Ecuaciones Holonómicas Asociadas a Transformaciones Canónicas del Peso Clásico de Laguerre

Holonomic Equations Associated to Canonical Transformations of the Classical Laguerre Weight

L. A. Molano Molano[a,*]

Recepción: 26-abr-13
Aceptación: 17-jul-13

Resumen

En este artículo se usan técnicas estándar para encontrar ecuaciones diferenciales satisfechas por polinomios ortogonales asociados a transformaciones canónicas del peso clásico de Laguerre $\omega(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, sobre $(0, \infty)$, con $\alpha > -1$.

***Palabras clave*:** Ecuaciones holonómicas, Polinomios ortogonales clásicos, Transformaciones canónicas.

Abstract

In this paper, it is used the standard techniques to find some differential equations satisfied by orthogonal polynomials, associated with the classical Laguerre weight canonical transformations $\omega(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, on $(0, \infty)$, with $\alpha > -1$.

***Key words*:** Holonomic Equations, Associated to the Classical, Laguerre Canonical Weight's, Transformations Weight.

[a]Facultad Seccional Duitama, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá.
[*]Correo electrónico: luis.molano01@uptc.edu.co

1. Introducción

Sea $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al peso clásico de Laguerre $\omega(x) = e^{-x}x^{\alpha}$ sobre $(0, \infty)$, con $\alpha > -1$. En este escrito estamos interesados en estudiar propiedades diferenciales de los polinomios ortogonales con respecto a los pesos $\rho(x)\omega(x)$, $\rho^{*}(x)\omega(x)$ y $\rho^{**}(x)\omega(x)$ donde $\rho(x) = \dfrac{x-\zeta}{x-\eta}$, $\rho^{*}(x) = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)$ y $\rho^{**}(x) = \dfrac{1}{x-\eta}$, además ζ, ζ_1, ζ_2 y η son reales negativos. Estas perturbaciones al peso original son conocidas como transformaciones canónicas de tipo Christoffel o Geronimus, y las familias de polinomios ortogonales asociadas a estas han sido ampliamente estudiadas en las últimas décadas, destacando los trabajos [4], [6], [7], [8], [9], [14] y [15], en esencia, relacionados con comportamiento asintótico y localización de ceros. Es bien sabido que las sucesiones clásicas de polinomios ortogonales satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$\sigma(x)p''(x) + \tau(x)p'(x) + \lambda_n p(x) = 0,$$

donde $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ son polinomios tales que el grado de $\sigma(x)$ no es mayor a 2 y el de $\tau(x)$ es exactamente 1. Esta particularidad es de hecho una característica única de tales sucesiones clásicas. De este modo, resulta interesante estudiar qué tipo de ecuaciones diferenciales (conocidas en la literatura como ecuaciones holonómicas) son satisfechas por los polinomios asociados a las perturbaciones descritas anteriormente, y analizar la naturaleza de sus coeficientes. El conocimiento de la estructura de las ecuaciones diferenciales de segundo orden satisfechas por familias de polinomios ortogonales es la piedra angular en la descripción de modelos electrostáticos asociados a los ceros de tales polinomios (ver [5], [10] o [12]). Son muy conocidas las técnicas estándar que son aplicadas en la obtención de ecuaciones holonómicas asociadas particularmente a perturbaciones del peso clá sico, por ejemplo, con las llamadas perturbaciones de Uvarov (ver [2], [3], [11]) o con la perturbación canónica de Christofel $\rho(x) = x-\zeta$ al peso de Laguerre ([7]). Nuestro objetivo es adaptar esas técnicas para buscar ecuaciones holonómicas asociadas a las perturbaciones sobre el peso clásico de Laguerre, ya mencionadas. En este sentido, la estructura de este escrito es como sigue. En la sección 2 presentamos los preliminares básicos con respecto a los polinomios de Laguerre clásicos, los cuales nos resultarán muy útiles más adelante; en la sección 3 obtenemos la ecuación holonómica satisfecha por los polinomios asociados a perturbaciones de tipo Geronimus, y en la sección 4 hacemos lo propio con perturbaciones de tipo Christofel.

2. Preliminares

Sea $\{L_n^{\alpha}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión clásica de polinomios mónicos ortogonales de Laguerre, asociada al producto interno

$$\langle r, q\rangle_{\alpha} = \int_0^{\infty} r(x)q(x)d\mu_{\alpha}, \tag{1}$$

donde $d\mu_{\alpha} = e^{-x}x^{\alpha}dx$. Es bien sabido que los ceros de $L_n^{\alpha}(x)$ son reales positivos de multiplicidad 1. Resumimos algunas de las propiedades de esta familia de polinomios ortogonales que serán usadas a lo largo del manuscrito, y cuya prueba puede ser vista en [1] o [13].

