

Artículo de investigación

Función de Masa para una distribución fractal de materia usando la teoría de *Excursion Set*

Mass function of fractal distribution of matter by excursion set theory

César Alexander Chacón-Cardona¹✉ y Rigoberto A. Casas-Miranda²

¹ Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales, Programa Académico de Física. Carrera 10 # 19- 62 Edificio Crisanto Luque Bogotá D.C, Colombia.

² Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá, Av. Cra. 30 No. 45-03, CP 11321, Bogotá, Colombia.

Recepción: 28-noviembre-2024 **Aceptado:** 30-dic-2024 **Publicado:** 30-abril-2025

Cómo citar: Casas Miranda, R. A. (2025). Función de Masa para una distribución fractal de materia usando la teoría de Excursion Set. *Ciencia en Desarrollo*, 16 (1). doi: 10.19053/uptc.01217488.v16.n1.2025.18827

Resumen

Con base en los fundamentos de la teoría excursion set, se desarrolla una expresión para la función de masa en una distribución fractal de materia. Se encuentra el espectro de potencias para una distribución fractal de materia mediante la determinación de la varianza para una distribución de galaxias caracterizada por la dimensión fractal masa-radio. La función de masa encontrada exhibe un buen comportamiento en comparación con la función de masa reportada en la literatura, con una dependencia de dos parámetros; el parámetro β para una barrera móvil y la dimensión fractal D de la distribución de materia.

Palabras Clave: Función de masa, teoría excursion set, fractal.

Abstract

With the foundations of Excursion Set Theory, we theoretically develop an expression for the mass function in a fractal distribution of matter. The power spectrum for a fractal matter distribution is founded by determining the variance for a distribution of galaxies characterized by mass-radius fractal dimension. The mass function exhibits a good behavior in comparison with other mass functions reported in the literature, with a dependence of two parameters, the β parameter of moving barrier and fractal dimension of matter distribution.

Keywords: Mass function, Excursion Set Theory, fractal.

1. Introducción

El marco teórico predominante que sustenta el modelo cosmológico estándar afirma que la estructura a gran escala en el universo es homogénea e isotrópica, lo que significa que no hay una posición o dirección preferida en el universo [1, 2, 3, 4].

Desde este punto de vista, las heterogeneidades observadas se consideran locales, y se espera que disminuyan cuando se observan a escalas suficientemente grandes [5, 6, 7]. Este principio está respaldado principalmente por las observaciones de la radiación cósmica de fondo de microondas, que muestra una isotropía con variaciones de sólo una parte en 100.000 [8, 9, 10], así como por el razonamiento filosófico: el universo debería parecer igual a cualquier observador, independientemente de su ubicación o de la dirección desde la que observe, en consonancia con el principio copernicano.

En la cosmología moderna, el principio cosmológico es fundamental y constituye la hipótesis central con la que se contrastan e interpretan tanto los datos observados como los modelos teóricos [11]. La resolución de las ecuaciones de campo de Einstein para un universo compuesto por un fluido ideal sin colisiones, desarrollada por Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Percy Robertson y Arthur Geoffrey Walker [12, 13, 14, 15], condujo a la métrica FLRW aceptada como la descripción estándar de la estructura espacio-temporal del universo, en particular en estudios de distribución de materia a gran escala.

El modelo Λ CDM se basa en este principio cosmológico, ya que incorpora la constante cosmológica para explicar la expansión acelerada observada del universo, un efecto confirmado por las observaciones de supernovas de tipo Ia [16, 17, 18]. Los investigadores debaten cada vez más si los recientes sondeos de galaxias apoyan la hipótesis de homogeneidad e isotropía a escalas superiores a 60 Mpc/h [19, 20, 21, 22, 23, 24], o si, por el contrario, las galaxias están organizadas en patrones jerárquicos muy estructurados con propiedades fractales [25, 26, 27, 6, 28, 29, 30, 31, 32].

En la última década, el análisis fractal de las distribuciones de galaxias ha recibido una atención significativa [33, 34, 35, 36, 37], dando lugar a resultados prometedores y estableciéndose como un área dinámica de investigación en física cosmológica [6]. Una cuestión clave que sigue sin resolverse es si la distribución de la materia oscura fría muestra un comportamiento fractal [38] del mismo modo que se observa en la agrupación de galaxias. Algunos investigadores proponen que la distribución de galaxias y la de materia oscura comparten la misma dimensión fractal, actuando las galaxias como trazadores de la materia oscura [39]. En cambio, otros estudios sugieren dimensiones fractales diferentes: $D = 3$ para la materia oscura, que implicaría una homogeneidad acorde con el principio cosmológico, y $D = 2$ para la agrupación de galaxias [27].

En trabajos como [28, 33], los investigadores abogan por modelos multifractales para analizar mejor los halos de materia oscura en simulaciones numéricas de N-cuerpos. Sus hallazgos sugieren que los halos de masa similar siguen una distribución fractal con una dimensión que aumenta a medida

que disminuye la masa. Además, la materia homogénea con autogravedad puede desarrollar una estructura fractal debido a interacciones gravitatorias no lineales [40]. En consecuencia, las simulaciones cosmológicas de N-cuerpos proporcionan un marco numérico ideal para realizar análisis fractales de la materia sometida a fuerzas gravitatorias [41].

