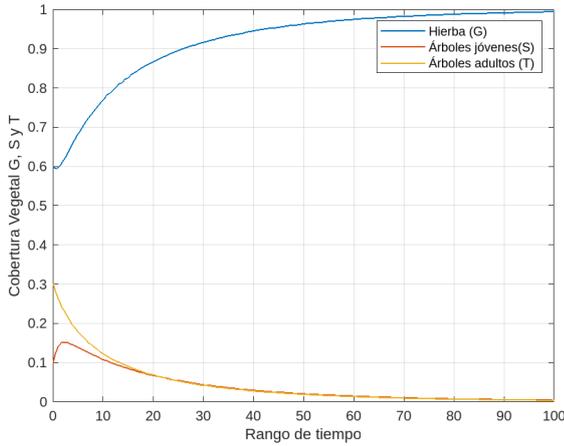


Figura 19: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0,60,0,30,0,10)$.

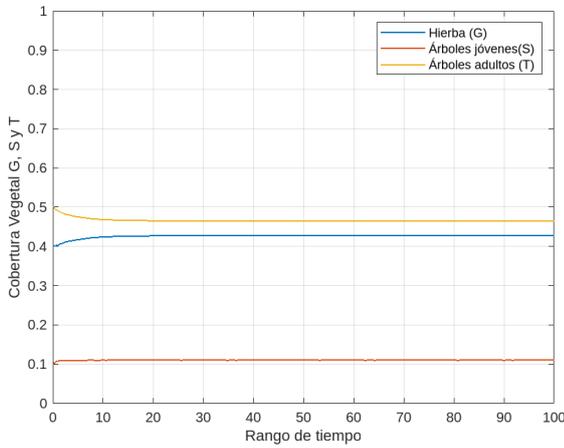


Figura 20: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0,40,0,10,0,50)$.

6. Coexistencia de Hierba (G) y árboles (S,T,F)

En esta última sección se presentan las múltiples soluciones de equilibrio del modelo propuesto por *Staver y Levin* en [15], teniendo en cuenta las modificaciones propuestas por *Brhane* en [2]. Así mismo, se realiza un análisis del tipo de estabilidad que posee cada equilibrio.

6.1. Soluciones de equilibrio

Inicialmente encontraremos las soluciones de equilibrio del sistema con presencia de todas las variables de estado, es decir, hierba (G), árboles de sabana jóvenes (S), árboles de sabana adultos (T) y árboles de bosque (F); mirando los equilibrios y la dinámica poblacional que puede ocurrir entre ellos. En este caso el sistema que se estudiará será el descrito en (2).

El equilibrio trivial del sistema se presenta cuando todo el espacio es ocupado por hierba, esto es, $G = 1$ y $S = T = F = 0$. Por otra parte, si $S > 0, T > 0, F > 0$, usando la definición 2 las soluciones de equilibrio

del sistema deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu S + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF &= 0 \\ \beta GT - \omega(G)S - \mu S - \alpha SF &= 0 \\ \omega(G)S - \gamma T - \alpha TF &= 0 \\ [\alpha(1-F) - \phi(G)]F &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que $F > 0$, de la última ecuación de este sistema se obtiene la condición $\alpha(1-F) - \phi(G) = 0$, con lo cual se obtiene que

$$F = \frac{\alpha - \phi(G)}{\alpha}.$$

Note que la expresión anterior tiene validez siempre que $\alpha > \phi(G)$. Ahora, determinemos una razón entre las variables S y T teniendo en cuenta la segunda ecuación del sistema (18)

$$\beta GT - (\omega(G) + \mu + \alpha F)S = 0 \implies \frac{S}{T} = \frac{\beta G}{\omega(G) + \mu + \alpha F}.$$

Haciendo lo propio con la tercer ecuación de (18) tenemos

$$\omega(G)S - (\gamma + \mu + \alpha F)T = 0 \implies \frac{S}{T} = \frac{\gamma + \alpha G}{\omega(G)}.$$

Así hemos probado el siguiente resultado

Proposición 5. Toda solución de equilibrio no trivial $(\bar{G}, \bar{S}, \bar{T}, \bar{F})$ del sistema (2) debe satisfacer que,

$$\frac{\bar{S}}{\bar{T}} = \frac{\gamma + \alpha \bar{F}}{\omega(\bar{G})} = \frac{\beta \bar{G}}{\omega(\bar{G}) + \mu + \alpha \bar{F}}, \quad \bar{F} = \frac{\alpha - \phi(\bar{G})}{\alpha}.$$

donde $\bar{S}, \bar{T}, \bar{F} \neq 0$.

