

Artículo de investigación

Diseño de un controlador general basado en Lyapunov para el péndulo con rueda de reacción: Un caso de estudio en simulación

General Lyapunov-based control design for a reaction wheel pendulum: A simulation study case

Oscar Danilo Montoya  , Walter Gil-González², Andrés Leonardo Jutinico³ 

¹Electrical Engineer, Master in Electrical Engineering, and Ph.D. in Engineering. Grupo de Compatibilidad e Interferencia Electromagnética (GCEM), Facultad de Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá 110231, Colombia.

²Electrical Engineer, Master in Electrical Engineering, and Ph.D. in Engineering. Department of Electrical Engineering, Facultad de Ingeniería, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira 660003, Colombia.

³Electronic Engineer, Master in Industrial Automation, and Ph.D. in Mechanical Engineering. Programa de Ingeniería Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá 110231, Colombia.

Recepción: 11-feb-2024 **Aceptado:** 5-mayo-2024 **Publicado:** 23-julio-2024

Cómo citar: Montoya Giraldo, O. D., Gil-González, W., & Jutinico-Alarcón, A. L. (2024). General Lyapunov-based control design for a reaction wheel pendulum: A simulation study case. *Ciencia en Desarrollo*, 15(2). <https://doi.org/10.19053/uptc.01217488.v15.n2.2024.17198>

Resumen

En este artículo se aborda el problema de control sobre un péndulo con rueda de reacción (RWP) a partir un diseño de control no lineal que se fundamenta en la teoría de estabilidad de Lyapunov. En primer lugar, se realiza el análisis de estabilidad de pequeña señal (método de linealización por series de Taylor) alrededor de los puntos de equilibrio del sistema en lazo abierto, lo que resulta para la posición vertical superior del RWP en un punto inestable de tipo silla, mientras que para la parte vertical inferior resulta en un foco estable. En segundo lugar, se diseña un controlador no lineal a partir de una función candidata de Lyapunov para diseñar el sistema de control en lazo cerrado, lo que genera una ley de control generalizada para el sistema con estructura no lineal que convierte el punto de equilibrio en la posición vertical superior en un foco estable. Validaciones numéricas demuestran que el diseño del controlador estabiliza el sistema en su punto de equilibrio entre los 400 ms y los 600 ms, lo que depende de las incertidumbres paramétricas del RWP y las variaciones de los parámetros de control. La principal contribución de este artículo corresponde a la generalización de la ley de control que, en función de los parámetros seleccionados puede resultar en una linealización exacta de las variables de estado o en un controlador no lineal generalizado para el RWP. Las validaciones computacionales se realizan en el software MATLAB, empleando el equivalente discreto del sistema con derivada hacia adelante.

Palabras Clave: Diseño de control no lineal; control basado en Lyapunov; foco estable; incertidumbre paramétrica; ley de control general; péndulo con rueda de reacción.

Abstract

This article addresses the control problem on a reaction wheel pendulum (RWP) using a control design supported by Lyapunov stability theory. Firstly, a stability analysis using the small signal theory (the linearization approach via Taylor's series) around the RWP equilibrium points considering the open-loop operation case. This analysis defines that the system has a sink unstable equilibrium point in the upright position, while the equilibrium point is a stable focus in the downright place. Secondly, a nonlinear controller is designed using a Lyapunov candidate function to obtain a stable focus on the upright position during its closed-loop operation. Numerical validations demonstrate that the proposed controller stabilizes the RWP system between 400 ms and 600 ms, which depends on the parametric uncertainties of the system parameters and variations in the control parameters. The main contribution of this article corresponds to the generalization of the control law, which, as a function of the selected parameters, could result in an exact feedback linearization approach or a nonlinear generalized control approach for the RWP. Computational validations were made in MATLAB software using the discrete equivalent of the dynamic system via the ahead derivative method.

Keywords: Nonlinear control design; Lyapunov-based control approach; stable focus; parametric uncertainties; general control law; reaction wheel pendulum.

1. Introducción

Los sistemas dinámicos están presentes en muchos procesos de nuestra vida cotidiana, tanto a nivel comercial como industrial. Estos sistemas, a menudo complejos y no lineales, requieren controles efectivos para llevar a cabo tareas específicas [1]. Para diseñar un control efectivo, se requiere realizar investigación y desarrollo de estrategias novedosas las cuales pueden ser aplicadas a sistemas dinámicos lineales y no lineales. Sin embargo, estos controles antes de ser implementados en los sistemas reales son evaluados en sistemas de prueba con características similares a los sistemas reales [2]. Estos sistemas de prueba o prototipo juegan un papel fundamental en la validación del desempeño de los controles ya que permiten comprender el comportamiento de estos sistemas dinámicos y así los control pueden ser simplificados y ajustados más fácilmente en el momento de su implementación [3]. Ejemplo claro de este proceso es la aplicación de los controles en un péndulo, ya que es un sistema pequeño pero de alta complejidad y permite evaluar la efectividad de los controladores. Existen varios tipos de péndulo como los son: rueda de reacción, Pendubot, Acrobot, entre otros [4]. Estos tipos de péndulos permiten emular los retos de sistemas dinámicos complejos reales, como: máquinas síncronas conectadas a un barraje infinito, drones, robots (caminantes o móviles), cohetes, aeronaves, entre otros [5, 6].

El péndulo con rueda de reacción (RWP) es uno de los péndulos más estudiados debido a su complejidad dinámica y su versatilidad en aplicaciones prácticas y académicas. Este péndulo es un variedad del péndulo simple, el cual consiste en una masa suspendida de un punto fijo. El RWP fue propuesto por Spong en [5] incorporando una rueda de inercia que puede rotar alrededor de su propio eje. Esta rueda genera nuevos elementos dinámicos y comportamientos no lineales en el sistema, lo que lo convierte en un objeto de estudio fascinante para investigadores y académicos en campos como la ingeniería, la física y la robótica [7]. Esto es debido que este péndulo enfrenta dos principales desafíos. El primer desafío (local) radica en garantizar la estabilidad del péndulo en el punto de equilibrio [8]. Mientras que el segundo desafío radica en elevar o subir el péndulo desde su posición inicial o de reposo (abajo) hasta su punto de equilibrio (arriba). Este desafío también es conocido como balanceo o "swing-up" [9]. El segundo desafío prácticamente se encuentra ya resuelto y ha sido resuelto exitosamente usando estrategias de control basadas en energía [7, 10, 11].