Proposición 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, los polinomios $\{L_n^{\alpha}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen

1. (Relación de recurrencia a tres términos).

$$\begin{aligned} xL_n^{\alpha}(x) = L_{n+1}^{\alpha}(x) + (2n+1+\alpha)L_n^{\alpha}(x) \\ + n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

   con $L_0^{\alpha}(x) = 1$ y $L_1^{\alpha}(x) = x-(\alpha+1)$. (escribiremos $\alpha_n = 2n+1+\alpha$, y $\beta_n = n(n+\alpha)$)

2. (Relación de estructura)

$$L_n^{\alpha}(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{3}$$

3. $L_n^{\alpha}(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' = -ny, \tag{4}$$

   y tiene la propiedad diferencial

4.

$$x\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' = nL_n^{\alpha}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x). \tag{5}$$

Sea también $\left\{L_n^{[\alpha,k]}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto interno

$$\begin{aligned} \langle r, q\rangle_k &= \int_0^{\infty} r(x)q(x)(x-\zeta)^k d\mu_{\alpha} \\ &= \int_0^{\infty} r(x)q(x)d\mu_{\alpha,k}, \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $\zeta < 0$. Estos polinomios satisfacen la relación (ver [8]),

$$(x-\zeta)L_n^{[\alpha,k]}(x) = L_{n+1}^{[\alpha,k-1]}(x) - \frac{L_{n+1}^{[\alpha.k-1]}(\zeta)}{L_n^{[\alpha.k-1]}(\zeta)} L_n^{[\alpha.k-1]}(x), \quad (6)$$

con $L_n^{[\alpha,0]}(x) = L_n^{\alpha}(x)$, y en el caso particular $k = 1$ tenemos que

$$(x-\zeta)L_n^{[\alpha,1]}(x) = L_{n+1}^{\alpha}(x) - \frac{L_{n+1}^{\alpha}(\zeta)}{L_n^{\alpha}(\zeta)} L_n^{\alpha}(x). \quad (7)$$

De las últimas ecuaciones es fácil ver que se satisface

$$\left\|L_n^{[\alpha,k]}\right\|_k^2 = -\frac{L_{n+1}^{[\alpha,k-1]}(\zeta)}{L_n^{[\alpha,k-1]}(\zeta)} \left\|L_n^{[\alpha,k-1]}\right\|_{k-1}^2, \quad (8)$$

y en forma recursiva

$$\left\|L_n^{[\alpha,k]}\right\|_k^2 = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{L_{n+1}^{[\alpha,k-j]}(\zeta)}{L_n^{[\alpha,k-j]}(\zeta)} \left\|L_n^{\alpha}\right\|_{\alpha,}^2.$$

donde la notación $\|,\|$ indica la norma inducida por el respectivo producto interno.

3. Ecuaciones holonómicas asociadas a perturbaciones de tipo Geronimus

Sea $\{T_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto interno

$$\langle p,q\rangle_{\xi,\eta} = \int_0^{\infty} p(x)q(x)\frac{(x-\xi)}{(x-\eta)}d\mu_{\alpha},$$

donde ξ y η son reales negativos tales que $\xi \neq \eta$. Además sean $\{C_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{G_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a los productos

$$\langle p,q\rangle_{\xi} = \int_0^{\infty} p(x)q(x)(x-\xi)d\mu_{\alpha},$$

y

$$\langle p,q\rangle_{\eta} = \int_0^{\infty} p(x)q(x)\frac{d\mu_{\alpha}}{(x-\eta)},$$

respectivamente. Si consideramos la base $\{G_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces el polinomio $(x-\xi)T_n^{\alpha}(x)$ puede ser expresado del siguiente modo

$$(x-\xi)T_n^{\alpha}(x) = G_{n+1}^{\alpha}(x) + \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}G_j^{\alpha}(x),$$

donde

$$w_{n,j} = \frac{\int_0^{\infty} T_n^{\alpha}(x)G_j^{\alpha}(x)\frac{(x-\xi)}{(x-\eta)}d\mu_{\alpha}}{\left\|G_j^{\alpha}\right\|_{\eta}^2},$$

y $\left\|G_j^{\alpha}\right\|_{\eta}^2 = \left\langle G_j^{\alpha}(x), G_j^{\alpha}(x)\right\rangle_{\eta}$. Si $j = 0,1,...,n-1$, entonces $w_{n,j} = 0$, pero

$$w_{n,n} = \frac{\int_0^{\infty} T_n^{\alpha}(x)G_n^{\alpha}(x)\frac{(x-\xi)}{(x-\eta)}d\mu_{\alpha}}{\|G_n^{\alpha}\|_{\eta}^2},$$

entonces

$$(x-\xi)T_n^{\alpha}(x) = G_{n+1}^{\alpha}(x) + \frac{\left\|T_n^{\alpha}\right\|_{\xi,\eta}^2}{\|G_n^{\alpha}\|_{\eta}^2}G_n^{\alpha}(x), \quad (9)$$

y evaluando esta última ecuación en ξ obtenemos

$$\left\|T_n^{\alpha}\right\|_{\xi,\eta}^2 = -\frac{G_{n+1}^{\alpha}(\xi)}{G_n^{\alpha}(\xi)}\left\|G_n^{\alpha}\right\|_{\eta}^2,$$

como consecuencia

$$(x-\xi)T_n^{\alpha}(x) = G_{n+1}^{\alpha}(x) - \frac{G_{n+1}^{\alpha}(\xi)}{G_n^{\alpha}(\xi)}G_n^{\alpha}(x).$$

