Revista Ciencia en Desarrollo. Vol. 15 Num. 2. pp. 95 - 101
julio - diciembre 2024

https://doi.org/10.19053/uptc.01217488.v15.n2.2024.17323

Artículo de investigación

Función Salto

Jump Function

Marco Edilberto Niño Cabrejo [1] ✉, Vladimir Strauss [2]

[1]Licenciado en Matemáticas, Profesor del Colegio Gran Mariscal de Ayacucho. Corregimiento La Pradera. Sucre, Santander, Colombia.
[2]Matemático, Ph.D. Profesor Dpto. de Matemáticas Puras y Aplicadas. Universidad Simón Bolívar, Sede Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda, Venezuela.

Recepción: 22-feb-2023 **Aceptado:** 09-mar-2024 **Publicado:** 23-jul-2024
Cómo citar: Niño Cabrejo, M. E., & Strauss, V. (2024). Función Salto. Ciencia En Desarrollo, 15(2). https://doi.org/10.19053/uptc.01217488.v15.n2.2024.17323

Resumen

Se realiza la construcción implícita de una función estrictamente creciente, dada en el segmento $[0;1]$ con el conjunto de puntos de discontinuidad, coincidente con el conjunto de números racionales diádicos del mismo segmento.

Palabras Clave: Función creciente, salto total, puntos de discontinuidad, límites laterales, función salto.

Abstract

The implicit construction of a strictly increasing function, given on the segment [0; 1] with the set of discontinuity points, coinciding with the set of dyadic rational numbers of the same segment.

Keywords: Increasing function, total jump, points of discontinuity, lateral limits, jump function.

E-ISSN: 2462-7658

1. Introducción

Las funciones no decrecientes y su inversa generalizada también conocidas como función pseudo-inversas o función cuartil [1-7], juegan un papel fundamental en varias áreas de las matemáticas. La función no decreciente también se conoce como función generatriz en la teoría de la medida y genera la medida de Lebesgue-Stieltjes, según se puede apreciar en [1,3,6-9]. En la teoría de la probabilidad, la función no decreciente es llamada función de distribución de una variable aleatoria ξ, y una de sus aplicaciones es la generación de números aleatorios en estudios de simulación en transformaciones de variables aleatorias. Asimismo, se puede observar en procesos estocásticos, matemáticas financieras y seguros [1,3,6, 9-11]. La función F no decreciente, continua por izquierda y definida en el intervalo $[a;b]$, puede ser presentada de manera unívoca (salvo unas constantes) como la suma $F(x) = F_c(x) + G_{Si}(x) + F_S(x)$ de una función absolutamente continua F_c, la función singular G_{Si} y la función salto F_S. Además, Cada sumando puede ser trivial, e.d. ser una constante. Supongamos que el único sumando no trivial es F_S [8,9,12,13] la función $F_S(x)$, definida en $[a;b]$ tiene límites laterales que no coinciden en cada uno de los puntos $t \in S_F \subset [a;b]$ de discontinuidad, y existe su respectivo salto $s_F(t) = F_S(t+0) - F_S(t-0) > 0$. El salto $s_F(t)$ en el punto $t \in (a;b]$ es la medida discreta generada por F_S, en la teoría de la probabilidad la distribución correspondiente se llama discreta. Además, el conjunto $S_F^c \cap [a;b]$ es el complemento de S_F donde la función F_S es continua, el conjunto $S_F^c \cap [a;b]$ tiene medida igual a cero [8,10,11,14-20]. Un ejemplo concreto de función salto es la pseudo-inversa a la bien conocida función-escalera de Cantor definida en $[0;1]$ y con saltos en los números racionales diádicos; en el dicho ejemplo no es tan fácil hallar el valor de la función que corresponde a cualquier argumento. Nuestra meta es construir una función de saltos parecida a la mencionada y simultáneamente fácil de analizar numéricamente.

2. Preliminares

Se darán las definiciones, teoremas y corolarios necesarios para el desarrollo de este artículo.

Definición 2.1 Como siempre, una función F dada en un intervalo cerrado [a,b], se llama no decreciente (creciente) si $F(x) \leq F(y) \quad (F(x) < F(y))$ para todos $a \leq x < y \leq b$.
.

Una función no decreciente puede tener puntos de discontinuidad. La cantidad de tales puntos puede ser tanto finita como contable. Al mismo tiempo, en un punto de discontinuidad x_0 de tal función, siempre existen límites laterales. Denotemos.

$$F(x_0 - 0) = \lim_{t \to x_0, \quad t < x_0} F(t), \tag{1}$$

.

$$F(x_0 + 0) = \lim_{t \to x_0, \quad t > x_0} F(t) \tag{2}$$

Definición 2.2 Sea F una función no decreciente en $[a,b]$. La función F tiene un salto total finito en el punto $x_0 \in (a;b]$ de discontinuidad, si los límites laterales de la función F en este punto no coinciden, es decir:

$$s_F(x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) > 0. \tag{3}$$

Definición 2.3 Sea F una función no decreciente en [a,b]. Sea S_F su conjunto de puntos de discontinuidad de F en [a,b]. Sea $s_F(x)$ el salto total de la función F en el punto $x \in (a,b)$.

Se definen las funciones u y v en [a,b] a continuanción:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = a; \\ F(x) - F(x-0), & \text{si } x \in (a,b], \end{cases} \tag{4}$$

$$v(x) = \begin{cases} F(x+0) - F(x), & \text{si } x \in [a,b); \\ 0, & \text{si } x = b \end{cases} \tag{5}$$

1. Se debe saber que $u(x)$ es el salto a la izquierda de F en $x \in (a,b]$ y $v(x)$ es el salto a la derecha de F en $x \in [a,b)$.

2. Tanto u como v son funciones no negativas y

$$s_F(x) = u(x) + v(x) = F(x+0) - F(x-0). \tag{6}$$

en los puntos a y b los saltos los definimos como

$$s_F(a) = F(a+0) - F(a) \tag{7}$$

y

$$s_F(b) = F(b) - F(b-0). \tag{8}$$

3. Además, F es continua en x por la izquierda si y solo si $u(x) = 0$, y F es continua por la derecha en x si y solo si $v(x) = 0$.

4. Finalmente, F es continua en $[a,b]$ si y solo si $u(x) = v(x) = 0$ en $[a,b]$.

Para simplificar todas las descripciones, más abajo vamos a suponer que cualquier función no decreciente es continua por la izquierda, e.d. que $u(x) \equiv 0$. Gracias a esta condición, $F(x)$ no tiene salto en el punto b.

Definición 2.3 Una función no decreciente $F(x)$ definida en $[a;b]$, se llama función salto (jump function o saltus function en Inglés) si existe un conjunto de puntos $\{x_j\}_{j=1}^{\alpha}$ y $x_j \in [a;b)$ donde α es un número natural o infinito, y $\{s_j\}_{j=1}^{\alpha}$, $\sum_{j=1}^{\alpha} s_j < \infty$ es un conjunto de números positivos, tales que

$$F(x) = F(a) + \sum_{x \in S \bigcap (a,x)} s_j, \qquad x \in [a,b). \tag{9}$$

Claro que para tal F tenemos $S_F = S$ y $\{s_j\}_{j=1}^{\alpha}$ es el conjunto de saltos correspondientes.

Definición 2.4 La función salto asociada a una función no decreciente.

Para $x, y \in [a,b]$ con $x < y$, $S \subset [a,b]$ (S es el conjunto de puntos de discontinuidad de la función F monótona no decreciente) y se define $S(x,y] = S \bigcap (x,y]$, $S[x,y) = S \bigcap [x,y)$.

Luego, se define la función $F_S : [a,b] \to R$ por

$$F_S(x) = \begin{cases} F(a), & \text{si } x = a; \\ F(a) + \sum_{x_j \in S \bigcap (a,x)} v(x), & a \leq x < b \end{cases} \tag{10}$$

Llamamos a F_S la función salto asociada a la función F no decreciente.

Por otro lado F_S es continua en $S^c \bigcap [a,b]$ donde S^c es el complemento de S.

Teorema 2.5 Sea F una función no decreciente en $[a,b]$. Entonces, la función $F_c = [a,b] \to R$, $F_c(x) = F(x) - F_S(x)$ es continua y monótona. Se llama parte continua de F.

Corolario 2.6 Si F es una función no decreciente en [a,b], entonces puede ser presentada como la suma de dos funciones no decrecientes, una de las cuales es función salto y la otra es continua. Esta representación es unívoca si el valor de la parte continua es cero.

La definición formal de la función salto hace difícil imaginarla, en el caso cuando el conjunto S es denso. Nuestra meta es dar un ejemplo calculable de tal función con un cojunto de discontinuidad bastante enriquecedor.

3. Unas funciones auxiliares.

Consideremos la función

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0;1/2]; \\ 3/4, & \text{si } t \in (1/2;1] \\ \varphi_1(x), & \text{si } t = n + x.\ x \in (0;1], \end{cases} \tag{11}$$

para $t > 1$ y $n = 1,2,\ldots$. Como podemos ver, $\varphi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Ponemos $\varphi_2(t) = 1/4 \cdot \varphi_1(2t)$, y , en general, $\varphi_{k+1}(t) = 1/4 \cdot \varphi_k(2t)$, $\quad k = 1,2,\ldots$. Ponemos

$$F(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \cdots,\ t \in [0;1]. \tag{12}$$

$F(t)$ es la función que buscamos.

A continuacón, se visualizan las gráficas de $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ y $\varphi_3(t)$ definidas en el intervalo $[0;1]$.

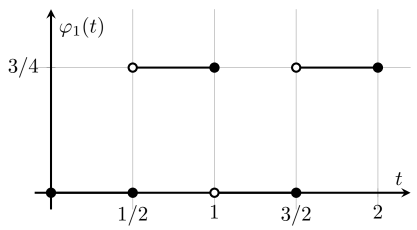

Figura 1: Función $\varphi_1(t)$.

Función $\varphi_2(t)$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0;1/4]; \\ 3/16, & \text{si } t \in (1/4;1/2] \\ 0, & \text{si } t \in (1/2;3/4] \\ 3/16, & \text{si } t \in (3/4;1] \end{cases} \tag{13}$$

Gráfica de la Función $\varphi_2(t)$

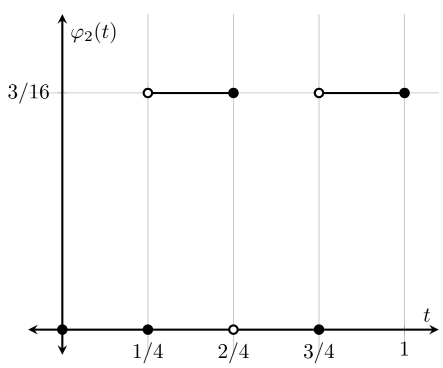

Figura 2: Función $\varphi_2(t)$.

Función $\varphi_3(t)$

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0;1/8]; \\ 3/64, & \text{si } t \in (1/8;2/8] \\ 0, & \text{si } t \in (2/8;3/8] \\ 3/64, & \text{si } t \in (3/8;4/8] \\ 0, & \text{si } t \in (4/8;5/8] \\ 3/64, & \text{si } t \in (5/8;6/8] \\ 0, & \text{si } t \in (6/8;7/8] \\ 3/64, & \text{si } t \in (7/8;1] \end{cases} \tag{14}$$

Gráfica de la Función $\varphi_3(t)$

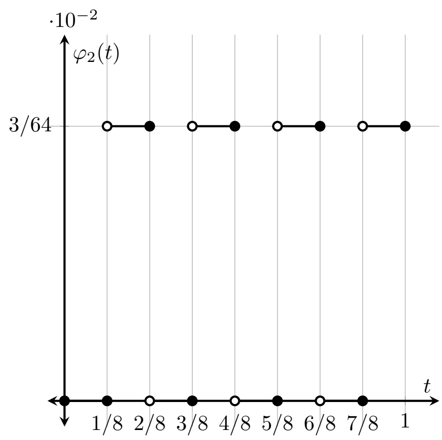

Figura 3: Función $\varphi_3(t)$.

4. Construcción Principal

Ahora, definimos nuestra función principal F como sigue

$$F(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) + \cdots,\ t \in [0;1]. \tag{15}$$

la imagen de F está dada por la serie

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \varphi_1(2^{n-1}t), \qquad t \in [0,1] \tag{16}$$

4.1. Primeros Pasos

Para entender mejor la construción de la función $F(t)$ dibujamos la suma. Se realizará la aproximación de $F(t)$ con la suma de las tres primeras funciones $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ y $\varphi_3(t)$ en el intervalo $[0;1]$.

$$\widehat{F}(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t), \qquad t \in (0,1] \tag{17}$$

Antes de todo notamos que la serie (15) converge uniformamente, todas las funciones φ_j son continuas por la izquierda en $[0;1]$ y, además, son continuas en todos los puntos no racionales diádicos, por lo tanto $F(t)$ también tiene estas propiedades.

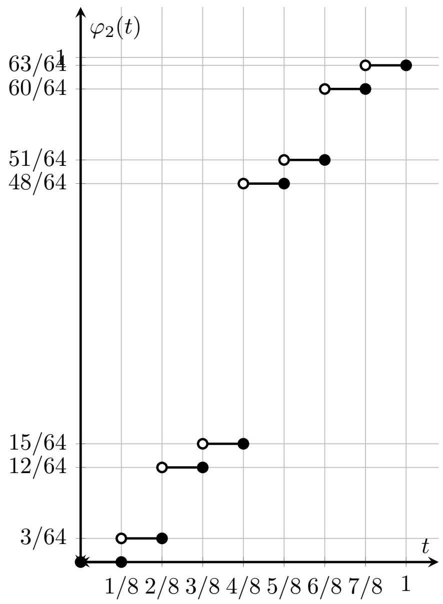

Figura 4: Función $\widehat{F}(t)$.

Hallaremos el salto $F(x)$ para $t = 1/2$,

$$F(1/2) = \varphi_1(1/2) + \varphi_2(1/2) + \cdots$$
$$= 0 + 1/4 \cdot \varphi_1(1) + 1/4^2 \cdot \varphi_1(2) + \cdots$$
$$= 3/4(1/4 + 1/4^2 + \cdots) = 1/4.$$

Ahora, sea $t = 1/2 + 1/2^m$. $m \gg 1$. Entonces, $\varphi_1(1/2 + 1/2^m) = 3/4$

$$\varphi_2(1/2 + 1/2^m) = 1/4\varphi_1(1 + 1/2^{m-1})$$
$$= 1/4\varphi_1(1/2^{m-1}) = 0$$

$$\cdots$$
$$\varphi_m(1/2 + 1/2^m) = (1/4)^{m-1}\varphi_1(2^{m-2} + 1/2)$$
$$= (1/4)^{m-1}\varphi_1(1/2) = 0,$$
$$\varphi_{m+1}(1/2 + 1/2^m) = (1/4)^m\varphi_1(2^{m-1} + 1)$$
$$= (1/4)^m\varphi_1(1) = (1/4)^m \cdot 3/4,$$
$$\varphi_{m+2}(1/2 + 1/2^m) = (1/4)^{m+1}\varphi_1(2^m + 2)$$
$$= 1/4)^{m+1}\varphi_1(2) = (1/4)^{m+1} \cdot 3/4,$$
$$\cdots$$

Entonces,

$$F(1/2 + 1/2^m)$$
$$= 3/4 + 3/4(1/4^m + 1/4^{m+1} + \cdots)$$
$$= (3/4) + (3/4^m)(1/4 + 1/4^2 + \cdots)$$
$$= 3/4 + 1/4^m,$$
$$F(1/2 + 0) = \lim_{m\to\infty} F(1/2 + 1/2^m) = 3/4,$$

De aquí para el salto

$$s_F(1/2) = F(1/2 + 0) - F(1/2)$$

tenemos $s_F(1/2) = 3/4 - 1/4 = 1/2$.

Ahora, se evalua $F(1/4)$ y $F(1/4 + 1/2^{m+1})$

$$F(1/4) = \varphi_1(1/4) + \varphi_2(1/4) + \cdots$$
$$= 0 + 1/4 \cdot 0 + 1/4^2\varphi_1(1) + 1/4^3\varphi_1(2) + \cdots$$
$$= 1/4 \cdot (0 + 3/4 + 3/4^2 + 3/4^3 + \cdots) = 1/4 \cdot F(1/2).$$

Análogamente sea $t = 1/4 + 1/2^{m+1}$, $m \gg 1$. Entonces, $\varphi_1(1/4 + 1/2^{m+1}) =$ 0

$$\varphi_2(1/4 + 1/2^{m+1}) = 1/4\varphi_1(1/2 + 1/2^m) = 3/4^2$$
$$\varphi_3(1/4 + 1/2^{m+1}) = 1/4\varphi_2(1/2 + 1/2^m)$$
$$= 1/4^2\varphi_1(1 + 1/2^{m-1}) = (1/4)^2 \cdot 0 = 0$$
$$\cdots$$
$$\varphi_{m+1}(1/4 + 1/2^{m+1}) = 1/4\varphi_m(1/2 + 1/2^m)$$
$$= 1/4^m\varphi_1(2^{m-2} + 1/2) = (1/4)^m \cdot 0 = 0$$
$$\varphi_{m+2}(1/4 + 1/2^{m+1}) = 1/4\varphi_{m+1}(1/2 + 1/2^m)$$
$$= 1/4^{m+1}\varphi_1(2^{m-1} + 1) = (1/4)^{m+1} \cdot \varphi_1(1)$$
$$= (1/4)^{m+1} \cdot 3/4$$
$$\varphi_{m+3}(1/4 + 1/2^{m+1}) = 1/4^{m+2}\varphi_1(2^m + 2)$$
$$= (1/4)^{m+2} \cdot \varphi_1(2) = (1/4)^{m+2} \cdot 3/4$$
$$\cdots$$

De aquí tenemos

$$F(1/4 + 1/2^{m+1}) = 3/4^2 + 1/4^{m+1} \cdot 3/4 +$$
$$+ 1/4^{m+2} \cdot 3/4 + 1/4^{m+3} \cdot 3/4 + \cdots$$
$$= 3/4^2 + 3/4^2(1/4^m + 1/4^{m+2} + \cdots)$$
$$= 1/4[(3/4 + 3/4)(1/4^m + 1/4^{m+2} + \cdots)]$$
$$= 1/4 \cdot F(1/2 + 1/2^m).$$

Por lo anterior el salto de $s_F(1/4) = F(1/4 + 0) - F(1/4) = 1/4(F(1/2 + 0) - F(1/2)) = (1/4) \cdot s_F(1/2)$.

Análogamente, para $t = 3/4 = 1/2 + 1/2^2$.

$$F(3/4) = F(1/2 + 1/2^2) = \varphi_1(1/2 + 1/2^2) +$$
$$+ \varphi_2(1/2 + 1/2^2) + \varphi_3(1/2 + 1/2^2) + \cdots$$
$$= 3/4 + 1/4\varphi_1(1/2) + 1/4^2\varphi_1(1) + \cdots$$
$$= 3/4 + 1/4 \cdot 0 + 1/4^2 \cdot 3/4 + 1/4^3 \cdot 3/4$$
$$F(3/4) = F(1/2 + 1/2^2)$$
$$= 3/4 + 1/4[3/4(1/4 + 1/4^2 + \cdots)]$$
$$F(3/4) = F(1/2 + 1/2^2) = 3/4 + 1/4F(1/2)$$
$$= 3/4 + (1/4)(1/4) = 13/4^2$$

Como el paso anterior, sea $t = 3/4 + 1/2^{m+1} = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^{m+1}$, $m \ll 2$. Entonces, $\varphi_1(1/2 + 1/2^2 + 1/2^{m+1}) = 3/4$,

$$\varphi_2(1/2 + 1/2^2 + 1/2^{m+1})$$
$$= 1/4\varphi_1((1 + 1/2 + 1/2^m)$$
$$= (1/4) \cdot (3/4) = 3/4^2,$$
$$\varphi_3(1/2 + 1/2^2 + 1/2^{m+1})$$

$$= 1/4\varphi_2(1+1/2+1/2^m)$$
$$= 1/4^2\varphi_1(2+1+1/2^{m-1})$$
$$= 1/4\varphi_1((1+1/2+1/2^m)$$
$$\dots$$
$$\varphi_{m+1}(1/2^2+1/2+1/2^{m+1})$$
$$= 1/4\varphi_m(1+1/2+1/2^m)$$
$$= 1/4^m\varphi_1[2^{m-1}(1+1/2+1/2^m)]$$
$$= 1/4^m\varphi_1(2^{m-1}+2^{m-2}+1/2) = 1/4^m\varphi_1(1/2)$$
$$= 1/4^m\cdot 0,$$
$$\varphi_{m+2}(1/2+1/2^2+1/2^{m+1})$$
$$= 1/4^{m+1}\varphi_1(2^m+2^{m-1}+1)$$
$$= 1/4^{m+1}\varphi_1(1) = 1/4^{m+1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{m+3}(1/2+1/2^2+1/2^{m+1})$$
$$= 1/4^{m+2}\varphi_1(2^{m+1}+2^m+2)$$
$$= 1/4^{m+2}\varphi_1(2) = 1/4^{m+2}\cdot 3/4$$
$$\dots$$

De aquí tenemos

$$F(1/2+1/2^2+1/2^{m+1})$$
$$= \varphi_1(1/2+1/2^2+1/2^{m+1})+$$
$$+\varphi_2(1/2+1/2^2+1/2^{m+1})+\cdots$$
$$= 3/4+3/4^2+1/4^{m+1}\varphi_1(1)+$$
$$+1/4^{m+2}\varphi_1(2)+\cdots$$
$$= 3/4+3/4^2+1/4^{m+1}\cdot 3/4+1/4^{m+2}\cdot 3/4+\dots$$
$$F(3/4+1/2^{m+1}) = 3/4+1/4\cdot F(1/2+1/2^m)$$

Calculamos el salto de $F(x)$ en el punto $3/4$

$$s_F(3/4) = F(3/4+0)-F(3/4)$$

$$= 3/4+1/4\cdot F(1/2+0)-(3/4+1/4\cdot F(1/2))$$
$$s_F(3/4) = s_F(1/4) = 1/4(F(1/2+0)-F(1/2)).$$

Por lo anterior, se tiene

$$s_F(3/4) = s_F(1/4) = 1/4\cdot s_F(1/2).$$

4.2. Caso general de los números racionales diádicos

Sea $t = 1/2^{p_1}+1/2^{p_2}+1/2^{p_3}+\cdots+1/2^{p_k}$, donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son números naturales. Nuestra meta es calcular $F(t)$ y $F(t+1/2^m)$, donde $m \gg p_k$. Para facilitar los razonamientos, supongamos, adicionalmente que $1 \ll p_1 \ll p_2 \ll \cdots \ll p_k$. Esta hipótesis no es principal y las fórmulas finales pueden ser adaptadas para el caso general. Entonces,

$$F(t) = \varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\cdots.$$

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = 1/4\varphi_1(2t) = 0, \dots$$
$$\dots$$
$$\varphi_{p_1}(t) = 1/4^{p_1-1}\varphi_{p_1-1}(1/2+1/2^{p_2-p_1+1}+\cdots+$$
$$+1/2^{p_k-p_1+1}) = 1/4^{p_1-1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_1+1}(t) = 1/4^{p_1}\varphi_{p_1}(1+1/2^{p_2-p_1}+\cdots+$$
$$+1/2^{p_k-p_1}) = 0$$
$$\dots$$
$$\varphi_{p_2}(t) = 1/4^{p_2-1}\varphi_{p_2-1}(2^{p_2-p_1+1}+1/2\cdots+$$
$$+1/2^{p_k-p_2+1}) = 1/4^{p_2-1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_2+1}(t) = 1/4^{p_2}\varphi_{p_2}(2^{p_2-p_1}+1+\cdots+$$
$$+1/2^{p_k-p_2}) = 0$$
$$\dots$$
$$\varphi_{p_k}(t) = 1/4^{p_k-1}\varphi_{p_k-1}(2^{p_k-p_1-1}+2^{p_k-p_2-1}+$$
$$+\cdots+1/2) = 0$$
$$\varphi_{p_k+1}(t) = 1/4^{p_k}\varphi_{p_k}(2^{p_k-p_1}+2^{p_k-p_2}+\cdots+$$
$$+1) = 1/4^{p_k}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_k+2}(t) = 1/4^{p_k+1}\varphi_{p_k+1}(2^{p_k-p_1+1}+2^{p_k-p_2+1}+$$
$$+\cdots+2) = 1/4^{p_k+1}\cdot 3/4$$
$$\dots$$

Sumando tenemos

$$F(t) = 1/4^{p_1-1}\cdot 3/4+1/4^{p_2-1}\cdot 3/4+$$
$$+\cdots+1/4^{p_k}\cdot 3/4+1/4^{p_k+1}\cdot 3/4+\cdots$$
$$F(t) = 3(1/4^{p_1}+1/4^{p_2}+\cdots+$$
$$+1/4^{p_{k-1}})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{p_k+n}}$$
$$= 3(1/4^{p_1}+1/4^{p_2}+\cdots+1/4^{p_{k-1}})+1/4^{p_k}. \tag{18}$$

Análogamente hallamos $F(t+1/2^m)$:

$$F(t+1/2^m) = \varphi_1(t+1/2^m)+\varphi_2(t+1/2^m)+\cdots$$

$$\varphi_1(t+1/2^m) = 0, \quad \varphi_2(t+1/2^m)$$
$$= 1/4\varphi_1(2t+1/2^{m-1}) = 0, \quad \dots$$
$$\varphi_{p_1}(t+1/2^m) = 1/4^{p_1-1}\varphi_{p_1-1}(1/2+1/2^{p_2-p_1+1}+$$
$$+\cdots+1/2^{p_k-p_1+1}+1/2^{m-p_1+1})$$
$$= 1/4^{p_1-1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_1+1}(t+1/2^m) = 1/4^{p_1}\varphi_{p_1}(1+1/2^{p_2-p_1}+$$
$$+\cdots+1/2^{p_k-p_1}+1/2^{m-p_1}) = 0$$
$$\dots$$

$$\varphi_{p_2}(t+1/2^m) = 1/4^{p_2-1}\varphi_{p_2-1}(2^{p_2-p_1-1}+$$
$$+1/2+\cdots+1/2^{p_k-p_1+1}+1/2^{m-p_1+1})$$
$$=1/4^{p_2-1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_2+1}(t+1/2^m) = 1/4^{p_2}\varphi_{p_2}(2^{p_2-p_1-1}+$$
$$+1+\cdots+1/2^{p_k-p_2}+1/2^{m-p_2}) = 0$$
$$\cdots$$
$$\varphi_{p_k}(t+1/2^m) = 1/4^{p_k-1}\varphi_{p_k-1}(2^{p_k-p_1-1}+$$
$$+2^{p_k-p_2-1}+\cdots+1/2+1/2^{m-p_k+1})$$
$$=1/4^{p_k-1}\cdot 3/4$$
$$\varphi_{p_k+1}(t+1/2^m) = 1/4^{p_k}\varphi_{p_k}(2^{p_k-p_1}+2^{p_k-p_2}+$$
$$+\cdots+1+1/2^{m-p_k}) = 0$$
$$\cdots$$
$$\varphi_m(t+1/2^m) = 1/4^{m-1}\varphi_{m-1}(2^{m-p_1-1}+2^{m-p_2-1}+$$
$$+\cdots+2^{m-p_k-1}+1/2) = 0$$
$$\varphi_{m+1}(t+1/2^m) = 1/4^m\varphi_m(2^{m-p_1}+2^{m-p_2}+\cdots+$$
$$+2^{m-p_k}+1) = 1/4^m\cdot 3/4$$
$$\cdots$$

Sumando tenemos

$$F(t+1/2^m) = 3\cdot(1/4^{p_1}+1/4^{p_2}+\cdots+1/4^{p_{k-1}})+$$
$$+3/4^{p_k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{m+n}}$$
$$F(t+1/2^m) = 3\cdot(1/4^{p_1}+1/4^{p_2}+\cdots+1/4^{p_{k-1}})+$$
$$+3/4^{p_k}+1/4^m.$$
$$F(t+0) = \lim_{m\to\infty}F(t+1/2^m) = 3\cdot(1/4^{p_1}+1/4^{p_2}+$$
$$+\cdots+1/4^{p_{k-1}})+3/4^{p_k}.$$

De aquí tenemos $F(t+1/2^m)-F(t) = 3/4^{p_k}-1/4^{p_k} = 1/2^{2p_k-1}$. Entonces, $s_F(t) = 1/2^{2p_k-1}$. Notemos que el salto depende no de t como tal sino de p_k.

4.3. Caso de los puntos que no son racionales diádicos

Sea $t=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/2^j$, donde $\alpha_j=0$ ó $\alpha_j=1$, además cada de dos opciones está realizada un número infinito de veces. Consideremos α_1. Si $\alpha_1=0$, entonces $t<1/2$, en el caso contrario $t>1/2$, por lo tanto

$$\varphi_1(t)=0 \text{ si } \alpha_1=0 \text{ y } \varphi_1(t)=3/4 \text{ si } \alpha_1=1,$$

e.d. $\varphi_1(t)=\frac{3}{4}\cdot\alpha_1$. Ahora consideremos φ_2. Según su definición $\varphi_2(t)=1/4\varphi_1(2t)=1/4\varphi_1(\alpha_1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j+1}/2^j)=1/4\varphi_1(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j+1}/2^j)=\frac{3}{4^2}\cdot\alpha_2$. Usando el mismo método tenemos

$\varphi_k(t)=(1/4)^{k-1}\varphi_1(2^{k-1}t)=(1/4)^{k-1}\varphi_1(\sum_{j=1}^{k-1}2^{k-j-1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j+k-1}/2^j)=(1/4)^{k-1}\varphi_1(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j+k-1}/2^j)=\frac{3}{4^k}\cdot\alpha_k$.

Aquí usamos el hecho que la expresión $\sum_{j=1}^{k-1}2^{k-j-1}\alpha_j$ representa un número entero no negativo.

Sumando lo anterior tenemos

$$F(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/2^j) = 3\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/4^j \tag{19}$$

4.4. Una representación universal

Las fórmulas (18) y (19) están estructuradas de diferentes maneras, por esto re-escribimos (18). Como $1/2^{p_k}=\sum_{j=p_k+1}^{\infty}2^{-j}$ y $1/4^{p_k}=3\cdot\sum_{j=p_k+1}^{\infty}4^{-j}$, entonces (18) puede ser re-escrito como

$$F(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j/2^j) = 3\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j/4^j, \tag{20}$$

donde $\beta_j=1$ para $j=p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}$ y $j>p_k$, para todos los otros casos $\beta_j=0$. La diferencia entre las formulas (19) y (20) está en los coeficientes: el conjunto $\{j:\ \alpha_j=0\}$ es infinito numerable y el conjunto $\{j:\ \beta_j=0\}$ es finito. En resumen, podemos definir la función F de la siguiente manera:

Sea $r\in(0,1]$. Presentamos r en la forma

$$r=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j/2^j, \tag{21}$$

donde γ_j puede tomar dos valores 0 y 1, además el conjunto $\{j:\ \gamma_j=1\}$ tiene que ser infinito y el conjunto $\{j:\ \gamma_j=0\}$ puede ser tanto finito como infinito. Entonces

$$F(r)=3\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j/4^j. \tag{22}$$

Analicemos cómo comparar dos números x y y, $x\neq y$ dados en la forma (21): $x=\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j/2^j$ y $y=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j/2^j$. Si $\zeta_1<\eta_1$, entonces $\zeta_1=0$ y $\eta_1=1$. Por lo tanto $x=\sum_{j=2}^{\infty}\zeta_j/2^j\leq\sum_{j=2}^{\infty}1/2^j=1/2<1/2+\sum_{j=2}^{\infty}\eta_j/2^j=y$, e.d. $x<y$. Análogamente, si

$$\zeta_1=\eta_1,\zeta_2=\eta_2,\ldots,\zeta_k=\eta_k,\ \zeta_{k+1}<\eta_{k+1}, \tag{23}$$

entonces $x<y$ y viceversa. Si se cumplen las condiciones (23), entonces $f(x)=3\sum_{j=1}^{k}\zeta_j/4^j+3\sum_{j=k+2}^{\infty}\zeta_j/4^j=3\sum_{j=1}^{k}\eta_j/4^j+3\sum_{j=k+2}^{\infty}\zeta_j/4^j\leq 3\sum_{j=1}^{k}\eta_j/4^j+3\sum_{j=k+2}^{\infty}1/4^j=3\sum_{j=1}^{k}\eta_j/4^j+1/4^{k+1}<3\sum_{j=1}^{k}\eta_j/4^j+3\sum_{j=k+1}^{\infty}\eta_j/4^j=f(y)$, e.d. la función f es (estrictamente) creciente.

5. Conclusiones

En este artículo se realizó la construcción de forma pedagógica y clara de una función de salto creciente definida en $[0;1]$, con salto en los números racionales diádicos de dicho conjunto.

Contribución de los autores

Autor 1: realiza la introducción , teoría elemental , gráficas, la parte analitica de artículo y conclusiones.

Autor 2: Realiza las respectivas correcciones y complementa de manera rigurosa y lógica: la introducción, teoría elemental, la parte analitica y conclusiones.

Declaración de fuentes de financiación

Autor1 y Autor 2 declaramos, que no se recibió apoyo de fuentes de financiación para llevar a cabo la investigación teórica en análisis matemático.

Conflictos de interes

Autor 1 y Autor 2 declaramos no tener ningún conflicto de intereses.

Referencias

[1] P. Embrechts, M. Hofert, ".A note on generalized inverses", Mathematical Methods of Operations Research, vol. 77, no, 3, pp. 423-432, 2013.

[2] N. Falkner, G. Teschl, ".On the substitution rule for Lebesgue-Stieltjes integrals", Expositiones Mathematicae, vol. 30, no. 4, pp, 412-418, 2012.

[3] G. Fayolle, M. Krikun, J. M. Lasgouttes, "Birth and death processes on certain random trees: classification and stationary laws", Probability Theory and Related Fields, vol. 128, no. 3, pp. 386-418, 2004.

[4] C. Feng, H. Wang, X. M. Tu, J. Kowalski, ".A Note on Generalized Inverses of Distribution Function and Quantile Transformation", Applied Mathematics, Vol. 3, no. 12A, pp. 2098-2100, 2012.

[5] E. P. Klement, R. Mesiar "Quasi and pseudo-inverses of monotone functions, and the construction of t-norms", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems vol. 104, no. 1, pp 3-13, 1999.

[6] R. Serfling, "Quantile functions for multivariate analysis: approaches and applications", Statistica Neerlandica, Vol. 56, no. 2, pp. 214-232, 2002.

[7] P. Vicenik, .Anote to a construction of t-norms based on pseudo-inverses of monotone functions", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems vol. 104, no. 1, pp 15-18, 1999.

[8] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov, Real and functional analysis, Spri. Natu. Swit., Vol. 4, 2020.

[9] J. K. Peterson, Basic Analysis IV: Measure Theory and Integration, CRC Press, Edi. 1, 2021.

[10] Capiński and E. Kopp, Measure, Integral and Probability, Springer-Verlag, Edi. 2, 2004.

[11] A. M. Haghighi and I. Wickramasinghe, Probability, Statistics, and stochastic processes for engineers and scientists,Taylor and Francis Group, 2021.

[12] F. C. Klebaner, Introduction to stochastic calculus with applications, Imp. Col. Pres., Edi. 3, 2012.

[13] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, Introductorr real analysis, R. A. Silverman, Dove. publ. New York, 1975.

[14] Carter and B. V. Brunt, The Lebesgue-Stieltjes integral, Spri. Scie. Busi. Medi.,2000.

[15] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Prin. Univ. Pres., Edi. 9, 2016.

[16] S. Gentili, Measure, integration and a primer on probability theory, Spri. Natu. Swit.,Vol. 1, 2020.

[17] T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development, Chelsea Pub. Co, Edi. 2, 1975.

[18] A. J. Weir, Lebesgue integration and measue, Camb. Univ. Pres., 1973.

[19] R. L. Wheeden and A. Zygmund, Measure and integral. An Introduction to Real Analysis, Taylor and Francis, Edi. 2, 2015.

[20] J. Yeh, Real analysis theory of measure and integration, World. Scie. Publ. Co., Edi. 3, 2014.