Con el objetivo de abordar el primer desafío mencionado para el RWP, se han propuesto diversos controladores lineales y no lineales. Los controladores lineales pueden ser efectivos cuando se diseñan cerca del punto de equilibrio, utilizando métodos de linealización como series de Taylor o aproximaciones trigonométricas [12, 13]. Aunque estas linealizaciones son altamente efectivas en las proximidades del punto de equilibrio, la estabilidad de estos controladores se ve comprometida cuando el RWP se ve afectado por disturbios o eventos externos que lo alejan de su punto de equilibrio, lo que invalida la aproximación lineal [14]. Para evitar estos posibles problemas de estabilidad, se han propuesto controladores no lineales que ofrecen un buen rendimiento y pueden operar en puntos alejados del equilibrio del sistema. Estos

controladores incluyen la linealización exacta o parcialmente retroalimentada [15], control deslizante de funciones [16], lógica difusa [17], control basado en pasividad [14], redes neuronales artificiales [9], control óptimo [4], control robusto [18] y control basado en Lyapunov [7], entre otros. A pesar de que estos controladores han demostrado un buen desempeño en diversas condiciones de simulación, algunos de ellos no garantizan la estabilidad o pueden presentar problemas de oscilación cerca del punto de equilibrio. Otros controladores requieren una sintonización metódica de múltiples parámetros o reglas de operación, lo cual puede dificultar su implementación. Además, algunos controladores necesitan realizar optimizaciones en tiempo real, lo que puede ser problemático debido a los altos requisitos de hardware y precisión [13]. Si bien es cierto que algunos de estos controladores aseguran la estabilidad del sistema en lazo cerrado, su implementación puede ser compleja.

En la Tabla 1 se presenta un resumen de las principales metodologías de control aplicadas al diseño de controladores para el RWP.

De la Tabla 1 se destaca que, aunque es un sistema dinámico clásico, este continúa siendo un sistema de gran interés en la literatura científica en la validación de metodologías de control con propiedades de estabilización locales y globales. Considerando la revisión del estado del arte y el resumen de metodologías de control presentado en la Tabla 1, en este artículo se presentan las siguientes contribuciones:

- i. El diseño de un controlador general basado en una función candidata de Lyapunov para el RWP que permite convertir el punto de equilibrio inestable de la barra en su posición vertical superior de un comportamiento tipo silla a un comportamiento tipo foco estable.
- ii. En análisis en simulación considerando incertidumbre paramétrica en las constantes del RWP, así como teniendo en cuenta variaciones de las ganancias de control, con el objetivo de estudiar su efecto en los tiempos de establecimiento del sistema.

Es importante mencionar que, a diferencia del diseño de control basado en Lyapunov presentado por los autores de [7], en este trabajo se generaliza el diseño de control a través de una función candidata de Lyapunov, que permite, según la selección de las constantes de control, obtener una ley de control que: (i) puede ser obtenida a partir del método de linealización exacta de las variables de estado (ver Ref. [22]), (ii) equivalente a la formulación de Lyapunov dada por los autores de [7], o (iii) una familia de controladores no lineales que garantizan un comportamiento estable para el RWP en su posición de equilibrio vertical superior.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: La sección 2 presenta el modelo dinámico del RWP mientras que la sección 3 calcula sus puntos críticos. La sección 4 describe el diseño del control para el RWP basado en la teoría de Lyapunov. La sección 5 realiza las validaciones numéricas del control propuesto y un análisis perimétrico. Finalmente, la sección 6 presenta las conclusiones más importantes de este trabajo, así como también los posibles trabajos futuros.

Tabla 1: Principales métodos de control aplicados al RWP

Metodología de diseño del controlador	Local	Gobal	Año	Ref.
Control no lineal basado en realimentación de las variables de estado	✓		2001	[5]
Control mediante linealización exacta de las variables de estado	✓		2007	[12]
Control basado en lógica difusa	✓		2013	[12]
Linealización exacta de las variable de estado y funciones de energía		✓	2014	[6]
Control difuso usando seguimiento de trayectoria		✓	2017	[13]
Control basado en linealización extendida de las variables de estado y redes neuronales	✓		2017	[9]
Control por realimentación de variables de estado empleando funciones de Lyapunov		✓	2020	[7]
Control óptimo inverso mediante relimentación pasiva	✓		2020	[4]
Control óptimo inverso empleando funciones de Lyapunov	✓		2020	[19]
Estabilización por realimentación de salida mediante control activo de rechazo de perturbaciones		✓	2023	[20]
Control proporcional-integral-derivativo y linealización de las variables de estado		✓	2024	[21]

2. Modelo dinámico del RWP

La representación esquemática del RWP se presenta en la Figura 1, donde se presentan las principales variables de este sistema, es decir, la posición angular de la barra pendular respecto del eje vertical, i.e., φ , la posición relativa del ángulo de la rueda respecto del eje móvil asociado al péndulo, i.e., α . La posición angular relativa de la rueda de reacción se define sobre el marco de referencia fijo como θ . Nótese que $\theta = \alpha + \varphi$. Además, se muestra el efecto del torque aplicado por el motor conectado a la rueda de reacción, el cual se define como τ .

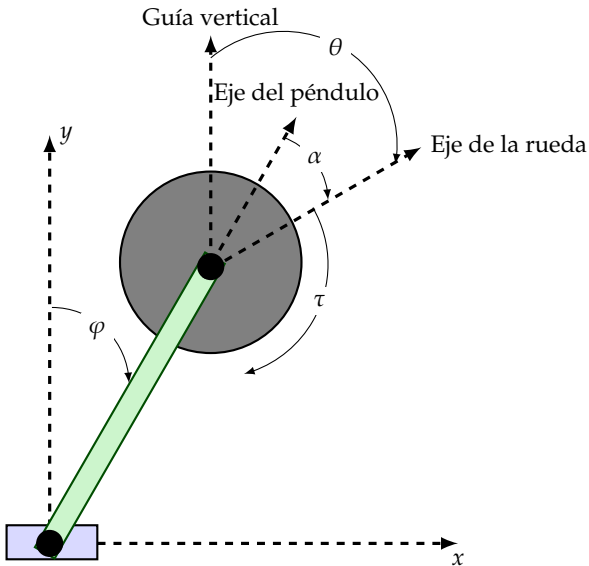


Figura 1: Representación del péndulo con rueda de reacción en dos dimensiones

Según los autores de [13], el modelo dinámico del péndulo con rueda de reacción se define según se presenta el sistema de ecuaciones dado por (1).