Podemos hacer lo anterior con el polinomio $(x-\eta)C_n^{\alpha}(x)$ usando como base la familia $\{T_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ obteniendo

$$(x-\eta)C_n^{\alpha}(x) = T_{n+1}^{\alpha}(x) + \frac{\left\|C_n^{\alpha}\right\|_{\xi}^2}{\|T_n^{\alpha}\|_{\zeta,\eta}^2}T_n^{\alpha}(x), \quad (10)$$

y evaluando esta última expresión en η

$$\left\|C_n^{\alpha}\right\|_{\xi}^2 = -\frac{T_{n+1}^{\alpha}(\eta)}{T_n^{\alpha}(\eta)}\left\|T_n^{\alpha}\right\|_{\zeta,\eta}^2 = \frac{T_{n+1}^{\alpha}(\eta)}{T_n^{\alpha}(\eta)}\frac{G_{n+1}^{\alpha}(\xi)}{G_n^{\alpha}(\xi)}\left\|G_n^{\alpha}\right\|_{\eta}^2,$$

para obtener finalmente

$$(x-\eta)C_n^{\alpha}(x) = T_{n+1}^{\alpha}(x) - \frac{T_{n+1}^{\alpha}(\eta)}{T_n^{\alpha}(\eta)}T_n^{\alpha}(x).$$

Teniendo en cuenta (9) tenemos la ecuación

$$(x-\xi)T_n^{\alpha}(x) = G_{n+1}^{\alpha}(x) + A_nG_n^{\alpha}(x) \quad (11)$$

donde

$$A_n = -\frac{G_{n+1}^{\alpha}(\xi)}{G_n^{\alpha}(\xi)}\left\|G_n^{\alpha}\right\|_{\eta}^2.$$

Encontraremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden satisfecha por $T_n^{\alpha}(x)$. Para empezar, es importante destacar el trabajo [6], donde se obtuvo la siguiente fórmula de conexión

$$G_n^{\alpha}(x) = L_n^{\alpha-1}(x) + B_n L_{n-1}^{\alpha}(x),$$

donde

$$B_n = n + w_n.$$

y la constante w_n, (sólo depende del grado del polinomio), tiene la fórmula explícita

$$w_n = \frac{\eta}{n}\frac{I(\alpha-1,n)}{I(\alpha,n-1)},$$

donde

$$I(\alpha,n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x-\eta)^{n+1}} d\mu_{\alpha},$$

y como consecuencia de esta última definición, claramente $I(\alpha,n) > 0$ y $w_n < 0$. En [6] también es mostrado el comportamiento asintótico de la constante w_n, a saber, $w_n \approx -\frac{\sqrt{-\eta}}{n^{3/2}}$. Empezando con la fórmula (3), tenemos

$$\begin{aligned}(x-\xi)\,T_n^{\alpha}(x) &= L_{n+1}^{\alpha-1}(x) + B_{n+1}L_n^{\alpha}(x) + A_n L_n^{\alpha-1}(x)\\ &+ A_n B_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= L_{n+1}^{\alpha}(x) + (n+1)L_n^{\alpha}(x) + B_{n+1}L_n^{\alpha}(x)\\ &+ A_n L_n^{\alpha}(x) + nA_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &+ A_n B_n L_{n-1}^{\alpha}(x),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}(x-\xi)\,T_n^{\alpha}(x) = L_{n+1}^{\alpha}(x) &+ D_n L_n^{\alpha}(x)\\ &+ E_n L_{n-1}^{\alpha}(x) \qquad (12)\end{aligned}$$

teniendo en cuenta las expresiones de las constantes

$$D_n = (n+1) + B_{n+1} + A_n$$

y

$$E_n = A_n\,(n + B_n)\,.$$

Derivando la ecuación (12), multiplicando cada derivada por los factores $\alpha+1-x$ y x, respectivamente, y usando (4) tenemos

$$\begin{aligned}&x\,(x-\xi)\,(T_n^{\alpha})''\,(x)\\ &+ [2x + (x-\xi)\,(\alpha+1-x)]\,(T_n^{\alpha})'\,(x) + (\alpha+1-x)\,T_n^{\alpha}(x)\\ &= -(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - nD_n L_n^{\alpha}(x) - (n-1)E_n L_{n-1}^{\alpha}(x),\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}&-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - nD_n L_n^{\alpha}(x) - (n-1)E_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= -(n+1)\left[L_{n+1}^{\alpha}(x) + D_n L_n^{\alpha}(x) + E_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\right]\\ &+ D_n L_n^{\alpha}(x) + 2E_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= -(n+1)\,(x-\xi)\,T_n^{\alpha}(x) + D_n L_n^{\alpha}(x)\\ &+ 2E_n L_{n-1}^{\alpha}(x),\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}D_n L_n^{\alpha}(x) &+ 2E_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= x\,(x-\xi)\,(T_n^{\alpha})''\,(x)\\ &+ [2x + (x-\xi)\,(\alpha+1-x)]\,(T_n^{\alpha})'\,(x)\\ &+ [(\alpha+1-x) + (n+1)\,(x-\xi)]\,T_n^{\alpha}(x).\end{aligned} \qquad (13)$$