Esto se puede combinar para encontrar una condición en términos de G,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + \alpha \bar{F}}{\omega(\bar{G})} &= \frac{\beta \bar{G}}{\omega(\bar{G}) + \mu + \alpha \bar{F}} \\ \implies \beta \bar{G} \omega(\bar{G}) &= (\gamma + \alpha \bar{F})(\mu + \omega(\bar{G}) + \alpha \bar{F}) \\ \implies \beta \bar{G} \omega(\bar{G}) &= (\gamma + \alpha - \phi(\bar{G}))(\mu + \omega(\bar{G}) + \alpha - \phi(\bar{G})) \end{aligned}$$

De acuerdo a la condición presentada anteriormente, se pueden encontrar un máximo de cuatro soluciones de equilibrio (una de ellas es la trivial), tal como se observa en la Figura 21.

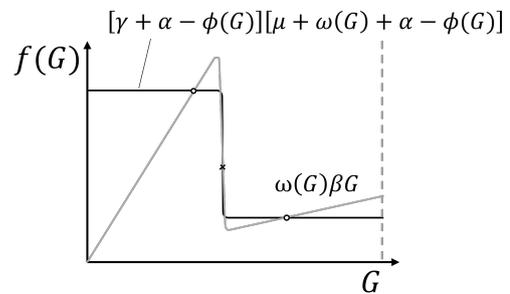


Figura 21: Análisis gráfico de los equilibrios internos. Adaptación de figura en [15].

6.2. Análisis de estabilidad

En este apartado se determinan condiciones para que las soluciones de equilibrio del sistema (2) sean asintóticamente estables. En primer lugar, se hace una reducción del sistema por medio de la condición espacial, es decir, teniendo en cuenta que $S(t) = 1 - G(t) - T(t) - F(t)$, en cuyo caso se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \mu(1 - G - T - F) + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - G - T - F) - \gamma T - \alpha TF \\ \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F \end{aligned} \quad (19)$$

Teniendo en cuenta la forma de las soluciones de equilibrio, la matriz de la comunidad del modelo (19) es

$$J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} -\mu + \phi'(\bar{G})\bar{F} - \beta\bar{T} - \alpha\bar{F} & \gamma - \mu - \beta\bar{G} & -\mu + \phi(\bar{G}) - \alpha\bar{G} \\ \omega'(\bar{G})\bar{S} - \omega(\bar{G}) & -(\omega(\bar{G}) + \gamma + \alpha\bar{F}) & -(\omega(\bar{G}) + \alpha\bar{T}) \\ -\phi'\bar{F} & 0 & -\alpha\bar{F} \end{bmatrix}.$$

Teorema 4. Sea $(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ una solución de equilibrio no trivial del sistema (19).

- a) Si $\omega(\bar{G}) \approx 0$ y $\phi(\bar{G}) \approx 0$, entonces la solución de equilibrio es asintóticamente estable.
- b) Si $\omega(\bar{G}) \ll 0$ y $\phi(\bar{G}) \gg 0$, entonces la solución de equilibrio es inestable.

Demostración. (a) Para este caso la matriz de la linealización será

$$J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta\bar{T} - \alpha\bar{F} & \gamma - \mu - \beta\bar{G} & -\mu + \phi - \alpha\bar{G} \\ -\omega & -(\omega + \gamma + \alpha\bar{F}) & -(\omega + \alpha\bar{T}) \\ 0 & 0 & -\alpha\bar{F} \end{bmatrix}.$$

Es evidente que la traza de la matriz jacobiana es negativa, resta verificar las otras dos condiciones.