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= a \sin(\varphi) - bu - \sigma\dot{\varphi}, \\ \ddot{\theta} &= cu, \end{aligned} \quad (1)$$

donde a , b y c son constantes relacionadas con los parámetros físicos del sistema y σ define el coeficiente de fricción dinámica del péndulo con el aire. Para la implementación del diseño de control, dado que el comportamiento de la variable θ se define como la integral doble de la entrada de control, no es necesario incluirla en la representación de la variable de estado como se recomienda en [7]. Con el objetivo de obtener la representación equivalente del péndulo en términos de las variables de estado, se define $x_1 = \varphi$ y $x_2 = \dot{x}_1$. Con lo anterior, la primera Ecuación de (1), se representa como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a \sin(x_1) - bu - \sigma x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Nótese que el sistema dinámico dado en (2) corresponde a un sistema no lineal de segundo orden con infinitos puntos de equilibrio cíclicos cuando la entrada de control es nula, i.e., $u = 0$, los cuales se dan cuando $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$, es decir, $x_k^* = (k\pi, 0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Estos puntos de equilibrio son cíclicos, ya que el movimiento del RWP se da sobre un plano circular, con lo cual, los puntos de equilibrio se dan en la parte vertical superior y vertical inferior de la Figura 1, i.e., $p_1(0, 0)$ y $p_2(\pi, 0)$, respectivamente.

3. Puntos de equilibrio y estabilidad en lazo abierto

Con el fin de determinar el comportamiento del RWP alrededor de sus puntos de equilibrio, considere el siguiente teorema, aplicable a puntos de equilibrio alrededor de su punto de operación:

Teorema 1 (Estabilidad alrededor del punto de equilibrio)

El sistema dinámico (2) linealizado alrededor de sus puntos de equilibrio en lazo abierto, i.e., $\Delta\dot{x} = A\Delta x$, siendo A la matriz Jacobiana del sistema, se tiene que [23, 24]:

- En p_1 : Si $\det(A) < 0$, entonces el sistema dinámico tiene un punto de silla.
- En p_2 , si $\det(A) > 0$, $\text{trace}^2(A) - 4\det(A) < 0$, y $\text{trace}(A) < 0$ entonces el sistema dinámico tendrá un foco estable.

Demostración 1 La matriz A para el sistema dinámico dado en (2) toma la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a \cos(x_1^*) & -\sigma \end{bmatrix}, \quad (3)$$

siendo x_1^* el punto de equilibrio asociado a la variable de estado x_1 . Teniendo en cuenta los operadores determinante y traza (ver Ref. [23]), se tiene:

$$\det(A) = -a \cos(x_1^*), \quad (4)$$

$$\text{traza}(A) = -\sigma, \quad (5)$$

Por lo tanto, al evaluar las condiciones del Teorema 1 en los puntos de equilibrio p_1 y p_2 , se tiene:

- En p_1 , $x_1^* = 0$, con lo cual: $\det(A) = -a < 0$, lo que confirma que este es un punto de silla inestable.
- En p_2 , $x_1^* = \pi$, con lo cual: $\det(A) = a > 0$, como la traza es constante y negativa, i.e., $\text{traza}(A) = -\sigma$, se verifica que $\text{traza}^2(A) - 4\det(A) = \sigma^2 - 4a < 0$ (ya que el parámetro a es mucho mayor que el coeficiente de fricción σ), lo que confirma que este es foco estable.

Con el objetivo de ilustrar gráficamente el comportamiento del RWP, se toman los valores reportados en [22], para los parámetros a , b y c son 78,4, 1,08 y 198, respectivamente. Además, para efectos de simulación, se asume un coeficiente de fricción $\sigma = 10$ (únicamente para efectos ilustrativos), con lo cual se obtienen los resultados presentados en las Figuras 2 y 3.

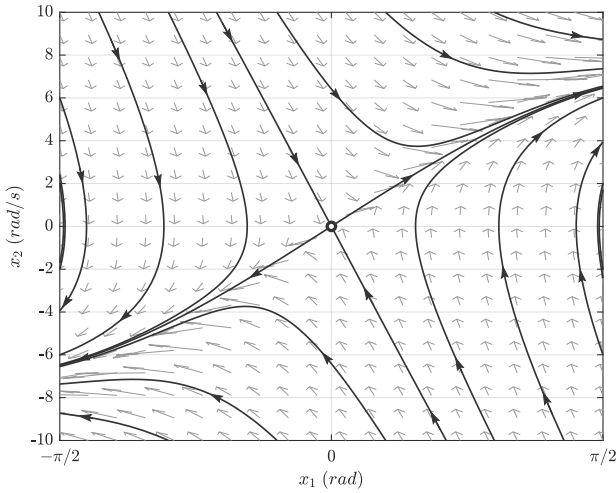


Figura 2: Comportamiento del RWP alrededor de p_1 (punto de silla inestable).

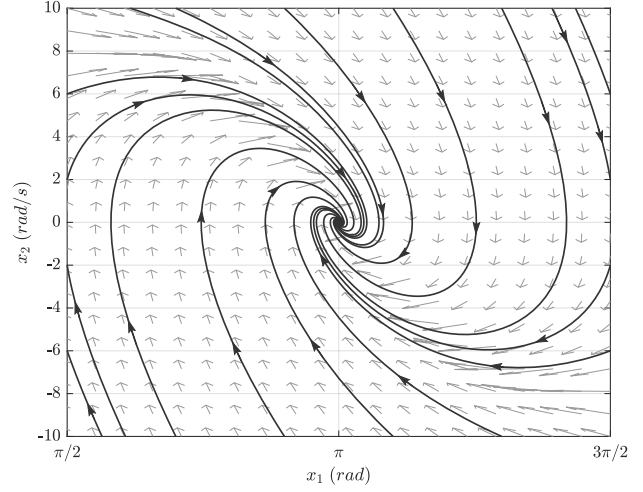


Figura 3: Comportamiento del RWP alrededor de p_2 (foco estable).

Observación 1 En caso de que el coeficiente de fricción sea despreciado, i.e., $\sigma = 0$, el comportamiento del punto de equilibrio p_1 no cambia y permanece siendo un punto de silla inestable; sin embargo, para el caso del punto p_2 este pasaría de ser un foco estable a un centro [23].

Por otro lado, teniendo en cuenta el comportamiento dinámico del RWP alrededor de los puntos de operación p_1 y p_2 , el objetivo de diseño de un controlador para este sistema, radica en encontrar una ley de control u , tal que el punto de silla en p_1 se convierta en un punto de equilibrio estable, es decir, un foco o un nodo estable [7]. Para esto, en la siguiente sección se plantea el diseño de control a través de la teoría Lyapunov.