Por otra parte, derivando (12), multiplicando por x y usando (5) tenemos

$$\begin{aligned}x\,(x-\xi)\,&(T_n^{\alpha})'\,(x) + xT_n^{\alpha}(x)\\ &= x\left(L_{n+1}^{\alpha}\right)'(x) + D_n x\,(L_n^{\alpha})'\,(x)\\ &+ E_n x\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x),\end{aligned}$$

y mediante el uso de (5) obtenemos

$$\begin{aligned}&x\,(x-\xi)\,(T_n^{\alpha})'\,(x) + xT_n^{\alpha}(x)\\ &= x\left(L_{n+1}^{\alpha}\right)'(x) + D_n x\,(L_n^{\alpha})'\,(x) + E_n x\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(x),\\ &= (n+1)\,(x-\xi)\,T_n^{\alpha}(x)\\ &+ ((n+1)(n+\alpha+1) - D_n)\,L_n^{\alpha}(x)\\ &+ (n(n+\alpha)D_n - 2E_n)\,L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &+ E_n(n-1)(n+\alpha-1)L_{n-2}^{\alpha}(x)\end{aligned}$$

y mediante el uso de (2) llegamos a la expresión

$$\begin{aligned}&x\,(x-\xi)\,(T_n^{\alpha})'\,(x) + (x - (n+1)\,(x-\xi))\,T_n^{\alpha}(x)\\ &= ((n+1)(n+\alpha+1) - D_n)\,L_n^{\alpha}(x)\\ &+ (n(n+\alpha)D_n - 2E_n)\,L_{n-1}^{\alpha}(x\\ &+ E_n(n-1)(n+\alpha-1)L_{n-2}^{\alpha}(x),\\ &= ((n+1)(n+\alpha+1) - D_n - E_n)\,L_n^{\alpha}(x)\\ &+ (n(n+\alpha)D_n - 2E_n + E_n\,(x - [2n-1+\alpha]))\,L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= F_n L_n^{\alpha}(x) + \varphi_{n,\alpha}(x) L_{n-1}^{\alpha}(x),\end{aligned}$$

donde

$$F_n = ((n+1)(n+\alpha+1) - D_n - E_n)\,,$$

y

$$\varphi_{n,\alpha}(x) = E_n x - E_n\,(2n+\alpha-1)\,.$$

De (2) y (12)

$$\begin{aligned}(x-\xi)\,T_n^{\alpha}(x) &= L_{n+1}^{\alpha}(x) + D_n L_n^{\alpha}(x) + E_n L_{n-1}^{\alpha}(x)\\ &= ((x-2n-1-\alpha) + D_n)\,L_n^{\alpha}(x)\\ &+ (E_n - n(n+\alpha))\,L_{n-1}^{\alpha}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} F_n L_n^{\alpha}(x) + \varphi_{n,\alpha}(x) L_{n-1}^{\alpha}(x) = x(x-\xi)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x) + (-nx + \xi(n+1))\, T_n^{\alpha}(x) \\ ((x-2n-1-\alpha)+D_n) L_n^{\alpha}(x) + (E_n - n(n+\alpha))\, L_{n-1}^{\alpha}(x) = (x-\xi)\, T_n^{\alpha}(x) \end{cases}$$

y teniendo en cuenta la expresión para $\Phi_{n,\alpha}(x)$

$$\begin{aligned} \Phi_{n,\alpha}(x) &= F_n\,(E_n - n(n+\alpha)) - \varphi_{n,\alpha}(x)\,((x-2n-1-\alpha)+D_n) \\ &= -E_n x^2 + E_n\,(4n+2\alpha-D_n)\,x + F_n\,(E_n - n\,(n+\alpha)) - E_n\,(2n+\alpha-1)\,(2n+\alpha-D_n+1)\,, \end{aligned}$$

entonces obtenemos explícitamente las soluciones

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha}(x) &= \frac{\det\begin{pmatrix} x(x-\xi)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x) + (-nx+\xi(n+1))\, T_n^{\alpha}(x) & \varphi_{n,\alpha}(x) \\ (x-\xi)\, T_n^{\alpha}(x) & (E_n - n(n+\alpha)) \end{pmatrix}}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &= \frac{(E_n - n(n+\alpha))\, x\,(x-\xi)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &+ \frac{(E_n - n(n+\alpha))\,(-nx+\xi(n+1))\, T_n^{\alpha}(x) - \varphi_{n,\alpha}(x)\,(x-\xi)\, T_n^{\alpha}(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &= \frac{(E_n - n(n+\alpha))\, x\,(x-\xi)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x) + \pi(x,n,\alpha) T_n^{\alpha}(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}, \end{aligned}$$

con

$$\pi(x,n,\alpha) = -E_n x^2 + \left[(n+\alpha)\left(E_n + n^2\right) + (\xi-1)\, E_n\right] x - \xi((3n+\alpha)\, E_n - (n+\alpha)\, n\,(n+1)),$$

y

$$\begin{aligned} L_{n-1}^{\alpha}(x) &= \frac{\det\begin{pmatrix} F_n & x(x-\xi)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x) + (-nx+\xi(n+1))\, T_n^{\alpha}(x) \\ ((x-2n-1-\alpha)+D_n) & (x-\xi)\, T_n^{\alpha}(x) \end{pmatrix}}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &= \frac{-x\,(x-\xi)\,((x-2n-1-\alpha)+D_n)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &- \frac{\left[(-nx+\xi(n+1))\,((x-2n-1-\alpha)+D_n) - F_n\,(x-\xi)\right] T_n^{\alpha}(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \\ &= \frac{-x\,(x-\xi)\,((x-2n-1-\alpha)+D_n)\left(T_n^{\alpha}\right)'(x) - \sigma(x) T_n^{\alpha}(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)} \end{aligned}$$