La adopción de una perspectiva fractal, partiendo del principio cosmológico condicional, ofrece la base para un enfoque cosmológico alternativo [42]. Este enfoque puede utilizarse para derivar la función de masa de los halos de materia oscura aplicando la teoría de conjuntos de excursión (Excursion set theory) a una distribución fractal de polvo sin presión que evoluciona dentro de un universo descrito por la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi [43]. Diversos análisis sobre la agrupación a gran escala de la materia en el universo han puesto en duda la transición a la homogeneidad actualmente aceptada; en [44] los investigadores determinaron dimensión fractal $D = 2$ para datos del SDSS mientras que [45] propuso que la distribución fractal de galaxias debe ser interpretada como un indicio de cosmología holográfica [30], así mismo en [9] se observa que las fluctuaciones de temperatura en la radiación cósmica de fondo tienen estructura fractal.

Independientemente de que exista o no una transición definitiva a la homogeneidad, las heterogeneidades locales plantean importantes dudas sobre la coherencia de los modelos físicos basados en el principio cosmológico con los datos observacionales [46]. Desde el advenimiento de la relatividad general, varios investigadores han explorado modelos cosmológicos no homogéneos [47, 48, 49, 50, 51], ofreciendo perspectivas alternativas sobre cosmología, desde la interpretación de datos observacionales hasta posteriores avances teóricos. Al interpretar las observaciones de agrupamiento galáctico en un contexto distinto del tradicional [52, 53], se ha demostrado que una métrica basada en el modelo de Lemaître-Tolman-Bondi puede explicar los datos de supernovas de tipo Ia sin invocar la constante cosmológica, al considerar un modelo no homogéneo de materia no interactuante [54, 55, 56].

En este trabajo utilizamos la teoría de conjuntos de excursión para hallar la función de masa de una distribución fractal de materia en una barrera móvil.

2. Fundamentos de la teoría de Excursion Set

La forma de la función de masa para los halos de materia oscura fue introducida originalmente por Press y Schechter [57]. La fracción de objetos cuya masa es mayor que una masa M es determinada mediante el uso de una ventana de filtrado de radio R (típicamente se usa un filtro Gaussiano), que suaviza el campo de densidad cósmico. Los autores impusieron la condición de que las regiones del espacio con un contraste de densidad mayor al valor crítico ($\delta_c = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \approx 1,686$) deben colapsar en estructuras virializadas, i.e., halos de materia oscura. Suponiendo que el campo de densidad de materia inicial es gaussiano, la probabilidad de que un punto dado en el campo haya un colapso que forme un halo de materia oscura está determinada por :

$$P(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)} \right) \right], \quad (1)$$

donde erf es la función error y σ es la desviación estándar de la masa del campo de densidad suavizado.

Así, la función de masa de los halos de materia oscura se define como la densidad numérica de objetos colapsados con masas en el rango M y $M + dM$:

$$\begin{aligned} n(M, t) dM &= 2 \frac{\rho_0}{M} \left| \frac{\partial P(\delta \geq \delta_c)}{\partial M} \right| dM \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\delta_c(t)}{\sigma(M)} \left| \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \right| e^{-\delta_c^2/2\sigma^2} \quad (2) \end{aligned}$$

utilizando el doble de la función de probabilidad.

Las limitaciones de este método se abordan en el marco de la teoría de Excursion Set [58, 59, 60], que se basa en paseos aleatorios markovianos. Este enfoque modela el campo de contraste de densidad δ en un punto fijo del espacio como una función del radio R de la función ventana $W_M(R)$ [61], que está relacionada con la masa $M \propto \rho_0 R^3$; o, de forma equivalente, como una función de la varianza S del campo de densidad suavizado. La varianza del campo suavizado se define como:

$$S(M) = \sigma^2(M) = \sum_k \langle |\delta_k|^2 \rangle \hat{W}_M^2(k) \quad (3)$$

donde δ_k y $\hat{W}_M(k)$ son las transformadas de Fourier del contraste de densidad y de la función ventana $W_M(r)$, respectivamente.

A partir del límite $\delta = 0$, cuando la varianza S tiende a 0 (el radio de la ventana del filtro se aproxima a infinito) se desarrollan fluctuaciones en el contraste de densidad cuyas amplitudes se incrementan al aumentar el valor de la varianza (disminuir el radio del filtro aplicado). En algún valor de la varianza S la trayectoria del contraste de densidad atraviesa por primera vez el valor crítico δ_c . Esto indica la formación de un objeto colapsado dentro del campo de densidad. Para mayor detalle, ver [1].

Tomando el filtro como una función escalonada de Heaviside en el espacio k [59],

$$\hat{W}_M(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k < k_s(M) \\ 0 & \text{if } k > k_s(M) \end{cases}, \quad (4)$$

donde k_s es el número de onda de corte. Las trayectorias seguidas por el contraste de densidad en función de la varianza corresponden a un movimiento browniano aleatorio, donde las fases δ_k están uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ y la suma en un cascarón delgado $\sum_k^{k+dk} \delta_k$ es una variable aleatoria gaussiana [58]. Para este tipo de variable la densidad número de trayectorias $Q(S, \delta)$ en el intervalo $(\delta, \delta + d\delta)$ obedece a la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} \quad (5)$$

La solución de esta ecuación para la condición de valor crítico δ_c corresponde a una barrera absorbente, según Chandrasekhar [62],

$$Q(S, \delta, \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \left(e^{-\delta^2/2S} - e^{-(\delta^2 - 2\delta_c^2)/2S} \right). \quad (6)$$

La probabilidad de que un camino sea absorbido por la barrera en el intervalo $(S, S + dS)$ es igual a la porción de reducción de los caminos supervivientes bajo la barrera, es decir:

$$f_S(S, \delta_c) = -\frac{\partial}{\partial S} \int_{-\infty}^{\delta_c} Q(S, \delta, \delta_c) d\delta = \frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi S^{3/2}}} e^{-\delta_c^2/2S} \quad (7)$$

Así, la densidad numérica de halos de materia oscura en el intervalo $(M, M + dM)$ presentes en un momento t es:

$$\begin{aligned} n(M, t) dM &= \frac{\rho_0}{M} f_S(S, \delta_c) \left| \frac{dS}{dM} \right| dM \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\delta_c(t)}{\sigma(M)} \left| \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \right| e^{-\delta_c^2/2\sigma^2} \quad (8) \end{aligned}$$

Esta última expresión es la misma que la encontrada por Press and Schechter [57] sin necesidad de agregar el factor 2 artificialmente.

3. Formalismo excursion set aplicado a un campo de densidad no-gaussiano.

Este desarrollo analítico sólo es válido para campos de densidad gaussianos, pero en nuestro caso el campo de densidad no es gaussiano. Como se ha comentado en la sección anterior, nuestro campo de densidad es localmente gaussiano. De acuerdo con [63, 64, 65] debemos ir más allá del formalismo estándar del conjunto de excursión (con un valor constante de la densidad crítica). Así, es necesario representar este comportamiento no gaussiano a través de una barrera móvil, donde el contraste de densidad en el punto crítico es una función lineal $B(S)$ de la varianza S . Siguiendo a Pan [66] y Zentner [64],

$$B(S) = \delta_c + \beta S. \quad (9)$$

En este caso el número de densidad de caminos $Q(S, \delta)$ obedece a la ecuación de difusión con un término adicional de deriva. En nuestro caso:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \delta} \quad (10)$$

Esta ecuación se resuelve mediante el cambio de variable $Q = U e^{\beta[\gamma - \beta S/2]}$ con $\gamma = \delta_c - \delta$. En la nueva variable se simplifica de forma conocida la ecuación de la densidad numérica de caminos, la ecuación de difusión para una barrera fija:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \delta^2}. \quad (11)$$

Esta ecuación obedece a las condiciones

$$U(S, \gamma) = \begin{cases} \delta_D(\gamma - \delta_c) & \text{if } S = 0 \\ 0 & \text{if } \gamma = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Así,

$$\begin{aligned} Q(S, \delta, \delta_c) &= \\ &= \frac{e^{-\beta[\delta + \beta S/2]}}{\sqrt{2\pi S}} \left(e^{-\delta^2/2S} - e^{-(\delta^2 - 2\delta_c^2)/2S} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

Análogamente, como en el caso de una barrera fija, Ecuación (7), para esta barrera móvil tenemos

$$\begin{aligned} f_s(S, \delta_c) &= -\frac{\partial}{\partial S} \int_{-\infty}^{\delta_c} Q(S, \delta, \delta_c) d\delta \\ &= -\int_{-\infty}^{\delta_c} \frac{\partial Q(S, \delta, \delta_c)}{\partial S} d\delta \\ &= -\int_{-\infty}^{\delta_c} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \delta} \right] d\delta \\ &= -\left[\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \delta} + \beta Q \right]_{-\infty}^{\delta_c} \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, para derivar y probar los límites tenemos la expresión para la probabilidad de que un elemento de masa M cruce la barrera lineal con una varianza en el rango $(S, S + dS)$

$$f_s(S, \delta_c) dS = \frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi S^{3/2}}} e^{-[\delta_c + \beta S]^2 / 2S} dS. \quad (15)$$

Así, la función de masa para la densidad de número de halos de masa M presentes en el tiempo t para esta barrera móvil es:

$$\begin{aligned} \frac{dn(M, t)}{dM} dM &= \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\delta_c(t)}{\sigma(M)} \left| \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \right| e^{-[\delta_c + \beta S]^2 / 2S} \end{aligned} \quad (16)$$

Esta función de masa depende de la densidad $\rho_0 = 3H_0^2 \Omega_M / 8\pi G$ y del espectro de potencias a través de la varianza

$$S(M) = \sigma^2(M) = 4\pi \int_0^\infty |\hat{W}_M(k)|^2 P(k) \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3}. \quad (17)$$

Dado que nuestro interés es modelar un polvo no homogéneo caracterizado por un comportamiento fractal, seguimos el método propuesto en [67] para determinar la varianza de una distribución de galaxias caracterizada por masa-radio de dimensión fractal.

4. Espectro de potencias para una distribución fractal de materia

Ahora, es necesaria una expresión para el espectro de potencias de una distribución de galaxias caracterizada por la dimensión fractal masa-radio. En una distribución autosimilar de puntos dentro de una esfera de radio r , el conjunto se comporta según la relación masa-radio definida como [68]:

$$N(r) = Br^D, \quad (18)$$

siendo D la dimensión fractal del conjunto. En una distribución fractal esta dimensión es menor que la dimensión del espacio físico ($D = 3$ caracteriza una distribución homogénea) y el pre-factor B es una fuente de información sobre la longitud mínima en la que es posible encontrar correlaciones fractales. Calculando la densidad numérica media dentro de una muestra esférica de radio R_s :

$$\bar{n} = \frac{N(R_s)}{V(R_s)} = \frac{3B}{4\pi} R_s^{-(3-D)}. \quad (19)$$

Sin embargo, en una distribución fractal no es posible aplicar las medidas de correlación estándar, porque se basan en el supuesto de homogeneidad. En los trabajos [25, 67], los autores presentan la densidad condicional como:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{S} \frac{dN(r)}{dr} = \frac{BD}{4\pi} r^{D-3}, \quad (20)$$

siendo S la superficie de la envoltura esférica de radio r . La densidad condicional promedio nos permite calcular la función de correlación de un conjunto fractal:

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{\bar{n}} - 1. \quad (21)$$

Llamando $\gamma = 3 - D$ para nuestro conjunto fractal, la función de correlación es [69]:

$$\xi(r) = \left[\frac{3-\gamma}{3} \right] \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-\gamma} - 1. \quad (22)$$

Según el Principio Cosmológico Condicional [70] el espectro de potencias de una distribución fractal, que conserva la isotropía, tiene la forma:

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^{R_s} 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr} \left[\frac{3-\gamma}{3} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-\gamma} - 1 \right] r^2 dr \\ &= \frac{4\pi R_s^\gamma}{k} \left[\frac{3-\gamma}{3} \right] \int_0^{R_s} r^{-\gamma+1} \sin(kr) dr \\ &\quad - \frac{4\pi}{k} \int_0^{R_s} r \sin(kr) dr \end{aligned} \quad (23)$$

Aplicando la substitución $u = kr$, el espectro de potencias puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{4\pi R_s^\gamma}{k^{-\gamma+3}} \left[\frac{3-\gamma}{3} \right] \int_0^{kR_s} u^{-\gamma+1} \sin u du \\ &\quad - \frac{4\pi}{k^3} \int_0^{kR_s} u \sin u du. \end{aligned} \quad (24)$$

Así, el espectro de potencias puede escribirse en términos de la dimensión fractal como:

$$P(k) = \frac{a(R_s, k) R_s^{3-D}}{k^D} - \frac{b(R_s, k)}{k^3} \quad (25)$$

Utilizando el valor de dimensión fractal más frecuentemente encontrada en la literatura, $D = 2$, $a(R_s, k)$ y $b(R_s, k)$ son funciones de la forma:

$$a(R_s, k) = \frac{4\pi}{3} [2 + \cos(kR_s)], \quad (26)$$

$$b(R_s, k) = 4\pi \sin(kR_s). \quad (27)$$

El comportamiento de este espectro de potencias puede verse en la Figura 1, para tres valores (los más altos) de

R_s reportados en el trabajo sobre halos de materia oscura determinados en muestras limitadas en volumen de galaxias del SDDS-DR7 en [33].

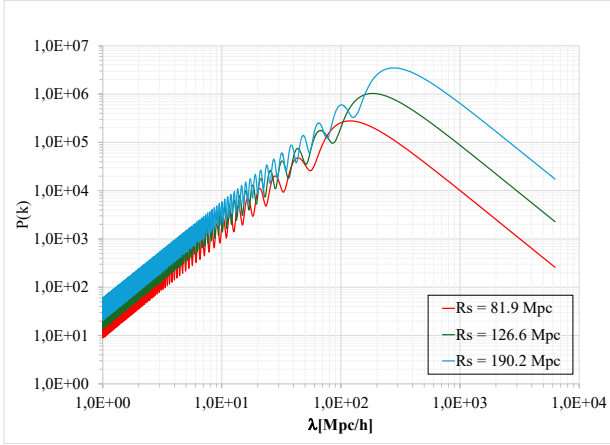


Figura 1: Espectro de potencias como función de la escala $\lambda = 2\pi/k$, para una distribución fractal con $D = 2$. Se observa a pequeña escala $P(k) \approx \lambda^D$, alcanzando un máximo para $\lambda \approx 1,4R_s$. Se observa la dependencia de la amplitud de $P(k)$ con el tamaño de la muestra

De acuerdo con Sylos Labini et al. [71] el espectro de potencias se promedia sobre cáscaras de espesor $\Delta = 2\pi/R_s$:

$$P_a(k) = \frac{1}{k^2 \Delta} \int_k^{k+\Delta} P(k') k'^2 dk' \quad (28)$$

$$= \frac{8\pi R_s}{3k^2} [1 + 3 [Si(2\pi + x) - Si(x)] / 4\pi]$$

siendo $Si(x)$ la función integral seno, que se define como:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (29)$$

Al primer orden de aproximación, $P_a(k) \approx 8\pi R_s / 3k^2$. A partir de este resultado, en el trabajo de Sylos Labini et al. [71] se propone una forma general para la primera aproximación del espectro de potencias promedio en función de k y de la dimensión fractal D .

$$P_a(k) \approx \frac{AR_s^{3-D}}{k^D}. \quad (30)$$

Claramente, esta forma incluye la primera forma de aproximación para la dimensión fractal $D = 2$. Reemplazando este espectro de potencias en la ecuación (17), la varianza de este campo, suavizada por la función ventana, es:

$$S(M) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_s} AR_s^{3-D} k^{2-D} dk' \quad (31)$$

$$= \frac{AR_s^{3-D} k_s^{3-D}}{2\pi^2 (3-D)}.$$

De acuerdo con Lacey and Cole [59], la relación entre la función de masa M el número de onda de corte k_s puede encontrarse reescalando la forma espacial de la función ventana o filtro:

$$W_M(r) = \frac{\sin(k_s r) - k_s r \cos(k_s r)}{2\pi^2 r^3}, \quad (32)$$

con la condición: $W_M(r) = 1$ en $r = 0$, e integrando todo el espacio para encontrar el volumen adjunto. La relación entre la masa y el número de onda de corte para esta función ventana es:

$$k_s = \left(\frac{6\pi^2 \rho_0}{M} \right)^{1/3} \quad (33)$$

Así, la función de masa para un polvo fractal no homogéneo es:

$$\frac{dn(M, t)}{dM} dM = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_0}{M} \frac{\delta_c(t)}{S^{3/2}(M)} \left| \frac{dS(M)}{dM} \right| e^{-[\delta_c + \beta S]^2 / 2S} dM \quad (34)$$

$$= \frac{(3-D) \rho_0}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c(t)}{M^2 S^{1/2}(M)} e^{-[\delta_c + \beta S]^2 / 2S} dM$$

$$= \frac{(3-D) \rho_0}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c(t)}{M^2 \sigma(M)} e^{-[\delta_c + \beta \sigma^2]^2 / 2\sigma^2} dM$$

En la Figura 2 se muestra el comportamiento de esta función de masa tomando los valores para el espectro de potencias $A = 8\pi/3$, así como los parámetros cosmológicos reportados en el trabajo de Hofmann R. [72]. Primero, para diferentes valores del parámetro β , con $D = 2$ la dimensión fractal masa-radio más frecuentemente reportada en la literatura, la Figura 2:

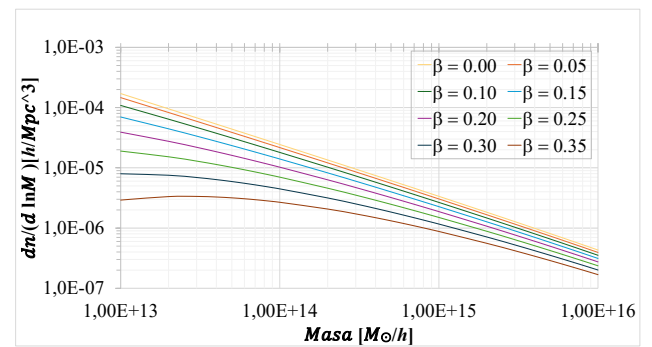


Figura 2: Función de masa tomando los valores para el espectro de potencias $A = 8\pi/3$ y $D = 2$ correspondientes a la dimensión fractal masa-radio más frecuentemente reportada en la literatura. El parámetro β varía entre 0 a 0.35, como se indica en las etiquetas

Dejando el parámetro $\beta = 0$, y variando la dimensión fractal D se observa en la Figura 3:

La forma de las curvas de la Figura 2, muestra un comportamiento similar a las descritas en la literatura por Jenkins et al. [73], Warren et al. [74], Wen et al. [75]. Como puede observarse en la Figura 2, las funciones de masa con dimensión fractal constante muestran una suave disminución en el número

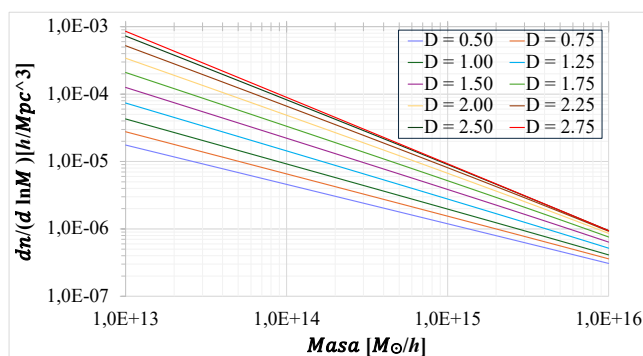


Figura 3: Función de masa tomando los valores para el espectro de potencias $A = 8\pi/3$ y $\beta = 0$. La dimensión fractal D varía de 0.5 a 2.75, como se indica en las etiquetas.

de halos formados a medida que aumenta el parámetro β , especialmente para halos de baja masa donde el formalismo Press-Schechter tiende a sobre predecir el número de halos. Por otro lado, véase la Figura 3, la función de masa es bastante sensible a las variaciones en los valores de la dimensión fractal, en particular para valores superiores a 2. Un aumento del número de halos es coherente con un aumento de la dimensión de la agrupación de masas. Pero ocurre lo contrario para $D > 2$: a medida que la dimensión de la agrupación fractal de masas se aproxima a la dimensión física del espacio, el número de halos disminuye drásticamente. Estos comportamientos se deben a que el parámetro β afecta a la función de masa sólo en el argumento de la exponencial decreciente, mientras que la dimensión fractal aparece inmersa en la varianza, que es una parte fundamental de la función de masa.

5. Conclusiones

Con base en los fundamentos de la teoría excursion set, se desarrolló una expresión para la función de masa en una distribución fractal de materia. El espectro de potencias para una distribución fractal de materia se encontró mediante la determinación de la varianza para una distribución de galaxias caracterizada por la dimensión fractal masa-radio. La función de masa encontrada presenta un buen comportamiento en comparación con la función de masa reportada en la literatura y muestra una dependencia de dos parámetros; el parámetro β para una barrera móvil y la dimensión fractal D de la distribución de materia.

La fractalidad se introdujo en la función de masa a través de la varianza de un polvo fractal según el espectro de potencias propuesto por [71]. La función de masa obtenida es más sensible a cambios en la dimensión fractal del sistema que a cambios en el parámetro β introducido para modelar la dependencia radial del contraste de densidad.

Declaración de conflicto de interés: Los autores manifiestan no tener conflictos de interés.