4. Diseño de control basado en Lyapunov

La teoría de Lyapunov es ampliamente conocida en el área de control, ya que es una herramienta robusta para probar estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas dinámicos no lineales [25]. Esta teoría es extendida al área de control, con el objetivo de determinar la forma que debe tomar una ley de control u , para llevar un punto de equilibrio inestable en lazo abierto a una operación estable en lazo cerrado [7]. La principal dificultad de esta teoría radica en la selección de la función de Lyapunov, i.e., $V(x_1, x_2)$ para el caso de estudio, tal que en el punto de equilibrio $p(x_1^*, x_2^*)$ se cumplan las condiciones enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 2 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Sea $V(x_1, x_2)$ una función candidata de Lyapunov, entonces el punto de equilibrio $p(x_1^*, x_2^*)$ será estable, si y solo si:

- i. $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (x_1^*, x_2^*),$
 $V(x_1^*, x_2^*) = 0$ y
- ii. $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

Observación 2 El Teorema 2 quiere decir, que una punto de equilibrio es estable, si la función candidata de Lyapunov $V(x_1, x_2)$

es definida positiva para todo punto en \mathbb{R}^2 , nula en el punto de equilibrio, y su derivada temporal es semidefinida negativa en \mathbb{R}^2 .

Es importante mencionar que aunque pueden existir múltiples funciones de Lyapunov que permitan cumplir las condiciones del Teorema 2, el reto principal de esta teoría radica encontrar por lo menos una función candidata que lo cumpla. A continuación, se presenta el desarrollo de una estrategia de control a partir de la teoría de Lyapunov.

4.1. Diseño del controlador

Para obtener una ley de control u que satisfaga el Teorema 2 alrededor del punto de equilibrio $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$, es decir, en la posición vertical superior de la barra, considere la función candidata de Lyapunov dada en la Ecuación (6).

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2) + \gamma \sin^2\left(\frac{1}{2}x_1\right), \quad (6)$$

donde los parámetros α , β y γ se definen en el conjunto de los números reales positivos (estos son parámetros de diseño del controlador). Nótese que $V(x_1, x_2)$ en (6) cumple la primera condición del Teorema 2, ya que $V(0, 0) = 0$ y $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (x_1^*, x_2^*)$. La forma de esta función candidata de Lyapunov se presenta en la Figura 4 (donde se asumen valores unitarios para α , β y γ , únicamente con fines ilustrativos).

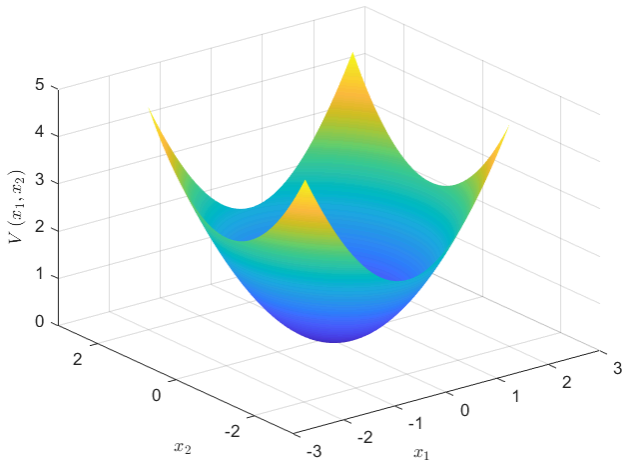


Figura 4: Función candidata de Lyapunov definida en (6)

Ahora, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov dada en (6), se presenta a continuación:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \alpha x_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \gamma \sin(x_1) \dot{x}_1, \quad (7)$$

Para determinar, si la Ecuación (7) cumple con la segunda condición del Teorema 2, se requiere sustituir el sistema dinámico dado en (2) y realizar algunas manipulaciones algebraicas. Para esto, en primer lugar se define la ley de control, según la Ecuación (8)

$$u = \frac{1}{b} (a \sin(x_1) - v - \sigma x_2), \quad (8)$$

siendo v una variable auxiliar de control, con lo que al sustituir en (7), se tiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + \beta x_2 v + \frac{1}{2} \gamma \sin(x_1) x_2, \quad (9)$$

de la cual se puede definir la variable auxiliar de control v como sigue:

$$v = -\alpha x_1 - \delta x_2 - \frac{1}{2} \gamma \sin(x_1). \quad (10)$$

Ahora, si el parámetro β se define como la unidad, i.e., $\beta = 1$, entonces al sustituir la ley de control auxiliar dada en (10) en la derivada temporal de la función de Lyapunov (9), se obtiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\delta x_2^2 \quad (11)$$

lo cual confirma la segunda condición del Teorema 2 si y sólo el parámetro $\delta > 0$, con lo cual el punto de equilibrio será estable, siendo la derivada temporal de la función de Lyapunov, la que se muestra en la Figura 5.

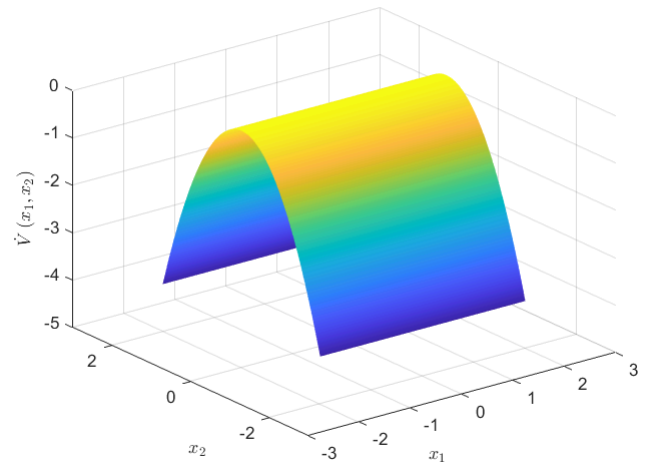


Figura 5: Derivada de la función candidata de Lyapunov definida en (6)

Observación 3 La ley de control obtenida para este esquema de control toma la forma (12)

$$u = \frac{1}{b} ((\eta + 1) a \sin(x_1) + \alpha x_1 + (\delta - \sigma) x_2), \quad (12)$$

donde γ se ha definido como $2(\eta + 1)a$, siendo η una constante positiva.

Observación 4 En el diseño de controladores no lineales para sistemas dinámicos utilizando funciones de Lyapunov, es posible encontrar una amplia variedad de funciones que aseguran la estabilización del sistema [23]. Por lo tanto, la elección de la función de Lyapunov adecuada depende de los requisitos específicos del diseño del controlador y de las condiciones de operación en lazo cerrado que se deseen satisfacer.