donde

$$\sigma(x,n,\alpha) = (-nx+\xi(n+1))(x-\alpha_n+D_n) - F_n(x-\xi),$$

y finalmente usando (13) tenemos

$$\begin{aligned}
&x(x-\xi)(T_n^\alpha)''(x)\\
&+[2x+(x-\xi)(\alpha+1-x)](T_n^\alpha)'(x)\\
&+[(\alpha+1-x)+(n+1)(x-\xi)]T_n^\alpha(x)\\
&= D_n\tfrac{(E_n-n(n+\alpha))x(x-\xi)(T_n^\alpha)'(x)+\pi(x)T_n^\alpha(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}\\
&+2E_n\tfrac{-x(x-\xi)((x-2n-1-\alpha)+D_n)(T_n^\alpha)'(x)-\sigma(x)T_n^\alpha(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}\\
&= \tfrac{D_n(E_n-n(n+\alpha))x(x-\xi)-2E_nx(x-\xi)((x-2n-1-\alpha)+D_n)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}\\
&\times (T_n^\alpha)'(x) + \tfrac{\pi(x)-\sigma(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}T_n^\alpha(x).
\end{aligned}$$

Resumimos los resultados de la última discusión en la siguiente

Proposición 2. El polinomio $T_n^\alpha(x)$ satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x(x-\xi)\phi''(x) + A(x,n)\phi'(x) + B(x,n)\phi(x) = 0,$$

con

$$\begin{aligned}
A(x,n) &= 2x+(x-\xi)(\alpha+1-x)\\
&+\frac{x(x-\xi)[(n(n+\alpha)+E_n)D_n - 2E_n(x-\alpha_n)]}{\Phi_{n,\alpha}(x)},
\end{aligned}$$

y

$$B(x,n) = (\alpha+1-x)+(n+1)(x-\xi) - \frac{\pi(x)-\sigma(x)}{\Phi_{n,\alpha}(x)}$$

4. Perturbaciones de tipo Christofel

Ahora consideremos a $\{S_n^\alpha(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto interno

$$\langle p,q\rangle_\mu = \int_0^\infty p(x)q(x)d\mu,$$

donde $d\mu = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)d\mu_\alpha$, y $\zeta_1 \neq \zeta_2$ son reales negativos. Además, sean $\{P_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Q_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a los productos internos

$$\langle p,q\rangle_{\mu_1} = \int_0^\infty p(x)q(x)d\mu_1,$$

y

$$\langle p,q\rangle_{\mu_2} = \int_0^\infty p(x)q(x)d\mu_2,$$

respectivamente, con $d\mu_1 = (x-\zeta_1)d\mu_\alpha$ and $d\mu_2 = (x-\zeta_2)d\mu_\alpha$. Encontraremos una fórmula de conexión para $S_n^\alpha(x)$ en términos de los polinomios $\{Q_n^\alpha(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Usando a la familia $\{Q_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ como base, expandimos el polinomio $S_n(x)$

$$(x-\zeta_1)S_n^\alpha(x) = Q_{n+1}^\alpha(x) + \sum_{j=0}^n q_{n,j}Q_j^\alpha(x),$$

donde los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$\begin{aligned}
q_{n,j} &= \frac{\left\langle (x-\zeta_1)S_n^\alpha(x), Q_j^\alpha(x)\right\rangle_{\mu_2}}{\left\langle Q_j^\alpha(x), Q_j^\alpha(x)\right\rangle_{\mu_2}}\\
&= \frac{\left\langle S_n^\alpha(x), Q_j^\alpha(x)\right\rangle_{\mu}}{\left\|Q_j^\alpha\right\|_{\mu_2}^2},
\end{aligned}$$

y entonces $q_{n,j} = 0$, para $j = 0,1,\ldots,n-1$, así $(x-\zeta_1)S_n^\alpha(x)$ puede expresarse en la siguiente forma

$$(x-\zeta_1)S_n^\alpha(x) = Q_{n+1}^\alpha(x) + \frac{\left\|S_n^\alpha\right\|_\mu^2}{\|Q_n^\alpha\|_{\mu_2}^2}Q_n^\alpha(x),$$

pero evaluando la última ecuación en ζ_1, resulta

$$\left\|S_n^\alpha\right\|_\mu^2 = -\frac{Q_{n+1}^\alpha(\zeta_1)}{Q_n^\alpha(\zeta_1)}\left\|Q_n^\alpha\right\|_{\mu_2}^2$$

así

$$(x-\zeta_1)S_n^\alpha(x) = Q_{n+1}^\alpha(x) - \frac{Q_{n+1}^\alpha(\zeta_1)}{Q_n^\alpha(\zeta_1)}Q_n^\alpha(x). \tag{14}$$

De la misma forma podemos obtener

$$\left\|S_n^\alpha\right\|_\mu^2 = -\frac{P_{n+1}^\alpha(\zeta_2)}{P_n^\alpha(\zeta_2)}\left\|P_n^\alpha\right\|_{\mu_1}^2 \tag{15}$$

y

$$(x-\zeta_2)S_n^\alpha(x) = P_{n+1}^\alpha(x) - \frac{P_{n+1}^\alpha(\zeta_2)}{P_n^\alpha(\zeta_2)}P_n^\alpha(x). \tag{16}$$