- Condición $\det J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) < 0$: El determinante se puede obtener a través de $\det J = -\alpha\bar{F} \cdot \det M_{33}$, donde M_{33} es la menor de la matriz $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ que se obtiene al eliminar la tercer fila y columna.

$$\begin{aligned} \det M_{33} &= (\mu + \beta\bar{T} + \alpha\bar{F})(\omega + \gamma + \alpha\bar{F}) - \omega(\mu + \beta\bar{G} - \gamma), \\ &= (\mu + \beta\bar{T} + \alpha\bar{F})(\gamma + \alpha\bar{F}) + \omega(\beta\bar{T} + \alpha\bar{F} + \gamma) - \omega\beta\bar{G}, \\ &= (\mu + \omega + \alpha\bar{F})(\gamma + \alpha\bar{F}) + \beta\bar{T}(\omega + \gamma + \alpha\bar{F}) - \omega\beta\bar{G}, \\ &= \beta\bar{T}(\omega + \gamma + \alpha\bar{F}). \end{aligned}$$

En consecuencia el determinante de $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ es negativo debido a que $\det M_{33} > 0$.

- Condición $\det J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) > \text{tr} J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) \cdot a_2$: Por último, resta corroborar la tercera condición, realizando algunos cálculos y utilizando lo hallado previamente con respecto al determinante se obtiene que

$$\begin{aligned} \det J - \text{tr} J \cdot a_2 &= \alpha\bar{F}\beta\bar{T} \left(\omega + \gamma + \alpha\bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\alpha\bar{F}} \right) + \\ &+ \alpha\bar{F} \left(\omega + \gamma + \alpha\bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\beta\bar{T}} + \frac{\det M_{33}}{\alpha\bar{F}} \right) \left(\mu + 2\alpha\bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\beta\bar{T}} \right) > 0. \end{aligned}$$

En conclusión, una solución de equilibrio del sistema (2), tal que $\omega'(G) \approx 0$ y $\phi'(G) \approx 0$, será asintóticamente estable.

(b) La traza de $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ bajo estas condiciones es positiva, debido a que ϕ' es suficientemente grande. Por tanto, una solución de equilibrio del sistema (2) es inestable.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del Teorema 4.

Corolario 4. a) Toda solución de equilibrio no trivial G tal que $0 < G < a$ ó $a + \epsilon < G < 1$ es asintóticamente estable.

b) Toda solución de equilibrio no trivial G tal que $a < G < a + \epsilon$ es inestable.

Ejemplo 11. Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0,03$, $\gamma = 0,26$, $\beta = 0,86$, $\omega_0 = 0,63$, $\omega_1 = 0,13$, $a = 0,687$, $\epsilon_1 = 0,0093$, $\phi_0 = 0,6$ y $\phi_1 = 0,68$. Para las condiciones dadas, se encuentran las siguientes soluciones de equilibrio

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ E_2 &= (0,6587, 0,0489, 0,0716, 0,2208), \\ E_3 &= (0,6950, 0,1115, 0,0619, 0,1316), \\ E_4 &= (0,7826, 0,0733, 0,0272, 0,116). \end{aligned}$$

En este caso, por el corolario 4 se puede garantizar que E_2 y E_4 son asintóticamente estables, mientras que E_3 será inestable. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_2 , se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0), F(0)) = (0,67, 0,05, 0,12, 0,16)$. Como se observa en la figura 22, el sistema evoluciona rápidamente a la solución E_2 .

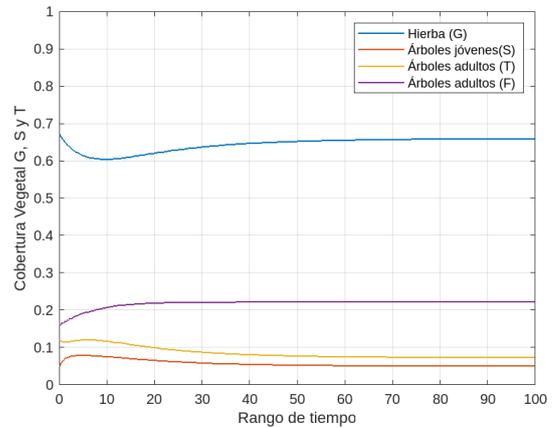


Figura 22: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T, F) = (0,67, 0,05, 0,12, 0,16)$.

Por otra parte, si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0), F(0)) = (0,80, 0,05, 0,10, 0,05)$, el sistema evoluciona rápidamente al otro equilibrio estable, es decir E_4 , tal como se observa en la Figura 23.

