Ciencia en Desarrollo Vol. 2, No. 2
Dic. 2006, p.29-38
ISSN 0121-7488

# Colas de un elemento por una Relación

An element lines linked to a relationship

Miguel Patarroyo-Mesa*
Manuel Suárez-Martínez**

## Resumen

Da a conocer algunos resultados acerca de las propiedades de las relaciones de equivalencia y de las de orden con el lenguaje, comúnmente llamado colas de un elemento. Es decir, se desea mostrar un enlace entre algunos conceptos de la teoría de conjuntos, en este caso, con las definiciones de las propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva e intransitiva, y las nociones de colas a derecha y a izquierda de un elemento por una relación.

## Palabras clave

Cola de un elemento, Propiedad reflexiva, Propiedad irreflexiva, Propiedad transitiva, Propiedad intransitiva, Propiedad simétrica, Propiedad antisimétrica.

* Docente ocasional tiempo completo Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
E-mail: mpatarroyo@tunja.uptc.edu.co - patarroyommiguel@yahoo.com
** Docente pensionado Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

## Abstract

This article lets to be known some results about the equivalence relationships' properties and those of order with the language commonly called an element's lines. That is to say, it is wanted to show a connection among some concepts of the theory of set, in this case, with the definitions of the properties: Reflexive, irreflexive, symmetrical, antisymmetrical, transitive and intransitive, and those notions of lines to the right and to the left of an element for a relationship.

## Key words:

Line of an element, Reflexive property, Irreflexive property, Transitive property, Intransitive property, Symmetrical property, Anti-symmetrical property .

*Agradecimientos: Pedro Nel Maluendas.*

## 1. Introducción

El tiempo pasa y diariamente todo es nuevo; los sucesos y hechos cotidianos que día tras día se dan, nunca se repiten, sino que se encadenan creativamente a través de un proceso histórico y epistemológico, con un procedimiento de asimilación y recreación científico-cultural que se muestra por medio de la educación, la pedagogía y la lucha persistente por conseguir nuevos aportes del saber; además, tales hechos se utilizan para la adquisición del conocimiento, y están en constante maduración y modernización, que facilita al estudiante su comprensión, pretendiendo obtener una formación pedagógica apropiada para el futuro docente, con visión de innovador e investigador en su campo y en su producción social.

La noción de colas de un elemento por una relación, uno de tantos temas asociados a las matemáticas, es fundamento para continuar con el estudio de temáticas como la relación de equivalencia, la relación de orden, la clase de equivalencia, entre otros tantos relacionados a esta ciencia.

Con base en lo expuesto, el siguiente artículo desea mostrar una relación de algunos conceptos de teoría de conjuntos, en este caso, con los conceptos de las propiedades reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva e intransitiva; con las nociones de colas (a derecha y a izquierda) de un elemento por una relación. Por consiguiente, se darán las correspondientes definiciones y luego se demostrarán estos conceptos en términos de colas (a derecha y a izquierda); los respectivos ejemplos de cada proposición con diferentes conjuntos, así como los ejemplos de colas a derecha y a izquierda en conjuntos finitos e infinitos, se pueden encontrar en la monografía .Colas de un elemento por una relación: una propuesta didáctica.año 2003.

## 2. Preliminares

### 2.1 Conceptos básicos

**Definición 1.** Una relación se llama de equivalencia en un conjunto $A$ si ella es reflexiva, simétrica y transitiva en $A$.

**Definición 2.** Sea $R$ una relación de equivalencia definida en un conjunto $A$ no vacío y sea $b$ un elemento cualquiera de $A$; se llama clase de equivalencia de $b$ (con respecto a la relación $R$) al conjunto constituido por todos los elementos de $A$ que están relacionados mediante $R$ con $b$.

**Definición 3.** Una relación $R$ en un conjunto $A$ se llama una relación de orden en $A$ si $R$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva en $A$.

**Definición 4.** La relación idéntica en un conjunto cualquiera $A$, simbolizado por $\triangle$ o $\triangle_A$, es el conjunto de todos los pares de $A$ x $A$ cuyos elementos son iguales, es decir, $\triangle_A = \{\langle a, a\rangle : a \in A\}$. La relación idéntica también se llama diagonal por la posición que ocupa en un diagrama de coordenadas de $A$ x $A$

**Definición 5.** Cola a derecha de un elemento por una relación.
Sean:

- $X$ un conjunto,
- $R$ una relación en el conjunto $X$ y
- $a$ un elemento del conjunto $X$

"Cola a derecha del elemento $a$" es el conjunto formado por todos los elementos con los que $a$ se relaciona.