Mediante el uso de (14) y multiplicando por $(x-\zeta_2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)S_n^\alpha(x) &= (x-\zeta_2)Q_{n+1}^\alpha(x)\\
&- \frac{Q_{n+1}^\alpha(\zeta_1)}{Q_n^\alpha(\zeta_1)}(x-\zeta_2)Q_n^\alpha(x),
\end{aligned}$$

y usando (6) resulta

$$\begin{aligned}
(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)S_n^\alpha(x) &= L_{n+2}^\alpha(x)\\
&-\left(\frac{L_{n+2}^\alpha(\zeta_2)}{L_{n+1}^\alpha(\zeta_2)} + \frac{Q_{n+1}^\alpha(\zeta_1)}{Q_n^\alpha(\zeta_1)}\right)L_{n+1}^\alpha(x)\\
&+\frac{Q_{n+1}^\alpha(\zeta_1)L_{n+1}^\alpha(\zeta_2)}{Q_n^\alpha(\zeta_1)L_n^\alpha(\zeta_2)}L_n^\alpha(x).
\end{aligned}$$

Resumiendo

$$(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)S_n(x) = L^{\alpha}_{n+2}(x)+\gamma_{n,2}(\zeta_1,\zeta_2)L^{\alpha}_{n+1}(x) + \rho_{n,2}(\zeta_1,\zeta_2)L^{\alpha}_{n}(x) \quad (17)$$

con

$$\gamma_{n,2}(\zeta_1,\zeta_2) = -\left(\frac{L^{\alpha}_{n+2}(\zeta_2)}{L^{\alpha}_{n+1}(\zeta_2)} + \frac{Q^{\alpha}_{n+1}(\zeta_1)}{Q^{\alpha}_{n}(\zeta_1)}\right) > 0$$

y

$$\rho_{n,2}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{Q^{\alpha}_{n+1}(\zeta_1)L^{\alpha}_{n+1}(\zeta_2)}{Q^{\alpha}_{n}(\zeta_1)L^{\alpha}_{n}(\zeta_2)} > 0.$$

Un resultado análogo puede ser obtenido mediante el uso de (16), usando como base la familia $\{P^{\alpha}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, a saber

$$(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)S^{\alpha}_n(x) = L^{\alpha}_{n+2}(x) + \gamma_{n,1}(\zeta_1,\zeta_2)L^{\alpha}_{n+1}(x) + \rho_{n,1}(\zeta_1,\zeta_2)L^{\alpha}_{n}(x), \quad (18)$$

donde

$$\gamma_{n,1}(\zeta_1,\zeta_2) = -\left(\frac{L^{\alpha}_{n+2}(\zeta_1)}{L^{\alpha}_{n+1}(\zeta_1)} + \frac{P^{\alpha}_{n+1}(\zeta_2)}{P^{\alpha}_{n}(\zeta_2)}\right) > 0,$$

y

$$\rho_{n,1}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{P^{\alpha}_{n+1}(\zeta_2)L^{\alpha}_{n+1}(\zeta_1)}{P^{\alpha}_{n}(\zeta_2)L^{\alpha}_{n}(\zeta_1)} > 0.$$

Usando (2) y (18) tenemos

$$(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)S^{\alpha}_n(x) = (x-\alpha_{n+1}+\gamma_{n,2})\,L^{\alpha}_{n+1}(x) + (\rho_{n,2}-\beta_{n+1})\,L^{\alpha}_{n}(x),$$

y por simplicidad escribiremos $\Psi(x) = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)$,

$$\delta_n = \alpha_{n+1}-\gamma_{n,2}, \quad \epsilon_n = (\rho_{n,2}-\beta_{n+1}),$$

y así

$$\Psi(x)S^{\alpha}_n(x) = (x-\delta_n)\,L^{\alpha}_{n+1}(x)+\epsilon_n L^{\alpha}_{n}(x), \qquad (19)$$

entonces, derivando, multiplicando por $(\alpha+1-x)$ y x,, y usando (4) obtenemos

$$\begin{aligned} &x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' \\ &= (\alpha+1-x)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &-(x-\delta_n)(n+1)L^{\alpha}_{n+1}(x) + 2x\left(L^{\alpha}_{n+1}\right)'(x) - \epsilon_n n L^{\alpha}_{n}(x), \end{aligned}$$

además usando (3) resulta

$$\begin{aligned} &x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' \\ &= (\alpha+1-x)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) - (x-\delta_n)(n+1)L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ 2\,(n+1)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ 2\,(n+1)\,(n+1+\alpha)L^{\alpha}_{n}(x) - \epsilon_n n L^{\alpha}_{n}(x), \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} &x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' \\ &= ((\alpha+1-x)-(x-\delta_n)\,(n+1) \\ &+ 2\,(n+1))L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ (2\,(n+1)\,(n+1+\alpha)-\epsilon_n n)\,L^{\alpha}_{n}(x), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} &(\alpha+1-x)-(x-\delta_n)\,(n+1)+2\,(n+1) \\ &\qquad = -\,(n+2)\,x + (\alpha_{n+1}+\delta_n\,(n+1)), \end{aligned}$$

entonces si $r_1(x) = -\,(n+2)\,x + (\alpha_{n+1}+\delta_n\,(n+1))$ y $\theta_n = \beta_{n+1}-\epsilon_n n$

$$x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' = r_1(x)L^{\alpha}_{n+1}(x)+\theta_n L^{\alpha}_{n}(x). \quad (20)$$

De nuevo, tomando derivadas en (19) y multiplicando por x

$$x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' = xL^{\alpha}_{n+1}(x)+(x-\delta_n)\,x\left(L^{\alpha}_{n+1}\right)'(x) + \epsilon_n x\left(L^{\alpha}_{n}\right)'(x),$$

ahora, mediante la fórmula (3)

$$\begin{aligned} x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' &= xL^{\alpha}_{n+1}(x)+(x-\delta_n)\,(n+1)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ (n+1)\,(n+1+\alpha)\,(x-\delta_n)\,L^{\alpha}_{n}(x) \\ &+ \epsilon_n n L^{\alpha}_{n}(x) \\ &+ \epsilon_n n(n+\alpha)L^{\alpha}_{n-1}(x), \end{aligned}$$

y usando (2)

$$\begin{aligned} &x\left(\Psi(x)S^{\alpha}_n(x)\right)' \\ &= xL^{\alpha}_{n+1}(x)+(x-\delta_n)\,(n+1)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ (n+1)\,(n+1+\alpha)\,(x-\delta_n)\,L^{\alpha}_{n}(x) \\ &+ \epsilon_n n L^{\alpha}_{n}(x)+\epsilon_n\,(x-(2n+1+\alpha))\,L^{\alpha}_{n}(x) \\ &- \epsilon_n L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &= (x+(x-\delta_n)\,(n+1)-\epsilon_n)\,L^{\alpha}_{n+1}(x) \\ &+ ((n+1)\,(n+1+\alpha)\,(x-\delta_n) \\ &+ \epsilon_n n+\epsilon_n\,(x-(2n+1+\alpha)))L^{\alpha}_{n}(x). \end{aligned}$$

entonces, si definimos

$$\kappa_1(x,n,\alpha) = (n+2)\,x - (\epsilon_n+\delta_n\,(n+1)),$$

y

$$\begin{aligned} \kappa_2(x,n,\alpha) &= (\epsilon_n+(n+1)\,(n+\alpha+1))\,x \\ &\quad -(\epsilon_n+\delta_n\,(n+1))\,(n+\alpha+1), \end{aligned}$$

tenemos

$$x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)' = \pi_1(x)L_{n+1}^{\alpha}(x) + \pi_2(x)L_n^{\alpha}(x).$$

Esta última ecuación junto a (19) forman un sistema de ecuaciones con incógnitas $L_{n+1}^{\alpha}(x)$ y $L_n^{\alpha}(x)$, a saber

$$\begin{cases} (x-\delta_n)\,L_{n+1}^{\alpha}(x) + \epsilon_n L_n^{\alpha}(x) = \Psi(x)S_n^{\alpha}(x) \\ \kappa_1(x,n,\alpha)L_{n+1}^{\alpha}(x) + \kappa_2(x,n,\alpha)L_n^{\alpha}(x) = x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)' \end{cases}$$

entonces, si son usadas las expresiones de $\kappa_1(x,n,\alpha)$ y $\kappa_2(x,n,\alpha)$, y después de extensos cálculos, si

$$\begin{aligned} \Omega_n(x) &= \det\begin{pmatrix} (x-\delta_n) & \epsilon_n \\ \kappa_1(x,n,\alpha) & \kappa_2(x,n,\alpha) \end{pmatrix} \\ &= a_n x^2 + b_n x + c_n, \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \epsilon_n + (n+1)\,(n+\alpha+1)\,,$$

$$b_n = -\left(\alpha_{n+1} + \delta_n\right)\epsilon_n - 2\delta_n\beta_{n+1},$$

y

$$\begin{aligned} c_n = \epsilon_n^2 + \Big(\delta_n\epsilon_n + \delta_n^2\,(n+\alpha+1)\Big)(n+1) \\ + \delta_n\epsilon_n\,(n+\alpha+1)\,, \end{aligned}$$

las soluciones del sistema son explícitamente

$$\begin{aligned} L_{n+1}^{\alpha}(x) &= \det\begin{pmatrix} \Psi(x)S_n^{\alpha}(x) & \epsilon_n \\ x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)' & \pi_2(x) \end{pmatrix} / \Omega_{n,2}(x) \\ &= \frac{\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\pi_2(x)}{\Omega_{n,2}(x)} - \frac{x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)'\epsilon_n}{\Omega_{n,2}(x)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha}(x) &= \det\begin{pmatrix} (x-\delta_n) & \epsilon_n\Psi(x)S_n^{\alpha}(x) \\ \pi_1(x) & x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)' \end{pmatrix} / \Omega_{n,2}(x) \\ &= \frac{(x-\delta_n)\,x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)'}{\Omega_{n,2}(x)} \\ &\quad - \frac{\epsilon_n\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\pi_1(x)}{\Omega_{n,2}(x)}, \end{aligned}$$

finalmente, reemplazando las soluciones en (20), tenemos

$$\begin{aligned} & x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)' \\ &= r_1(x)\frac{\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\pi_2(x)}{\Omega_{n,2}(x)} - r_1(x)\frac{x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)'\epsilon_n}{\Omega_{n,2}(x)} \\ &+ \theta_n\frac{(x-\delta_n)\,x\left(\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\right)'}{\Omega_{n,2}(x)} \\ &- \theta_n\frac{\epsilon_n\Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\pi_1(x)}{\Omega_{n,2}(x)}. \end{aligned}$$