En este tipo de trabajos es importante además de caracterizar las soluciones de equilibrio, reconocer las soluciones periódicas que pueden ocurrir bajo ciertas condiciones. Sin embargo, dicho análisis se sale de los objetivos del presente trabajo, aunque hay que aclarar que si existen soluciones periódicas para este modelo. Si se desea conocer más al respecto, el lector puede revisar [15].

7. Conclusiones

Al tener en cuenta las condiciones climáticas y los incendios en el modelo y sus simplificaciones, se pudo determinar que existe un máximo de cuatro soluciones de equilibrio en cada caso. La solución trivial, es decir, el estado donde el área de estudio es cubierta por

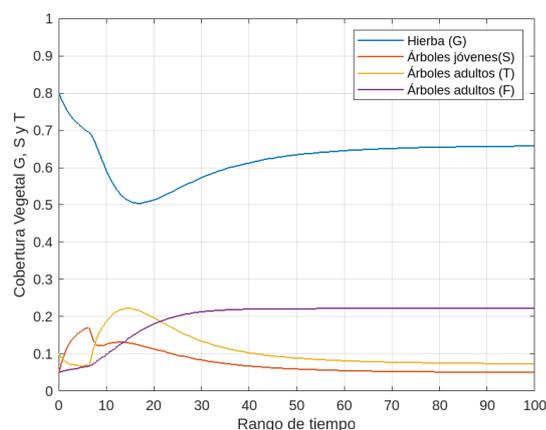


Figura 23: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T, F) = (0,80, 0,05, 0,10, 0,05)$.

sólo hierba, existe sin importar la escogencia de los parámetros demográficos.

En el caso de las soluciones de equilibrio no triviales, su existencia y estabilidad están condicionadas por los parámetros demográficos. Se determinó que bajo condiciones de alta y baja densidad de hierba, el sistema ecológico tiende a permanecer estable; mientras que cuando la densidad de la hierba está intermedia el sistema es inestable. Es decir, si se obtienen G_1 , G_2 y G_3 soluciones de equilibrio tales que $0 < G_1 < G_2 < G_3 < 1$, entonces G_1 y G_3 serán estables mientras que G_2 no lo será. Igualmente, G_3 es un equilibrio asociado a las condiciones de mayor influencia de incendios.

Algo interesante que sugieren las simulaciones y que vale la pena resaltar es el hecho que internamente puede ocurrir una *biestabilidad en la distribución de los biomas*.

Las simulaciones evidenciaron que cuando se presentan equilibrios internos, la cobertura predominante tiende a seguir siéndolo, es decir, si la cobertura arbórea tiene mayor densidad espacial, el sistema procura alcanzar un estado de equilibrio estable en donde el espacio ocupado por los árboles sea mayor con respecto a la hierba.

Para el caso del modelo simplificado donde solo están presentes la hierba y el bosque, las soluciones de equilibrio no triviales serán admisibles siempre que la tasa de nacimientos de árboles de bosque sea superior a la tasa de mortalidad de árboles de bosque. En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evolucionaría a un estado donde solo existe hierba. Por otra parte, cuando se tiene en cuenta la hierba y los árboles de sabana, se encuentra que las soluciones de equilibrio no triviales son admisibles siempre que la tasa de natalidad de árboles jóvenes supere su tasa de mortalidad.

Debido a que el sistema ecológico está influenciado permanentemente por las perturbaciones, es importante además de lo desarrollado en este trabajo, realizar un análisis de las soluciones periódicas presentes cuando se consideran todas las variables de estado.

Agradecimientos.

Este trabajo fue apoyado financieramente por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle a través del proyecto CI-71326. El segundo autor también agradece a la School of Mathematical and Statistical Sciences de University of Texas Rio Grande Valley por la hospitalidad durante la parte final de la realización de este trabajo.

Implicaciones éticas

Este estudio no necesitó aprobación por un comité de ética pues en el mismo no se usaron seres vivos en el mismo. Solo se usaron

resultados en artículos publicados previamente y a partir de ellos obtuvimos nuestros resultados.

Contribución de los autores

La contribución de los autores es igual ya que los dos autores trabajamos en el artículo. Ambos autores leímos y aprobamos la versión final del artículo.

Declaración de fuentes de financiación

Este trabajo fue financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle a través del proyecto CI-71326.

Declaración de intereses

Los autores declaramos que no existe ningún conflicto de intereses relacionado con la publicación de este artículo.

Referencias

- [1] F. Brauer y C. Castillo-Chavez, "Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology". New York, USA: Springer, 2012.
- [2] K. W. Brhane y M. G. Gebru, "Mathematical model for the dynamics of Savanna ecosystem considering fire disturbances", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 509, pp. 110515, 2020.
- [3] G. Calderón, J. Arango y A. Gómez, "Ecuaciones diferenciales: para estudiantes de Ciencias e ingenierías". Cali, Colombia: Universidad del Valle, Programa editorial, 2014.
- [4] C. Chicone, "Ordinary differential equations with applications". New York, USA: Springer, 2006.
- [5] W. A. Coppel, "Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations". Boston, USA: Heath mathematical monographs, 1965.
- [6] W.A. Hoffmann, E.L. Gotsch, S.G. Rossatto et al., "Ecological thresholds at the savanna-forest boundary: How plant traits, resources and fire govern the distribution of tropical biomes", *Ecology Letters*, vol. 15, no 7, pp. 759-768, 2012.
- [7] A. Lecona, "Ecología y Medioambiente". México DF, México: Mcgraw-Hill, 2013.
- [8] S. A. Levin, S. R. Carpenter, H. C. J. Godfray et al., "The Princeton Guide to Ecology". Princeton, USA: Princeton University Press, 2009.
- [9] A. S. Mori, "Modern Threats to the Stability of Biological Communities", En: Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences. Oxford, Inglaterra: Elsevier, 2015.
- [10] D. A. Muñoz, "Modelo matemático para la distribución de los biomas de Sabana y Bosque teniendo en cuenta los incendios", Universidad del Valle, Trabajo de Grado en Matemáticas, 2023.
- [11] B. Murphy y D. M. Bowman, "What controls the distribution of tropical forest and savanna?", *Ecology letters*, vol. 15, no 7, pp. 748-758, 2012.
- [12] L. Perko, "Differential Equations and Dynamical Systems". New York, USA: Springer, 1996.
- [13] R. W. Rutledge, B. L. Basore y R. J. Mulholland, "Ecological stability: An information theory viewpoint", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 57, no 2, pp. 355-371, 1976.
- [14] A. Staver, S. Archibald y S. Levin, "The Global extent and determinants of savanna and forest as alternative biome states", *Science*, vol. 334, no 6053, pp. 230-232, 2011.

[15] A. Staver y S. Levin, "Integrating theoretical climate and fire effects on savanna and forest systems", *The American naturalist*, vol. 180, no 2, p. 211-224

Apéndice: Conceptos y resultados matemáticos básicos

En este apartado se presentan algunos conceptos, resultados y ejemplos relacionados con los sistemas dinámicos, es decir, se hará una corta introducción sobre sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, soluciones de equilibrio y estabilidad de las soluciones, los cuales fueron extraídos en su mayoría del libro *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* [1].

Definición 1. Sea \mathcal{A} un abierto de \mathbb{R}^n y $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se llamará autónomo si es de la forma,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})), \tag{20}$$

donde $\vec{x} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Es decir, si el lado derecho de (20) no depende de la variable independiente t .

Note que la función $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, f(\vec{x}))$ define un campo vectorial en \mathbb{R}^n asociado al sistema de ecuaciones diferenciales (20). En este caso, la primera componente representa el punto base y la segunda componente especifica el vector en el punto base. Observemos que una solución de la forma $t \mapsto \phi(t)$ de (20) tiene la propiedad que su vector tangente en cada instante de tiempo t está dado por

$$(\phi(t), \phi'(t)) = (\phi(t), f(\phi(t))).$$

En otras palabras, si $\zeta \in \mathbb{R}^n$ está en la orbita de esta solución entonces la recta tangente a la orbita en ζ es generada por el vector $(\zeta, f(\zeta))$ [4].