La cola a derecha del elemento a se simboliza $Cd(a,R)$, o $Cd(a)$ si no es necesario mencionar la relación. En notación simbólica, $Cd(a) = \{x \in X, aRx\}$.

**Definición 6.** Cola a izquierda de un elemento por una relación.
Sean:

- $X$ un conjunto,
- $R$ una relación en el conjunto $X$ y
- $a$ un elemento del conjunto $X$

"Cola a izquierda del elemento $a$" es el conjunto formado por todos los elementos que se relacionan con $a$.

La cola a izquierda del elemento $a$ se simboliza $\mathrm{Ci}(a,R)$, o $\mathrm{Ci}(a)$ si no es necesario mencionar la relación. En notación simbólica, $\mathrm{Ci}(a) = \{x \in X, xRa\}$.

## 3. Colas en una relación reflexiva

**Definición 7.** "Propiedad reflexiva de una relación"

Una relación definida en un conjunto $A$ se llama reflexiva en $A$, si todo elemento de $A$ está relacionado consigo mismo.
En símbolos:
$R$ es reflexiva en $A \Leftrightarrow (\forall x \in A)(xRx)$.

**Proposición 1**. "Colas en una relación con la propiedad reflexiva"

i. Si una relación es reflexiva en $A$, entonces todo elemento de $A$ es de su cola a derecha.

$\forall x,\ x \in Cd(x) \Leftrightarrow R$ es reflexiva.

ii. Si una relación es reflexiva en $A$, entonces todo elemento de $A$ es de su cola a izquierda.

$\forall x,\ x \in \mathrm{Ci}(x) \Leftrightarrow R$ es reflexiva.

## 4. Colas en una relación irreflexiva

**Definición 8.** "Propiedad irre.exiva de una relación"
Una relación definida en un conjunto $A$ se llama irreflexiva en $A$, si ningún elemento de $A$ está relacionado consigo mismo.
En símbolos:
$R$ es irreflexiva en $A \Leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow \neg(xRx))$.

**Proposición 2.** "Colas en una relación con la propiedad irreflexiva"

i Si una relación es irreflexiva en $A$, entonces ningún elemento de $A$ es de su cola a derecha, simbólicamente: $\forall x \in A,\ x \notin Cd(x)$.
ii Si una relación es irreflexiva en $A$, entonces ningún elemento de $A$ es de su cola a izquierda, simbólicamente: $\forall x \in A,\ x \notin \mathrm{Ci}(x)$.

Equivalentemente,

$R$ es irreflexiva $\Leftrightarrow \forall x,\ x \notin Cd(x) \Leftrightarrow \forall x,\ x \notin \mathrm{Ci}(x)$.

**Demostración**. Para una relación $R$ se cumple que:
$R$ es irreflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A, \neg(xRx)$
$R$ es irreflexiva $\Leftrightarrow \forall x, \forall y, xRy \Rightarrow x = y$
$\Rightarrow$) Supóngase que $R$ es irreflexiva, y sea $x$ un elemento cualquiera de $A$.
Luego $\neg(xRx)$. Por esto, $x \notin Cd(x)$.
$\Leftarrow$) Sea $x \in A$, entonces por hipótesis, $x \notin Cd(x)$. Luego $\neg(xRx)$.

## 5. Colas en una relación transitiva

**Definición 9.** "Propiedad transitiva de una relación"
Una relación definida en un conjunto se llama transitiva en dicho conjunto, si cada vez que un elemento esté relacionado con un segundo elemento, y este a su vez lo esté con un tercero, entonces también el primero está relacionado con el tercero.
En símbolos:
$R$ es transitiva en $A \Leftrightarrow (\forall x, \forall y, \forall z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

**Proposición 3.** "Colas en una Relación con la propiedad transitiva"
Una relación es transitiva en un conjunto sí y sólo sí toda cola a derecha contiene las colas a derecha de sus elementos.
Sea $R$ una relación sobre un conjunto $X$.
Las dos condiciones siguientes son equivalentes:
$i)$ La relación $R$ es transitiva
$ii)$ Toda cola a derecha contiene las colas de sus elementos.