agrupando y simplificando

$$\begin{aligned} & 2xS_n^{\alpha}(x) + x\,(\Psi)'\,(x)\,(S_n^{\alpha})'\,(x) + x\Psi(x)\,(S_n^{\alpha})''\,(x) + \left((\alpha+1-x) + r_1(x)\frac{x\epsilon_n}{\Omega_{n,2}(x)} - \theta_n\frac{(x-\delta_n)\,x}{\Omega_{n,2}(x)}\right)(\Psi)'\,(x)S_n^{\alpha}(x) \\ &\quad + \left((\alpha+1-x) + r_1(x)\frac{x\epsilon_n}{\Omega_{n,2}(x)} - \theta_n\frac{(x-\delta_n)\,x}{\Omega_{n,2}(x)}\right)\Psi(x)\,(S_n^{\alpha})'\,(x) \\ &\quad + \Psi(x)S_n^{\alpha}(x)\left(\frac{\theta_n\epsilon_n\pi_1(x)}{\Omega_{n,2}(x)} - \frac{r_1(x)\pi_2(x)}{\Omega_{n,2}(x)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Resumimos los resultados en la siguiente

Proposición 3. El polinomio $S_n^{\alpha}(x)$ satisface la ecuación diferencial de coeficientes racionales

$$x\Psi(x)\phi''(x) + A(x,n)\phi'(x) + B(x,n)\phi(x) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} A(x,n) &= x\,(\Psi)'\,(x) \\ &+ \left((\alpha+1-x) + \frac{r_1(x)x\epsilon_n - \theta_n\,(x-\delta_n)\,x}{\Omega_{n,2}(x)}\right)\Psi(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B(x,n) &= 2x + \frac{\theta_n\epsilon_n\pi_1(x) - r_1(x)\pi_2(x)}{\Omega_{n,2}(x)}\Psi(x) \\ &+ \left((\alpha+1-x) + \frac{r_1(x)x\epsilon_n - \theta_n\,(x-\delta_n)\,x}{\Omega_{n,2}(x)}\right)(\Psi)'\,(x) \end{aligned}$$

Agradecimientos

El autor agradece los comentarios y las sugerencias hechos por el árbitro anónimo.

Referencias

[1] T.S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[2] H. Dueñas and F. Marcellán, "The Laguerre–Sobolev-type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation", *Rocky Mountain J. Math*, vol. 41, pp. 95-131, 2011.

[3] H. Dueñas and F. Marcellán, "The holonomic equation of the Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials: a non-diagonal case", *J. Differ. Equa. Appl*. vol. 17, No. 6, pp. 877-887, 2011.

[4] S. Elhay, J. Kautsky, "Jacobi matrices for measures modified by a rational factor", *Numer. Algorithms*, vol. 6, pp. 205-227, 1994.

[5] F.A. Grünbaum, "Variations on a theme of Heine and Stieltjes: an electrostatic interpretation of the zeros of certain polynomials", *J. Comput. Appl. Math*. vol. 99, pp. 189–194, 1998.

[6] B. X. Fejzullahu, "Asymptotics for orthogonal polynomials with respect to the Laguerre measure modified by a rational factor ", *Acta Sci. Math. Szeged.*, vol. 77, No. 1-2, pp. 73-85, 2011.

[7] B. X. Fejzullahu,R. X. Zejnullahu. "Orthogonal polynomials with respect to the Laguerre measure perturbed by the canonical transformations". *Integ. Transf. Spec. Funct*., vol. 21, pp. 569-580, 2010.

[8] E. Huertas, F. Marcellán, B. Xh. Fejnullahu, R.Xh. Zejnullahu, "On orthogonal polynomials with respect to certain discrete Sobolev inner product", *Pacific J. Math.* vol. 257, No. 1, pp. 167-188, 2012.

[9] E. J. Huertas, F. Marcellán and F. R. Rafaeli, "Zeros of orthogonal polynomials generated by canonical perturbations on measures ", *Appl. Math. Comput.*, vol. 218, pp. 7109–7127, 2012.

[10] M. E. H. Ismail. "An electrostatics model for zeros of general orthogonal polynomials". *Pacific J. Math.,* vol. 193, pp. 355-369, 2000.

[11] L. A. Molano. "On Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials: zeros and electrostatic interpretation". *The ANZIAM J.* vol. 55, pp. 39-54, 2013.

[12] T. J. Stieltjes, "Sur certain polynômes que vérifient une équation diférentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé", *Acta Math.* vol. 6, pp. 321–326, 1885.

[13] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed. American Mathematical Society Colloquim Publication Series, vol. 23, *American Mathematical Society*, Providence, RI, 1975.

[14] V. B. Uvarov, "Relation between polynomials orthogonal with different weights (in Russian)", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 126, pp. 33–36, 1959.

[15] V.B. Uvarov, "The connection between systems of polynomials that are orthogonal with respect to different distributionfunctions (in Russian)", *Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz*. vol 9, pp. 1253–1262, 1969. (English translation in USSR Comput. *Math. Math. Phys*. vol. 9, pp. 25–36, 1969).