Ejemplo 12. A continuación se presentan algunos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

- (Ecuación de Verhulst) También denominado modelo logístico. Fue propuesta en 1838 por el matemático Pierre Verhulst con el fin de representar el crecimiento de poblaciones en donde la tasa de crecimiento relativa no permanece constante sino que disminuye conforme aumenta la población [3]. A continuación se presenta el modelo logístico,

$$\frac{dx}{dt} = x(r - \mu x),$$

donde $x(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t , mientras que r y μ son constantes.

- (Ecuaciones de Lotka-Volterra) También conocidas como modelo predador-presa, dichas ecuaciones fueron propuestas en 1926 por el matemático italiano Vito Volterra en conexión con el estudio de poblaciones de peces [3]. A continuación se presentan las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\lambda - by), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\mu + cx). \end{aligned} \tag{21}$$

Donde $x(t)$ y $y(t)$ representa la población de presas y predadores existentes en un instante t , respectivamente. Mientras que b, c, μ y λ son constantes.

- (Modelo SIR) Un modelo importante en epidemiología es el modelo SIR, que describe la dinámica de una enfermedad que confiere inmunidad contra la reinfección [1]. En este caso, S, I y R representan la densidad de individuos susceptibles, infecciosos y recuperados de

alguna enfermedad, respectivamente. A continuación se presenta el modelo SIR simple,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned}$$

Donde β y γ representan la tasa de reclutamiento de susceptibles a infectados y de infectados a recuperados, respectivamente.

Definición 2. Un punto $\vec{x}_\infty \in \mathcal{A}$ se dice que es un equilibrio (o un punto estacionario) del sistema autónomo (20) si satisface que $f(\vec{x}_\infty) = \vec{0}$.

Ejemplo 13. Calculemos los puntos de equilibrio para el sistema predador-presa. Aplicando la definición al sistema (21) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$x(\lambda - by) = 0; \quad y(-\mu + cx) = 0.$$

Para encontrar las soluciones de equilibrio, se utilizarán dos casos, teniendo en cuenta si x se anula o no.

- Si $x = 0$, reemplazando en la segunda ecuación obtenemos igualmente que $y = 0$. Por tanto, el equilibrio trivial del sistema de predador-presa es $(0, 0)$.
- Si $x \neq 0$, de la primera ecuación se obtiene que $y = \lambda/b$. Ahora, de la segunda ecuación obtenemos $x = \mu/c$. Por tanto, un punto estacionario no trivial del sistema es $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$.

Definición 3. Se define la matriz de la linealización (o matriz de la comunidad) en el punto \vec{x}_∞ como la matriz Jacobiana de f evaluada en el punto estacionario, esto es $J_f(\vec{x}_\infty) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_\infty) \right)$.

Definición 4. La linealización del sistema (20) en el equilibrio \vec{x}_∞ está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J_f(\vec{x}_\infty) \cdot \vec{x}$$

Un resultado importante en el estudio cualitativo de los sistemas autónomos se conoce como el Teorema de Hartman-Grobman. De manera escueta, esta proposición garantiza que si todos los valores propios de $J_f(\vec{x}_\infty)$ poseen parte real distinta de 0, entonces el sistema (20) en cercanías del equilibrio cualitativamente posee el mismo comportamiento de su linealización. Para más detalles acerca de este resultado ver [4] o [12].

Ejemplo 14. Calculemos la matriz de la comunidad para el sistema predador-presa.

Hallemos las derivadas parciales de las funciones en las ecuaciones del sistema (21),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x(\lambda - by)) &= \lambda - by, & \frac{\partial}{\partial y}(x(\lambda - by)) &= -bx, \\ \frac{\partial}{\partial x}(y(-\mu + cx)) &= cy, & \frac{\partial}{\partial y}(y(-\mu + cx)) &= -\mu + cx. \end{aligned}$$

Ahora, se determinan dos matrices de linealización de acuerdo a cada punto estacionario del sistema. Para el punto estacionario $(0, 0)$ tenemos

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

y para el punto estacionario $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$ obtenemos

$$J\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b\mu}{c} \\ \frac{c\lambda}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición 5 (Estabilidad). *Las diferentes clasificaciones que se tienen de un punto de equilibrio son las siguientes*

- Un equilibrio \vec{x}_∞ se dice que es estable si cada solución $\vec{x}(t)$ con condición inicial $\vec{x}(0)$ suficientemente cerca del equilibrio permanece cerca del equilibrio para todo $t \geq 0$.
- Un equilibrio \vec{x}_∞ se dice que es asintóticamente estable si cada solución $\vec{x}(t)$ con condición inicial $\vec{x}(0)$ suficientemente cerca del equilibrio tiende al equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.
- Un equilibrio \vec{x}_∞ se dice que es inestable si no es estable.

La estabilidad de una solución de equilibrio \vec{x}_∞ se puede deducir por medio de los valores propios de la matriz de la linealización $J_f(\vec{x}_\infty)$. A continuación presentamos el resultado correspondiente así como su prueba

Teorema 5. *Si \vec{x}_∞ es un equilibrio del sistema (20) y si todos los valores propios de la matriz de linealización en este equilibrio poseen parte real negativa entonces el equilibrio \vec{x}_∞ es asintóticamente estable.*

La prueba de este teorema se basa en el uso de los siguientes cuatro teoremas que en su mayoría se pueden revisar en textos de Análisis, además, las pruebas se pueden consultar en [4], donde son probados en un caso bastante general pues todo se hace para espacios de Banach.

Teorema 6 (Teorema de Taylor). *Sea U un subconjunto abierto de X . Si $f : U \rightarrow Y$ es de clase C^1 y $x + th \in U$ para todo $0 \leq t \leq 1$, entonces*

$$f(x + h) = f(x) + J_f(x)h + \int_0^1 (J_f(x + h)h - J_f(x)h)dt.$$

Teorema 7 (Teorema del Valor Medio). *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable en un conjunto abierto $U \subset X$ con $a, b \in U$ y $a + t(b - a) \in U$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Si existe algún $M > 0$ tal que*

$$\sup_{t \in [0,1]} \|J_f(a + t(b - a))\| \leq M,$$

entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

Teorema 8. *Sea $f : [a, b] \rightarrow X$ una función regular, entonces*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

Teorema 9. *Considere el problema de valor inicial,*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + g(\vec{x}, t), \quad x(t_0) = \vec{x}_0.$$

Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa y existen constantes positivas $a > 0$ y $k > 0$ tal que $\|g(\vec{x}, t)\| \leq k\|\vec{x}\|^2$ cuando $\|\vec{x}\| < a$, entonces existen constantes positivas C, b , y α que son independientes de la escogencia del tiempo inicial t_0 tal que la solución $t \mapsto \vec{x}(t)$ del problema de valor inicial satisface,

$$\|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

para todo $t \geq t_0$ siempre que $\|\vec{x}_0\| \leq b$. En particular, la función $t \mapsto \vec{x}(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$, la solución cero (la solución con valor inicial $\vec{x}(t_0) = 0$), es asintóticamente estable.

Demostración. Ahora tenemos las herramientas necesarias para la prueba del Teorema 1. Se hará la demostración para $\vec{x}_\infty = 0$, lo que es suficiente para el desarrollo de la prueba. Por el Teorema de Taylor se tiene que $f(\vec{x}) = J_f(0)\vec{x} + g(\vec{x})$ tal que,

$$g(x) := \int_0^1 (J_f(s\vec{x}) - J_f(0))\vec{x} ds$$

Por el Teorema del Valor Medio se obtiene que,

$$\begin{aligned} \|J_f(s\vec{x}) - J_f(0)\| &\leq \|s\vec{x}\| \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau s\vec{x})\|, \\ &\leq \|\vec{x}\| \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau \vec{x})\|, \end{aligned}$$

donde $D^2 f$ denota la matriz de las derivadas de segundo orden de f . Por la suavidad de la función f , existe una bola B centrada en el origen y una constante $k > 0$ tal que

$$\sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau \vec{x})\| \leq k, \quad \forall \vec{x} \in B.$$

Ahora, usando el Teorema 8, y lo hecho previamente obtenemos,

$$\begin{aligned} \|g(\vec{x})\| &= \|\vec{x}\| \cdot \left\| \int_0^1 (J_f(s\vec{x}) - J_f(0))\vec{x} ds \right\|, \\ &\leq \|\vec{x}\| \cdot \sup_{s \in [0,1]} \|J_f(s\vec{x}) - J_f(0)\|, \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau \vec{x})\|, \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \cdot k, \end{aligned}$$

siempre que $\vec{x} \in B$. El resultado es consecuencia directa del Teorema 9.