**Demostración.** $i\ )\quad ii)$ Sean $a$, $b$, $c$ elementos de $X$, tales que $a < b < c$, con $aRb$ y $bRc$

| | |
|---|---|
| 1. $aRb$ | Hipótesis |
| 2 $bRc$ | Hipótesis |
| 3 $b\ 2\ Cd(a)$ | De 1), por definición de cola a derecha. |
| 4 $c\ 2\ Cd(b)$ | De 2), por definición de cola a derecha. |
| 5 $aRc$ | De 1) y 2), por hipótesis (R es transitiva) |
| 6 $c\ 2\ Cd(a)$ | De 5), por definición de cola a derecha. |
| 7. $Cd(a) \supseteq Cd(b)$ | De 6). |

$ii\ )\quad i)$ Sean $a$, $b$, $c$ elementos arbitrarios de $X$, tales que $a < b < c$, y con $Cd(a) \supseteq Cd(b) \supseteq Cd(c)$

| | |
|---|---|
| 1. $b\ 2\ Cd(a)$ | Hipótesis |
| 2 $c\ 2\ Cd(b)$ | Hipótesis |
| 3 $aRb$ | De 1), por definición de cola a derecha. |
| 4 $bRc$ | De 2), por definición de cola a derecha. |
| 5 $Cd(b)\ Cd(a)$ | De 1) y 2), por hipótesis (toda cola a derecha contiene las colas de sus elementos) |
| 6 $c\ 2\ Cd(a)$ | De 2) y 5), por definición de inclusión de conjuntos. |
| 7. $aRc$ | De 6), por definición de cola a derecha. |

## 6. Colas en una relación intransitiva

**Definición 10.** "Propiedad intransitiva de una relación"
Una relación definida en un conjunto A se llama intransitiva en A si cada vez que un elemento de $A$ esté relacionado con un segundo y este a su vez lo esté con un tercero, entonces el primero no está relacionado con el tercero.
En símbolos:
$R$ es intransitiva en $A$ $\ ,\quad (8x,\ 8y,\ 8z,2\ A)(xRy\ \wedge\ yRz\ !\quad :(xRz))$.

**Proposición 4.** "Colas en una Relación con la propiedad intransitiva"
Una relación es intransitiva en un conjunto, sí y sólo sí ninguna cola a derecha contiene las colas a derecha no vacías de sus elementos.

En símbolos
$R$ es intransitiva $\Leftrightarrow$ $\forall x,\ \forall y,\ (y \in Cd(x) \Rightarrow \emptyset = Cd(y) \nsubseteq Cd(x))$.

**Demostración.** $\Rightarrow$) Si una relación es intransitiva en un conjunto, entonces ninguna cola a derecha contiene las colas a derecha no vacías de sus elementos.

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x, \forall y, \forall z, xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz$ | Hipótesis |
| 2. $x \in X \wedge y \in Cd(x)$ | Hipótesis |
| 3. $Cd(y) = \emptyset$ | Hipótesis |
| 4. $\exists z \in Cd(y)$ | De 3), por negación de conjunto vacío |
| 5. $yRz$ | De 4), por definición de cola a derecha |
| 6. $y \in Cd(x)$ | Hipótesis |
| 7. $xRy$ | De 6), por definición de cola a derecha |
| 8. $xRy \wedge yRz$ | De 7) y 5). |
| 9. $\neg(xRz)$ | De 8), por 1). |
| 10. $z \notin Cd(x)$ | De 9), por definición de cola a derecha |
| 11. $\emptyset = Cd(y) \nsubseteq Cd(x)$ | De 4) y 10), por de.nición de Inclusión de conjunto |

$\Leftarrow$) Si ninguna cola a derecha contiene las colas a derecha no vacías de sus elementos, entonces la relación es intransitiva.

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x, \forall y, (y \in Cd(x) \Rightarrow \emptyset = Cd(y) \nsubseteq Cd(x))$ | Hipótesis |
| 2. $\forall x, \forall y, y \in Cd(x) \Rightarrow \exists z(z \in (\emptyset = Cd(y)) \wedge z \notin Cd(x))$ | De 1), por definición de inclusión. |
| 3. $\forall x, \forall y, \forall z, y \in Cd(x) \Rightarrow (z \in (\emptyset = Cd(y)) \wedge z \notin Cd(x))$ | De 2), por negación del cuantificador existencial |
| 4. $\forall x, \forall y, \forall z, (y \in Cd(x) \wedge z \in (\emptyset = Cd(y)) \Rightarrow z \notin Cd(x))$ | De 3), por tautología $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$. |
| 5. $\forall x, \forall y, \forall z, (xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg(xRz))$ | De 4), por definición de cola a derecha. |