Referencias

- [1] J. Peacock, *Cosmological physics*. Cambridge University Press, 1999. [Online]. Available: <http://books.google.com.co/books?id=t8O-yyIU0j0C>
- [2] V. Martínez and E. Saar, *Statistics of the galaxy distribution*. Chapman & Hall/CRC, 2002. [Online]. Available: <http://books.google.com.co/books?id=f-19bB-7AQMC>
- [3] M. Longair, *Galaxy formation*, ser. Astronomy and astrophysics library. Springer, 2008. [Online]. Available: <http://books.google.com.co/books?id=e-wJHSBOuZAC>
- [4] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010. [Online]. Available: <http://books.google.com.co/books?id=9S-hzg6-moYC>
- [5] P. V. Grujić, "The concept of a hierarchical cosmos," *Publications de l'Observatoire Astronomique de Beograd*, vol. 75, pp. 257–262, Oct. 2003.
- [6] A. Gabrielli, Sylos, M. Joyce, and L. Pietronero, *Statistical Physics for Cosmic Structures*. Springer Verlag, 2005.
- [7] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolte, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, "Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation," *ApJS*, vol. 180, pp. 330–376, Feb. 2009.
- [8] F. Caruso and V. Oguri, "The Cosmic Microwave Background Spectrum and an Upper Limit for Fractal Space Dimensionality," *ApJ*, vol. 694, pp. 151–153, Mar. 2009.
- [9] N. Kobayashi, Y. Yamazaki, H. Kuninaka, M. Katori, M. Matsushita, S. Matsushita, and L.-Y. Chiang, "Fractal Structure of Isothermal Lines and Loops on the Cosmic Microwave Background," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 80, no. 7, p. 074003, Jul. 2011.
- [10] Aghanim, N., Akrami, Y., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J.-P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J.-F., Carron, J., Casaponsa, B., Challinor, A., Chiang, H. C., Colombo, L. P. L., Combet, C., Contreras, D., Crill, B. P., Cuttaia, F., de Bernardis, P., de Zotti, G., Delabrouille, J., Delouis, J.-M., Désert, F.-X., Di Valentino, E., Dickinson, C., Diego, J. M., Donzelli, S., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dupac, X., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Falgarone, E., Fantaye, Y., Fergusson, J., Fernandez-Cobos, R., Finelli, F., Forastieri, F., Frailis, M., Franceschi, E., Frolov, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Génova-Santos, R. T., Gerbino, M., Ghosh, T., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gratton, S., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Hamann, J., Handley, W., Hansen, F. K., Helou, G., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon,

- E., Huang, Z., Jaffe, A. H., Jones, W. C., Karakci, A., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kiiveri, K., Kim, J., Kisner, T. S., Knox, L., Krachmalnicoff, N., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Langer, M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Le Jeune, M., Leahy, J. P., Lesgourgues, J., Levrier, F., Lewis, A., Liguori, M., Lilje, P. B., Lilley, M., Lindholm, V., López-Cañiego, M., Lubin, P. M., Ma, Y.-Z., Macías-Pérez, J. F., Maggio, G., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Marcos-Caballero, A., Maris, M., Martin, P. G., Martinelli, M., Martínez-González, E., Matarrese, S., Mauri, N., McEwen, J. D., Meerburg, P. D., Meinhold, P. R., Melchiorri, A., Mennella, A., Migliaccio, M., Millea, M., Mitra, S., Miville-Deschênes, M.-A., Molinari, D., Moneti, A., Montier, L., Morgante, G., Moss, A., Mottet, S., Münchmeyer, M., Natoli, P., Nørgaard-Nielsen, H. U., Oxborrow, C. A., Pagano, L., Paoletti, D., Partridge, B., Patanchon, G., Pearson, T. J., Peel, M., Peiris, H. V., Perrotta, F., Pettorino, V., Piacentini, F., Polastri, L., Polenta, G., Puget, J.-L., Rachen, J. P., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renault, C., Renzi, A., Rocha, G., Rosset, C., Roudier, G., Rubiño-Martín, J. A., Ruiz-Granados, B., Salvati, L., Sandri, M., Savelainen, M., Scott, D., Shellard, E. P. S., Shiraishi, M., Sirignano, C., Sirri, G., Spencer, L. D., Sunyaev, R., Suur-Uski, A.-S., Tauber, J. A., Tavagnacco, D., Tenti, M., Terenzi, L., Toffolatti, L., Tomasi, M., Trombetti, T., Valiviita, J., Van Tent, B., Vibert, L., Vielva, P., Villa, F., Vittorio, N., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., White, M., White, S. D. M., Zacchei, A., and Zonca, A., "Planck 2018 results - i. overview and the cosmological legacy of planck," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 641, p. A1, September 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>
- [11] X. Shao, R. S. Gonçalves, C. A. P. Bengaly, U. Andrade, G. C. Carvalho, and J. Alcaniz, "Can the angular scale of cosmic homogeneity be used as a cosmological test?" *The European Physical Journal C*, vol. 84, no. 7, p. 655, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13011-1>
- [12] G. Lemaître, "Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae," *MNRAS*, vol. 91, pp. 483–490, Mar. 1931.
- [13] H. P. Robertson, "Kinematics and World-Structure," *ApJ*, vol. 82, p. 284, Nov. 1935.
- [14] A. G. Walker, "On the formal comparison of Milne's kinematical system with the systems of general relativity," *MNRAS*, vol. 95, pp. 263–269, Jan. 1935.
- [15] A. Friedmann, "On the Curvature of Space," *General Relativity and Gravitation*, vol. 31, p. 1991, Dec. 1999.
- [16] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009>
- [17] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and T. S. C. Project, "Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae," *ApJ*, vol. 517, pp. 565–586, Jun. 1999.
- [18] M. Hamuy, S. C. Trager, P. A. Pinto, M. M. Phillips, R. A. Schommer, V. Ivanov, and N. B. Suntzeff, "A Search for Environmental Effects on Type IA Supernovae," *AJ*, vol. 120, pp. 1479–1486, Sep. 2000.
- [19] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, M. R. Blanton, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, J. E. Gunn, and D. P. Schneider, "Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies," *ApJ*, vol. 624, pp. 54–58, May 2005.
- [20] P. Sarkar, J. Yadav, B. Pandey, and S. Bharadwaj, "The scale of homogeneity of the galaxy distribution in SDSS DR6," *MNRAS*, vol. 399, pp. L128–L131, Oct. 2009.
- [21] S. Capozziello and S. Funkhouser, "Fractal Large-Scale Structure from a Stochastic Scaling Law Model," *Modern Physics Letters A*, vol. 24, pp. 1743–1748, 2009.
- [22] J. S. Bagla, J. Yadav, and T. R. Seshadri, "Fractal dimensions of a weakly clustered distribution and the scale of homogeneity," *MNRAS*, vol. 390, pp. 829–838, Oct. 2008.
- [23] M. Scrimgeour, T. Davis, C. Blake, J. B. James, G. Poole *et al.*, "The WiggleZ Dark Energy Survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity," *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, vol. 425, pp. 116–134, 2012.
- [24] P. Goyal, S. Malik, J. K. Yadav, and T. R. Seshadri, "Investigating cosmic homogeneity using multifractal analysis of the sdss-iv eboss dr16 quasar catalogue," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 530, no. 3, pp. 2866–2876, 04 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/mnras/stae1041>
- [25] P. H. Coleman and L. Pietronero, "The fractal nature of the universe," *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 185, pp. 45–55, Jun. 1992.
- [26] S. Borgani, "The multifractal behaviour of hierarchical density distributions," *MNRAS*, vol. 260, pp. 537–549, Feb. 1993.
- [27] R. Durrer and F. Sylos Labini, "A fractal galaxy distribution in a homogeneous universe?" *A&A*, vol. 339, pp. L85–L88, Nov. 1998.
- [28] J. Gaité, "The fractal distribution of haloes," *EPL*

- (*Europhysics Letters*), vol. 71, no. 2, p. 332, 2005. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0295-5075/71/i=2/a=332>
- [29] J. Gaité, "Halos and Voids in a Multifractal Model of Cosmic Structure," *ApJ*, vol. 658, pp. 11–24, Mar. 2007.
- [30] F. Sylos Labini, N. L. Vasilyev, L. Pietronero, and Y. V. Baryshev, "Absence of self-averaging and of homogeneity in the large-scale galaxy distribution," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 86, p. 49001, May 2009.
- [31] A. O. Verevkin, Y. L. Bukhmastova, and Y. V. Baryshev, "The non-uniform distribution of galaxies from data of the SDSS DR7 survey," *Astronomy Reports*, vol. 55, pp. 324–340, Apr. 2011.
- [32] J. Botke, "Thoughts concerning the origin of our fractal universe." *Journal of Modern Physics*, vol. 16, no. 1, pp. 167–197, January 2025.
- [33] C. Chacón-Cardona, R. Casas-Miranda, and J. Muñoz-Cuartas, "Multi-fractal analysis and lacunarity spectrum of the dark matter haloes in the sdss-dr7," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 82, pp. 22–33, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077915003392>
- [34] J. García-Farieta and R. Casas-Miranda, "Effect of observational holes in fractal analysis of galaxy survey masks," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 111, pp. 128–137, 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077918301632>
- [35] S. Teles, A. R. Lopes, and M. B. Ribeiro, "Fractal analysis of the ultravista galaxy survey," *Physics Letters B*, vol. 813, p. 136034, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320308376>
- [36] M. Asghari and A. Sheykhi, "Observational constraints on the fractal cosmology," *The European Physical Journal C*, vol. 82, no. 10, p. 960, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10927-4>
- [37] S. Teles, A. R. Lopes, and M. B. Ribeiro, "Galaxy distributions as fractal systems," *The European Physical Journal C*, vol. 82, no. 10, p. 896, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10866-0>
- [38] M. Joyce and F. Sicard, "Non-linear gravitational clustering of cold matter in an expanding universe: indications from 1d toy models," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 413, no. 2, pp. 1439–1446, 04 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18225.x>
- [39] Y. Baryshev, "Field fractal cosmological model as an example of practical cosmology approach," in *Problems of Practical Cosmology, Volume 2*, 2008, pp. 60–67.
- [40] G. Montani and N. Carlevaro, "Symmetries of the large scale structures of the universe as a phenomenology of a fractal turbulence: The role of the plasma component. symmetry 2024, 16, 306," *Symmetry*, vol. 16, no. 306, March 5 2024.
- [41] C. A. Chacón-Cardona and R. A. Casas-Miranda, "Millennium simulation dark matter haloes: multifractal and lacunarity analysis and the transition to homogeneity," *MNRAS*, vol. 427, pp. 2613–2624, Dec. 2012.
- [42] D. Raut, D. Pawar, A. Kale, and N. Ghungarwar, "Parameterized hubble parameter with observational constraints in fractal gravity," *Astronomy and Computing*, vol. 52, p. 100955, 2025. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2213133725000289>
- [43] E. Pastén and V. H. Cárdenas, "A fractal ltb model cannot explain dark energy," *General Relativity and Gravitation*, vol. 55, no. 7, p. 79, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10714-023-03127-2>
- [44] M. Joyce, F. Sylos Labini, A. Gabrielli, M. Montuori, and L. Pietronero, "Basic properties of galaxy clustering in the light of recent results from the Sloan Digital Sky Survey," *A&A*, vol. 443, pp. 11–16, Nov. 2005.
- [45] J. R. Mureika, "Fractal holography: a geometric re-interpretation of cosmological large scale structure," *JCAP*, vol. 5, p. 21, May 2007.
- [46] K. Enqvist, "Lemaitre Tolman Bondi model and accelerating expansion," *General Relativity and Gravitation*, vol. 40, pp. 451–466, Feb. 2008.
- [47] R. C. Tolman, "Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models." *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 20, no. 3, pp. 169–76, 1934. [Online]. Available: <http://www.biomedsearch.com/nih/Effect-Inhomogeneity-Cosmological-Models/16587869.html>
- [48] H. Bondi, "Spherically symmetrical models in general relativity," *MNRAS*, vol. 107, p. 410, 1947.
- [49] W. B. Bonnor, "Evolution of inhomogeneous cosmological models," *MNRAS*, vol. 167, pp. 55–62, Apr. 1974.
- [50] F. Pompilio and M. Montuori, "An inhomogeneous fractal cosmological model," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, pp. 203–212, Jan. 2002.
- [51] S. Viaggiu and M. Montuori, "How Large is the Contribution of Cosmic Web to Ω_Λ ? a Preliminary Study on a Novel Inhomogeneous Model," *International Journal of Modern Physics D*, vol. 22, p. 50065, Aug. 2013.
- [52] W. Rindler and D. Suson, "How to determine a Tolman-Bondi universe from ideal observable and theoretical relations," *A&A*, vol. 218, pp. 15–18, Jul. 1989.
- [53] A. Mittal and D. Lohiya, "Fractal dust model of the universe based on Mandelbrot's conditional cosmological principle and general theory of relativity," *Fractals*, vol. 11, pp. 145–153, 2003.
- [54] N. P. Humphreys, D. R. Matavers, and R. Maartens, "Exact isotropic cosmologies with local fractal number counts," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, pp. 3041–3049, Oct. 1998.

- [55] M.-N. Célérier, "Do we really see a cosmological constant in the supernovae data?" *A&A*, vol. 353, pp. 63–71, Jan. 2000.
- [56] D. R. Matrauers and N. P. Humphreys, "Matching Spherical Dust Solutions to Construct Cosmological Models," *General Relativity and Gravitation*, vol. 33, pp. 531–552, Mar. 2001.
- [57] W. H. Press and P. Schechter, "Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation," *ApJ*, vol. 187, pp. 425–438, Feb. 1974.
- [58] J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser, "Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations," *ApJ*, vol. 379, pp. 440–460, Oct. 1991.
- [59] C. Lacey and S. Cole, "Merger rates in hierarchical models of galaxy formation," *MNRAS*, vol. 262, pp. 627–649, Jun. 1993.
- [60] R. K. Sheth, "An excursion set model for the distribution of dark matter and dark matter haloes," *MNRAS*, vol. 300, pp. 1057–1070, Nov. 1998.
- [61] M. S. Delos, "Accurate halo mass functions from the simplest excursion set theory," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 528, no. 2, pp. 1372–1387, 01 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/mnras/stae141>
- [62] S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 15, pp. 1–89, Jan 1943. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.15.1>
- [63] R. K. Sheth and G. Tormen, "An excursion set model of hierarchical clustering: ellipsoidal collapse and the moving barrier," *MNRAS*, vol. 329, pp. 61–75, Jan. 2002.
- [64] A. R. Zentner, "The Excursion Set Theory of Halo Mass Functions, Halo Clustering, and Halo Growth," *International Journal of Modern Physics D*, vol. 16, pp. 763–815, 2007.
- [65] J. Pan, Y. Wang, X. Chen, and L. F. A. Teodoro, "Effects of correlation between merging steps on the global halo formation," *MNRAS*, vol. 389, pp. 461–468, Sep. 2008.
- [66] J. Pan, "Fractional Brownian motion and the halo mass function," *MNRAS*, vol. 374, pp. L6–L9, Jan. 2007.
- [67] F. Sylos Labini and L. Amendola, "The Power Spectrum in a Strongly Inhomogeneous Universe," *ApJ*, vol. 468, p. L1, Sep. 1996.
- [68] B. B. Mandelbrot, "Galaxy distributions and fractals," *Astrophysical Letters and Communications*, vol. 36, pp. 1–5, Dec. 1997.
- [69] V. V. Uchaikin, "If the Universe Were a Levy-Mandelbrot Fractal," *Gravitation and Cosmology*, vol. 10, pp. 5–24, Jun. 2004.
- [70] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, 1983. [Online]. Available: <http://books.google.es/books?id=0R2LkE3N7-oC>
- [71] F. Sylos Labini, M. Montuori, and L. Pietronero, "Scale-invariance of galaxy clustering," *Phys. Rep.*, vol. 293, pp. 61–226, 1998.
- [72] S. S. Hofmann R., Minert J., "Cosmological parameters from planck data in Λ CDM, their local Λ CDM values, and the modified photon Boltzmann equation," *Annalen der Physik*, vol. 535, no. 7, pp. 1–11, May 2023.
- [73] A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. M. White, J. M. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. M. P. Couchman, and N. Yoshida, "The mass function of dark matter haloes," *MNRAS*, vol. 321, pp. 372–384, Feb. 2001.
- [74] M. S. Warren, K. Abazajian, D. E. Holz, and L. Teodoro, "Precision Determination of the Mass Function of Dark Matter Halos," *ApJ*, vol. 646, pp. 881–885, Aug. 2006.
- [75] Z. L. Wen, J. L. Han, and F. S. Liu, "Mass function of rich galaxy clusters and its constraint on σ_8 ," *MNRAS*, vol. 407, pp. 533–543, Sep. 2010.