4.2. Análisis en lazo cerrado

En esta subsección se presenta el análisis de la estabilidad para el RWP dado en (2), cuando le es aplicada la ley de

control dada en (12). El sistema en lazo cerrado, toma la forma dada en (13).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\eta a \sin(x_1) - \alpha x_1 - \delta x_2. \end{aligned} \quad (13)$$

cuyo único punto de equilibrio está dado en el origen, i.e., $p_1(x_1^*, x_2^*) = p_1(0, 0)$.

Linealizado el sistema dinámico en lazo cerrado dado en (13), se tiene la matriz de lazo cerrado A_{lc} que se muestra:

$$A_{lc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\eta a \cos(x_1^*) - \alpha & -\delta \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Aplicando el Teorema 1 a la matriz A_{lc} , se tiene que para el punto de equilibrio: $\det(A_{lc}) = \eta a \cos(x_1^*) + \alpha = \eta a + \alpha > 0$, además, $\text{tr}(A_{lc}) = -\delta$ y $\text{tr}^2(A_{lc}) - 4\det(A_{lc}) = \delta^2 - 4(\eta a + \alpha) < 0$ (si y sólo si $4(\eta a + \alpha) > \delta^2$, lo cual se logra definiendo adecuadamente los parámetros de control α , η y δ). Lo anterior, implica que el punto de equilibrio en lazo cerrado corresponde a un foco, ya que se cumple la segunda condición del Teorema 1.

Para ilustrar la condición anterior, se realiza el retrato de fase para el sistema dinámico de lazo cerrado dado en (13), definiendo por simplicidad para la gráfica, η se asigna en 1, mientras que α y δ toman el valor de 10. En la Figura 6 se presenta el comportamiento del RWP en lazo cerrado, que demuestra gráficamente que el punto de equilibrio en la parte vertical superior es un foco estable.

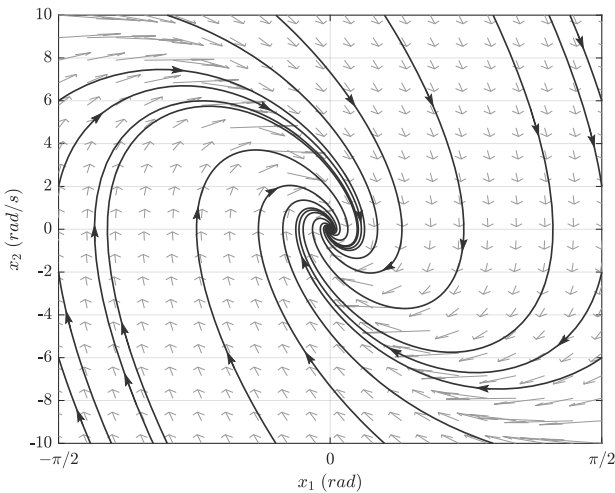


Figura 6: Comportamiento del RWP alrededor de p_1 en lazo cerrado (foco estable).

4.3. Generalización de la ley de control

Una contribución fundamental de este trabajo corresponde a la generalización de la ley de control definida en términos de las ganancias de control α , δ y η , como se observa en (12). Con lo cual, se pueden obtener una familia de controladores,

que en un caso corresponde al método de linealización exacta presentado en [22], y otro caso al controlador basado en Lyapunov presentado en [7].

Para el caso de la linealización exacta propuesta por los autores de [22], se selecciona el parámetro η en cero, $\alpha = k_1$ y $\delta = \sigma + k_2$ lo cual produce la ley de control definida en (15)

$$u = \frac{1}{b} (a \sin(x_1) + k_1 x_1 + k_2 x_2), \quad (15)$$

En el caso del controlador basado en Lyapunov presentado por los autores de [7], se selecciona el parámetro η como la unidad, mientras que los parámetros α y δ toman la misma forma del caso anterior, con lo cual se obtiene la ley de control dada en (16)

$$u = \frac{1}{b} (2a \sin(x_1) + k_1 x_1 + k_2 x_2), \quad (16)$$

Observación 5 Nótese que la ley de control dada en (12) es, por tanto, una ley de control general que produce una familia de controladores no lineales para el RWP, que además, puede ser ajustada en función de los requerimientos de la planta y el desempeño dinámico requerido.

5. Validaciones numéricas en simulación

En este apartado, se presentan las validaciones numéricas para el RWP considerado los parámetros a , b y c definidos en la Sección 2. Sin embargo, es importante tener en cuenta, que aunque la ley de control es global, teniendo en cuenta las características del RWP descritas en [26], se asumen que la ley de control admisible se aplica en el rango de $-10 \leq u \leq 10$. Teniendo en cuenta lo anterior, se plantean dos escenarios de simulación, como sigue:

- i. Se asume que los parámetros del RWP, i.e., a , b y c son perfectamente conocidos y no presentan incertidumbre. Se seleccionan las ganancias de control α , β y η como 3500, 135 y 1 (ver referencia [19]). Se realizan variaciones aleatorias en un rango de $\pm 20\%$ alrededor de estos valores y se obtiene el desempeño de las variables de estado respecto del tiempo.
- ii. Se fijan los valores de las ganancias de control α , β y γ como 3500, 135 y 1, respectivamente, y se realizan variaciones perimétricas a los parámetros del RWP a y b en $\pm 5\%$ respecto de su valor nominal de manera aleatoria y se obtiene el desempeño de las variables de estado respecto del tiempo.

Nótese que para los dos primeros escenarios, se asume que el RWP se ha llevado a una región cercana al punto de equilibrio en la posición vertical superior, esto es, $x_1^0 = 7^\circ$ y $x_2^0 = 0$ rad. Además, se considera que el coeficiente de fricción dinámica con el aire es despreciable, es decir, $\sigma = 0$.