## 7. Colas en una relación simétrica

**Definición 11.** "Propiedad simétrica de una relación"
Una relación definida en un conjunto se llama Simétrica en dicho conjunto, si cada vez que un elemento está relacionado con otro, también el segundo está relacionado con el primero.
En símbolos:
R es simétrica en $A$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x, \forall y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$.
**Proposición 5**. Colas en una Relación con la propiedad Simétrica.
Una relación es simétrica en un conjunto $X$, sí y sólo sí, para cada elemento $a$ de $X$ sus colas coinciden. Esto es, $Cd(a) = \mathrm{Ci}(a)$.
**Demostración.** $\Rightarrow$) Debe mostrarse que para un elemento $a$, $Cd(a) \subseteq \mathrm{Ci}(a)$ y además que $\mathrm{Ci}(a) \subseteq Cd(a)$.

$Cd(a) \subseteq \mathrm{Ci}(a)$?

| | |
|---|---|
| 1. $x \in Cd(a)$ | Hipótesis |
| 2. $aRx$ | De1), por definición de cola a derecha |
| 3. $xRa$ | De 2), pues R es simétrica |
| 4. $x \in \mathrm{Ci}(a)$ | De 3), por definición de cola a izquierda |

$\mathrm{Ci}(a) \subseteq Cd(a)$?

| | |
|---|---|
| 1. $x \in \mathrm{Ci}(a)$ | Hipótesis |
| 2. $xRa$ | De 1), por definición de cola a izquierda |
| 3. $aRx$ | De 2), por $R$ ser simétrica |
| 4. $x \in Cd(a)$ | De 3), por definición de cola a derecha |

( ) Debe mostrarse que $R$ es simétrica.

| | |
|---|---|
| 1. $xRa$ | Hipótesis |
| 2. $x \in \mathrm{Ci}(a)$ | De 1), por definición de cola a izquierda |
| 3. $\mathrm{Ci}(a) \subseteq Cd(a)$ | Hipótesis |
| 4. $x \in Cd(a)$ | De 2), 3) por sustitución de 3) en 2) |
| 5. $aRx$ | De 4) por definición de cola a derecha. |

## 8. Colas en una relación antisimétrica

**Definición 12.** Propiedad antisimétrica de una relación.
Una relación $R$ es antisimétrica en el conjunto $A$, si para toda $x$, $y$ en $A$, cada vez que $x$ se relaciona con $y$, y además $y$ se relaciona con $x$, entonces $x = y$.
En símbolos:
$R$ es antisimétrica en $A \Leftrightarrow (\forall x, \forall y \in A)(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$.

**Proposición 6.** "Colas en una Relación con la propiedad Antisimétrica"

i Si dos elementos están mutuamente en sus colas a izquierda en una relación antisimétrica entonces, sus colas coinciden.
En símbolos:
$R$ es antisimétrica en $A \Rightarrow (\forall x, \forall y \in A)(x \in \mathrm{Ci}(y) \wedge y \in \mathrm{Ci}(x) \rightarrow \mathrm{Ci}(y) = \mathrm{Ci}(x))$.

ii Si dos elementos están mutuamente en sus colas a derecha en una relación antisimétrica, entonces, sus colas coinciden.
En símbolos:
$R$ es antisimétrica en $A \Rightarrow (\forall x, \forall y \in A)(x \in Cd(y) \wedge y \in Cd(x) \rightarrow Cd(y) = Cd(x))$.

**Demostración**.

| | |
|---|---|
| 1. $R$ es antisimétrica | Hipótesis |
| 2. $x \in \mathrm{Ci}(y) \wedge y \in \mathrm{Ci}(x)$ | Hipótesis |
| 3. $x \in \mathrm{Ci}(y)$ | De 2), por $p \wedge q \Rightarrow p$ |
| 4. $xRy$ | De 3), por definición de cola a izquierda |
| 5. $y \in \mathrm{Ci}(x)$ | De 2), por $p \wedge q \Rightarrow q$ |
| 6. $yRx$ | De 5), por definición de cola a izquierda. |
| 7. $x = y$ | De 4) y 6) por 1). |
| 8. $\mathrm{Ci}(x) = \mathrm{Ci}(y)$ | De 7). |

**Proposición 7.** Sea $R$ una relación en $X$,
$R$ es antisimétrica, sí y sólo sí, para cada elemento $x$ del conjunto, la intersección de sus colas a derecha e izquierda tiene a lo sumo un elemento: $x$.
En símbolos:
$R$ es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x, Cd(x) \cap \mathrm{Ci}(x) \subseteq \{x\}$.