Corolario 5. *Sea \mathcal{A} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Si \vec{x}_∞ es una solución de equilibrio del sistema (20) tal que $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y además,*

$$\text{tr}J_f(\vec{x}_\infty) < 0, \quad \det J_f(\vec{x}_\infty) > 0.$$

Entonces el equilibrio \vec{x}_∞ es asintóticamente estable.

La demostración de este corolario es una aplicación inmediata del Teorema 5.

El resultado anterior se conoce como las condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz para sistemas 2×2 . Si se considera el sistema (20) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 3×3 , el equilibrio \vec{x}_∞ es asintóticamente estable si y solo si, $\det J_f(\vec{x}_\infty) < 0$, $\text{tr}J_f(\vec{x}_\infty) < 0$ y $\det J_f(\vec{x}_\infty) > \text{tr}J_f(\vec{x}_\infty) \cdot a_2$, donde a_2 es la suma de los determinantes de las menores principales de $J_f(\vec{x}_\infty)$. Lo expuesto anteriormente se conoce como las condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz para sistemas 3×3 . Una descripción buena y precisa del problema de Routh-Hurwitz se puede encontrar en [5].

Ejemplo 15. *Si por ejemplo queremos determinar el tipo de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (21), entonces, para el caso del equilibrio trivial $(0, 0)$, se tiene que el determinante $\det J(0, 0) = -\lambda\mu < 0$, en consecuencia el punto estacionario es inestable. Por otra parte, no se puede determinar la naturaleza del equilibrio $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$ con el Teorema 5 debido a que la traza se anula.*

Definición 6. *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se denomina positivamente invariante asociado al sistema (20) si para todo $\vec{x}(0) \in S$ se cumple que $\vec{x}(t) \in S$ para todo $t > 0$.*

En otras palabras, ninguna solución que comience dentro de S podrá salir de S en el futuro. De manera análoga se puede definir el conjunto negativamente invariante.

Definición 7. *Sea $\vec{x}(t)$ una solución que es acotada cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que esa solución es periódica si $C^+ = \{\vec{x}(t) : t \geq 0\}$ es una curva cerrada.*

El siguiente resultado nos proporciona un criterio para determinar cuando no existen soluciones periódicas en un sistema de ecuaciones autónomas.

Teorema 10 (Criterio de Dulac). Sea \mathcal{D} un conjunto simplemente conexo en el plano y además,

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y).$$

es un sistema autónomo en \mathcal{D} . Entonces, el sistema no posee soluciones periódicas si existe una función escalar $\varphi \in C^1(\mathcal{D})$ tal que,

$$\frac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi f_2)}{\partial y}$$

no cambia de signo en \mathcal{D} .

Demostración. Procedemos por contradicción, es decir, supongamos que existe una órbita periódica contenida en \mathcal{D} . Sea γ la órbita periódica con período τ . Por otra parte, por hipótesis se tiene la existencia de la función escalar ϕ , entonces se puede definir un campo vectorial $(x, y) \mapsto (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot ds &= \int_0^{\tau} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \cdot dt, \\ &= \int_0^{\tau} [-\phi \cdot f_2 \cdot f_1 + \phi \cdot f_1 \cdot f_2] \cdot dt = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea \mathcal{D}^* la región contenida en \mathcal{D} la cual está limitada por la curva γ . Note que \mathcal{D}^* es simplemente conexo debido a que \mathcal{D} es simplemente conexo y además $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$. Entonces, por el Teorema de Green tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot ds &= \iint_{\mathcal{D}^*} \frac{\partial(\phi f_1)}{\partial x} - \frac{\partial(-\phi f_2)}{\partial y} dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}^*} \frac{\partial(\phi f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi f_2)}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Debido a que \mathcal{D}^* posee área positiva y además, la función en el integrando posee signo constante, la integral anterior es diferente de cero. Lo cual contradice lo hallado en el cálculo anterior. En conclusión, el sistema autónomo no posee soluciones periódicas en \mathcal{D} .