Observación 6 Para facilitar el proceso de simulación, el sistema dinámico dado en (2) y la ley de control presentada en (12) son discretizadas, mediante el método de derivada hacia adelante [4],

con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} x_{1,h} &= \Delta_h x_{2,h-1} + x_{1,h-1}, \\ x_{2,h} &= \left[\begin{array}{c} \Delta_h (a \sin(x_{1,h-1}) - bu_{h-1} - \sigma x_{2,h-1}) \\ + x_{2,h-1} \end{array} \right], \\ u_{h-1} &= \frac{1}{b} \left[\begin{array}{c} (\eta + 1) a \sin(x_{1,h-1}) + \\ \alpha x_{1,h-1} + (\delta - \sigma) x_{2,h-1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

5.1. Variación de ganancias del controlador

En este escenario se realizan variaciones sobre las ganancias de control, con el fin de observar su efecto en la dinámica del sistema. Estas variaciones se dan en un rango de $\pm 20\%$ respecto de sus valores de referencia. Nótese que el sistema dinámico simulado para este escenario corresponde al definido en (18).

$$\begin{aligned} x_{1,h} &= \Delta_h x_{2,h-1} + x_{1,h-1}, \\ x_{2,h} &= \Delta_h (a \sin(x_{1,h-1}) - bu_{h-1} - \sigma x_{2,h-1}) + x_{2,h-1}, \\ u_{h-1} &= \frac{1}{b} \left[\begin{array}{c} (\eta + \tilde{\eta} + 1) a \sin(x_{1,h-1}) + \\ (\alpha + \tilde{\alpha}) x_{1,h-1} + \\ ((\delta + \tilde{\delta}) - \sigma) x_{2,h-1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\delta}$ representan las variaciones de las ganancias de control α y β en el rango de $\pm 20\%$ siendo estos generados con una distribución de probabilidad uniforme. En las Figuras 7, 8 y 9 se presenta el comportamiento dinámico de la posición angular de la barra pendular, su velocidad, y la señal de control aplicada, respectivamente. El sistema simulado en este caso corresponde al definido en (??).

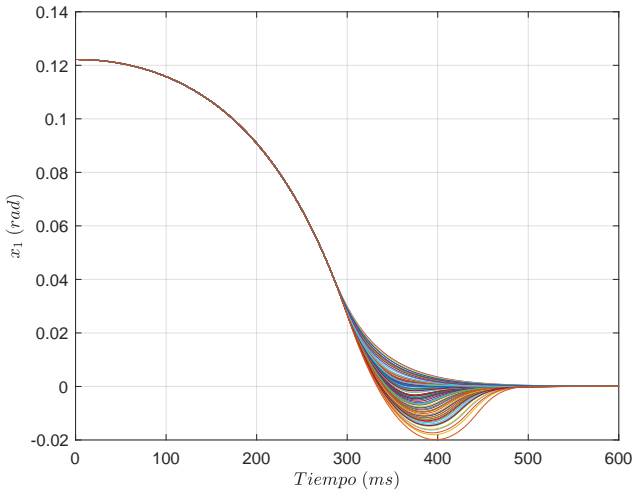


Figura 7: Posición angular del RWP en el primer escenario

Del comportamiento dinámico de las variables de estado, así como de la ley de control dadas en la Figuras 7, 8 y 9, es posible notar que:

- i. Las variables de estado, i.e., la posición y la velocidad angular de la barra se estabilizan en sus valores de referencia entre los 400 ms y los 600 ms. Lo cual se debe a las variaciones de los parámetros de control

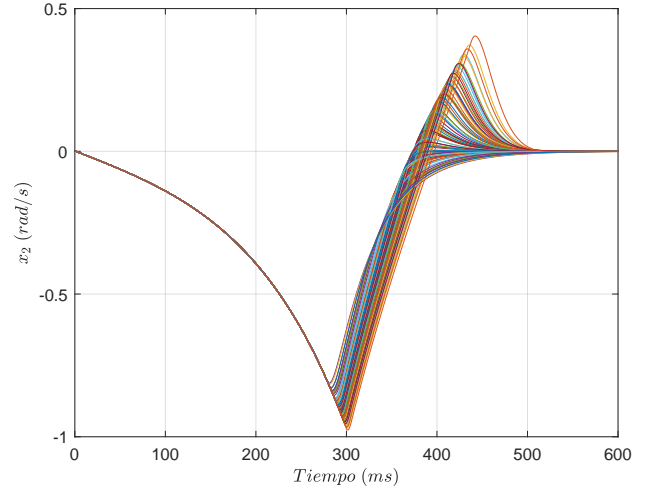


Figura 8: Velocidad angular del RWP en el primer escenario

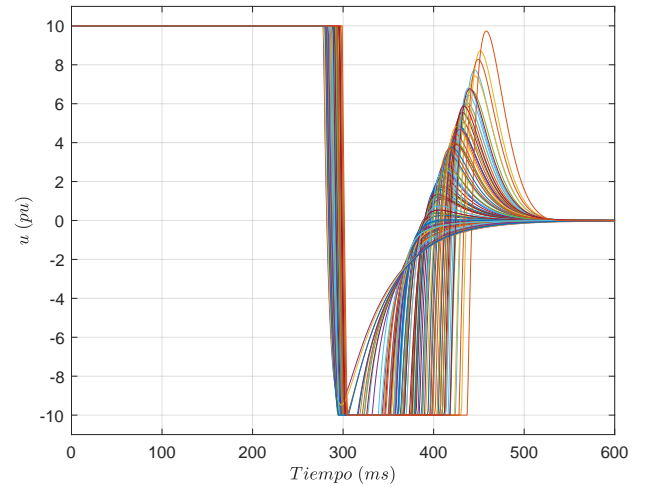


Figura 9: Señal de control aplicada al RWP en el primer escenario

aplicados a este sistema. En el caso de la posición angular de la barra, es posible observar que existen combinaciones de ganancias de control que generan una tendencia al punto de equilibrio sin oscilaciones, es decir, sin sobrepaso, que son aquellas para las cuales la barra pendular se estabiliza más rápido (ver Figura 7), i.e., alrededor de los 400 ms.

- ii. La respuesta dinámica de la velocidad muestra el comportamiento esperado para un sistema pendular (ver Figura 7), ya que esta inicialmente sufre una aceleración que aumenta su velocidad, lo que a su vez lleva el bazo pendular más cerca de su posición de equilibrio. Luego, esta se desacelera, lo que produce una reducción en la velocidad, hasta hacerse nula en el punto de equilibrio. Nótese que existen combinaciones de parámetros en las ganancias de control, para las cuales la velocidad del péndulo cambia de signo, lo que implica que, un sobrepaso respecto del punto de

referencia de interés, con lo cual, el péndulo debe ser acelerado en el otro sentido de movimiento, para hacer que este llegue nuevamente a su punto de referencia.

- iii. En cuanto a la dinámica de la ley de control presentada en la Figura 9, se observa que: (a) esta se encuentra en saturación durante los primeros 300 ms, es decir, la rueda de reacción se acelera hasta alcanzar su velocidad nominal (saturación para $u = +10$ pu), y se mantiene constante, posteriormente esta es desacelerada y cambia su sentido de giro (saturación para $u = -10$ pu), con el fin de frenar la velocidad de rotación de la barra pendular, y (b) después de los 400 ms se observa una variación de la velocidad de rotación de la rueda (equivalente a la ley de control), tal que si existen sobrepasos en el punto de equilibrio del péndulo está cambia de signo, en caso contrario, esta converge a cero, cuando se han regulado las variables de estado del RWP en su punto de operación.

5.2. Variación de los parámetros del RWP

En este escenario de simulación se analiza el caso en el que los parámetros del RWP varían para la planta, i.e., a y b cambian respecto de su valor medio en $\pm 5\%$; sin embargo, estas variaciones solo aplican a la planta, ya que el controlador trabaja con sus valores medios esperados. Esto se muestra matemáticamente en (19).

$$\begin{aligned} x_{1,h} &= \Delta_h x_{2,h-1} + x_{1,h-1}, \\ x_{2,h} &= \begin{bmatrix} \Delta_h \left((a + \tilde{a}) \sin(x_{1,h-1}) - (b + \tilde{b}) u_{h-1} \right) \\ -\Delta_h (\sigma + \tilde{\sigma}) x_{2,h-1} + x_{2,h-1} \end{bmatrix}, \\ u_{h-1} &= \frac{1}{\tilde{b}} \left[(\eta + 1) a \sin(x_{1,h-1}) + \right. \\ &\quad \left. \alpha x_{1,h-1} + (\delta - \sigma) x_{2,h-1} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

La variación dinámica de la posición y velocidad angular, así como la entrada de control para este escenario son presentadas en las Figuras 10, 11 y 12. De este comportamiento dinámico, se puede observar que:

- i. La posición y velocidad angular de la barra (ver Figuras 10 y 11) presentan variaciones importantes en los tiempos de estabilización. En el caso de la posición angular, estos tiempos están comprendidos entre los 400 ms y los 550 ms en promedio, mientras que para la velocidad de rotación de la barra están entre los 400 ms y los 600 ms.
- ii. En el caso de la ley de control, la saturación de está en ambos extremos se extiende en algunos un poco más de 400 ms en el extremo positivo y hasta un poco más de los 500 ms en el extremo negativo, para luego alcanzar su valor deseado en estado estable, i.e., $u_{ss} = 0$ en tiempos hasta de 600 ms.

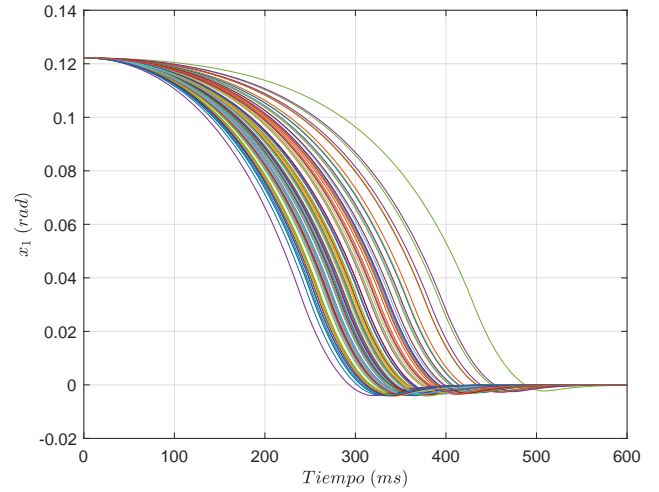


Figura 10: Posición angular del RWP en el segundo escenario

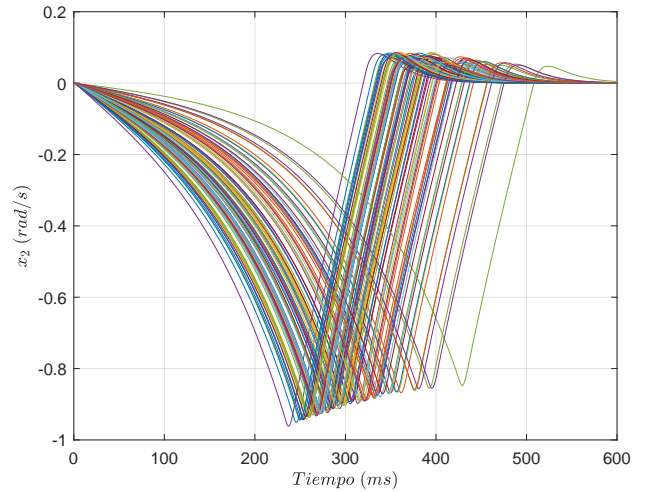


Figura 11: Velocidad angular del RWP en el segundo escenario

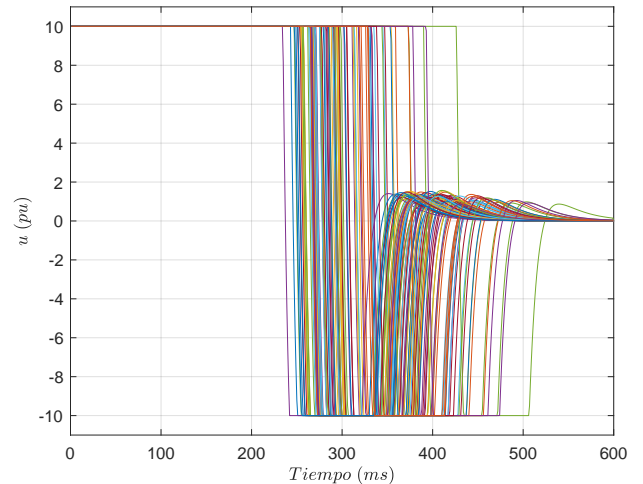


Figura 12: Señal de control aplicada al RWP en el segundo escenario

Observación 7 Comparando los resultados de simulación cuando se varían las ganancias de la ley de control y cuando existe incertidumbre paramétrica en las constantes asociadas al RWP, se puede notar que el segundo caso presenta mayores retos para el controlador, ya que los tiempos de estabilización pueden verse aumentados hasta en 100 ms para algunos escenarios de análisis.

Lo anterior puede ser considerado como una posibilidad de investigación futura en la que se consideren directamente las variaciones paramétricas en el diseño del controlador, con el fin de obtener una ley de control robusta que permita minimizar los tiempos de estabilización del sistema, así como ampliar su rango de operación.

6. Conclusiones

En este artículo se presentó un diseño general de control para el RWP basado en una función candidata de Lyapunov, que a través del teorema de estabilidad de Lyapunov, general un controlador no lineal que permite convertir el punto de equilibrio inestable tipo silla del RWP en lazo abierto, en un foco estable durante su operación en lazo cerrado. Además, el diseño de control propuesto es una generalización del método de linealización exacta de las variables de estado o del diseño de control no lineal que considera funciones de energía.

Simulaciones en el software MATLAB con el equivalente discreto del sistema dinámico empleando la derivada hacia adelante, muestran que cuando existen variaciones en las ganancias de la señal de control, los tiempos de estabilización de la planta pueden oscilar entre los 400 ms y los 500 ms; mientras que para el caso de incertidumbre paramétrica en las constantes de la planta, este tiempo de estabilización puede llegar hasta los 600 ms. Adicionalmente, para ambos casos de simulación, debido a las restricciones físicas del sistema simulado, la señal de control presenta saturaciones en sus extremos, lo que indica que se requiere de una estrategia de acercamiento al punto de equilibrio que suavice la entrada en funcionamiento del control propuesto.

Como investigaciones futuras de este trabajo, se recomiendan las siguientes: (i) proponer un diseño de control en tiempo discreto a partir de la metodología de control predictivo que permita optimizar las ganancias de control en función de los requerimientos de la planta y (ii) formular un controlador que considere la incertidumbre paramétrica del sistema el cual pueda ser robusto ante dinámicas no modeladas.

Declaración de conflicto de interés: Los autores manifiestan no tener conflictos de interés.

Referencias

- [1] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Always learning, Pearson Education, Limited, 2013.
- [2] E. N. Sanchez and F. Ornelas-Tellez, *Discrete-Time Inverse Optimal Control for Nonlinear Systems*. CRC Press Taylor and Francis Group, 2017.
- [3] S. J. Lee and T.-C. Tsao, "Repetitive learning of backstepping controlled nonlinear electrohydraulic material testing system," *Control Eng. Pract.*, vol. 12, no. 11, pp. 1393–1408, 2004.
- [4] O. D. Montoya, W. Gil-González, and F. Martín Serra, "Discrete-time inverse optimal control for a reaction wheel pendulum: a passivity-based control approach," *Revista UIS Ingenierías*, vol. 19, no. 4, pp. 123–132, 2020.
- [5] M. W. Spong, P. Corke, and R. Lozano, "Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum," *Automatica*, vol. 37, no. 11, pp. 1845 – 1851, 2001.
- [6] O. D. Montoya, L. F. Grisales-Noreña, V. D. Correa-Ramírez, and D. Giraldo-Buitrago, "Global control of reaction wheel pendulum through energy regulation and extended linearization of the state variables," *Tecnológicas*, vol. 17, no. 32, pp. 33–46, 2014.
- [7] O. D. Montoya and W. Gil-González, "Nonlinear analysis and control of a reaction wheel pendulum: Lyapunov-based approach," *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 23, no. 1, pp. 21–29, 2020.
- [8] D. J. Block, K. J. Åström, and M. W. Spong, "The reaction wheel pendulum," *Synthesis Lectures on Control and mechatronics*, vol. 1, no. 1, pp. 1–105, 2007.
- [9] O. D. Montoya, C. A. Ramírez, and L. F. Grisales, "Global Control of Reaction Wheel Pendulum Using Artificial Neural Networks and Extended Linearization," *Scientia et Technica*, vol. 22, no. 20, pp. 130–140, 2017.
- [10] K. Srinivas and L. Behera, "Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 39, no. 12, pp. 1165–1177, 2008.
- [11] B. Bapiraju, K. N. Srinivas, P. P. Kumar, and L. Behera, "On balancing control strategies for a reaction wheel pendulum," in *Proceedings of the IEEE INDICON 2004. First India Annual Conference, 2004.*, pp. 199–204, 2004.
- [12] J. G. Valenzuela, O. D. Montoya, and D. Giraldo-Buitrago, "Local control of reaction wheel pendulum using fuzzy logic," *Scientia et Technica*, vol. 18, no. 4, pp. 623–632, 2013.
- [13] V. D. Correa and D. G. A. Escobar, "Fuzzy control of an inverted pendulum Driven by a reaction wheel using a trajectory tracking scheme," *Tecnológicas*, vol. 20, no. 39, pp. 1–13, 2017.
- [14] O. D. Montoya, V. M. Garrido, W. Gil-González, and C. Orozco-Henao, "Passivity-Based Control Applied of a Reaction Wheel Pendulum: an IDA-PBC Approach," in *2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, pp. 1–6, 2019.
- [15] T. U. E. Faculty of Automatics, "Feedback linearization control of the inertia wheel pendulum," *Cybernetics and Information Technologies*, vol. 14, no. 3, pp. 96–109, 2014.
- [16] S. Irfan, A. Mehmood, M. T. Razzaq, and J. Iqbal, "Advanced sliding mode control techniques for Inverted Pendulum: Modelling and simulation," *Engineering*

- Science and Technology, an International Journal*, vol. 21, no. 4, pp. 753 – 759, 2018.
- [17] A. M. El-Nagar, M. El-Bardini, and N. M. EL-Rabaie, "Intelligent control for nonlinear inverted pendulum based on interval type-2 fuzzy PD controller," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 53, no. 1, pp. 23–32, 2014.
- [18] F. M. Escalante, A. L. Jutinico, M. H. Terra, and A. A. Siqueira, "Robust linear quadratic regulator applied to an inverted pendulum," *Asian Journal of Control*, vol. 25, no. 4, pp. 2564–2576, 2023.
- [19] O. D. Montoya, W. Gil-González, J. A. Dominguez-Jimenez, A. Molina-Cabrera, and D. A. Giral-Ramírez, "Global stabilization of a reaction wheel pendulum: A discrete-inverse optimal formulation approach via a control lyapunov function," *Symmetry*, vol. 12, no. 11, p. 1771, 2020.
- [20] S. Kharuf Gutiérrez, A. Ferreira de Loza, L. Aguilar, and L. Coria, "Output-feedback stabilization of the reaction wheel pendulum via active disturbance rejection control," *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, vol. 6, no. 1, pp. 223–228, 2023.
- [21] D. Zaborniak, K. Patan, and M. Witczak, "Design, implementation, and control of a wheel-based inverted pendulum," *Electronics*, vol. 13, no. 3, p. 514, 2024.
- [22] D. Giraldo Buitrago and V. D. Correa R., "Control local de un sistema no lineal: el péndulo con rueda de reacción," *Scientia et Technica*, vol. 1, no. 34, pp. 55–60, 2007.
- [23] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer New York, 2001.
- [24] A. Garcés-Ruiz, W. J. Gil-González, and O. D. Montoya-Giraldo, *Introducción a la estabilidad de sistemas eléctricos de potencia*. Universidad Tecnológica de Pereira - UTP, 2023.
- [25] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press, 2011.
- [26] D. J. Block, K. J. Åström, and M. W. Spong, *The Reaction Wheel Pendulum*. Springer International Publishing, 2008.