**Demostración**. $\Rightarrow)$

| | |
|---|---|
| 1. $R$ es antisimétrica | Hipótesis |
| 2. $y \in Cd(x) \cap \mathrm{Ci}(x)$ | Hipótesis |
| 3. $y \in Cd(x) \wedge y \in \mathrm{Ci}(x)$ | De 2), por definición de intersección |
| 4. $y \in Cd(x)$ | De 3), pues $p \wedge q \Rightarrow p$ |
| 5. $xRy$ | De 4), por definición de cola a derecha. |
| 6. $y \in \mathrm{Ci}(x)$ | De 3), pues $p \wedge q \Rightarrow q$ |
| 7. $yRx$ | De 6), por definición de cola a izquierda. |
| 8. $xRy \wedge yRx$ | De 5) y 7). |
| 9. $y = x$ | De 8), por 1). |
| 10. $y \in \{x\}$ | De 9), por definición de conjunto unitario. |

$(\Leftarrow)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x, Cd(x) \cap \mathrm{Ci}(x) \subseteq \{x\}$ | Hipótesis |
| 2. $xRy \wedge yRx$ | Hipótesis |
| 3. $xRy$ | De 2), pues $p \wedge q \Rightarrow p$ |
| 4. $x \in \mathrm{Ci}(y)$ | De 3), por definición de cola a izquierda. |
| 5. $yRx$ | De 2), pues $p \wedge q \Rightarrow q$ |
| 6. $x \in Cd(y)$ | De 5), por definición de cola a derecha |
| 7. $x \in \mathrm{Ci}(y) \wedge x \in Cd(y)$ | De 4) y 6). |
| 8. $x \in \mathrm{Ci}(y) \cap Cd(y)$ | De 7), por definición de intersección |
| 9. $\mathrm{Ci}(y) \cap Cd(y) \subseteq \{y\}$ | De 1. |
| 10. $x \in \{y\}$ | De 3), 9), por definición de subconjunto. |
| 11. $x = y$ | De 10), por definición de conjunto unitario. |

## 9. Observaciones

Cabe notar que existe una similitud al hallar la cola a derecha de un elemento $a$ mediante una relación y la clase de equivalencia de un elemento $a$ con respecto a una relación, ya que en ambos casos obtenemos el conjunto formado o constituido por todos los elementos que están relacionados con el elemento $a$ por medio de la relación dada. Sin embargo, también hay una diferencia entre ellas, ya que en la clase de equivalencia se requiere tener una relación de equivalencia definida en el conjunto, mientras que para hallar el conjunto formado por todos los elementos con los que $a$ se relaciona (Cola a derecha) basta trabajar con cualquier propiedad o relación que no necesariamente sea de equivalencia.

En una relación $R$ reflexiva sobre un conjunto $X$, las colas a derecha y a izquierda no necesariamente coinciden, esto ocurre únicamente cuando se trabaja con una relación idéntica.

En una relación $R$ irreflexiva sobre un conjunto $X$, las colas a derecha y a izquierda no necesariamente son vacías, al menos que en la relación ningún elemento de $A$ esté relacionado con otro.

En una relación $R$ irreflexiva sobre un conjunto $X$, ningún elemento tiene bucle, luego ningún elemento es de su cola a derecha, ni de su cola a izquierda.

En una relación $R$ irreflexiva sobre un conjunto $X$, las colas a derecha y a izquierda son: vacías, unitarias o con más de un elemento.

## Referencias

[1] Muñoz Quevedo, José M. 1994. Introducción a la teoría de conjuntos. Tercera edición. Universidad Nacional de Colombia. págs. 123-129.

[2] Suppes, Patrick. 1966. Introducción a la lógica simbólica. Cecsa. México págs. 258-279.

[3] Lipschutz, Seymour. 1970. Topología General. McGraw-Hill. Mexico. págs. 5-7.

[4] Patarroyo M., Miguel. 2003. Colas de un elemento por una relación. Trabajo de grado. Escuela de Matemáticas y Estadística. Facultad Ciencias de la Educación. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja.