Lógica y Necesidad en la Epistemología de Jean Cavaillès

Logics and Necessity in Jean Cavaillès's Epistemology

Sylvain Le Gall*
Centro Superior de Lenguas Modernas
Universidad de Cádiz

Fecha de recepción: 13 de junio de 2014
Fecha de aceptación: 11 de agosto de 2014

Resumen

El artículo, dedicado a las concepciones epistemológicas de Jean Cavaillès sobre el pensamiento formal y la teoría de la ciencia, analiza, en primer lugar, cómo la filosofía de las matemáticas de Cavaillès se presenta como una severa censura del logicismo y, en particular, de la empresa universalista de Carnap, cuya sintaxis lógica es el blanco de las reprobaciones del filósofo francés, en lo que atañe tanto a la cuestión del formalismo, como a la relación que mantiene la *mathesis formalis* con la física, en la epistemología de Carnap; en segundo lugar, dadas las simpatías de Cavaillès por la matemática intuicionista, y cierta resonancia de su epistemología con la de Brouwer, subraya, a partir del análisis crítico realizado por el propio Cavaillès, las dificultades a las que se expone el intuicionismo; y en tercer, y último lugar, esboza el programa de trabajo de Cavaillès, su última hoja de ruta, a favor de una epistemología constructiva y refinada de las matemáticas, entendidas en su esencia más pura y en su relación praxeológica con las ciencias de la naturaleza.

Se trata de un acercamiento al proyecto de Cavaillès, como una epistemología conceptual fundada en una aproximación rigurosamente bolzaniana de lo lógico, una teoría pura de los encadenamientos racionales, que contempla la determinación de las posibilidades de los objetos y las posibilidades de determinación de estos. Tal empresa se apoya sobre una noción fuerte de necesidad, cuyo carácter imprevisible

* Centro Superior de Lenguas Modernas, Universidad de Cádiz

escapa a las mallas de la lógica y atraviesa toda la praxis matemática en su temporalidad propia.

Palabras clave: Críticas del logicismo, Epistemología conceptual, Intuicionismo, Jean Cavaillès, Lógica y Necesidad.

Abstrac

In this paper devoted to the epistemological concepts of Jean Cavaillès, regarding the formal thought and the theory of science, we shall first analyze how Cavaillès's theory of mathematics, represents a severe critique of logicism and especially of the universal enterprise of Carnap, whose logical syntax is censured by the French philosopher, vis-à-vis both the question of formalism, and that which studies the relationship of *mathesis formalis* to physics in Carnap's epistemology.

Second, given the sympathies of Cavaillès for the intuitionist mathematics and a certain resonance of his epistemology with Brouwer's, we seek to underscore, based on a critical analysis by Cavaillès himself, the problems that intuitionism presents. On the one hand, we shall see this in the indeterminacy of mathematics to physics, and on the other, in the danger of finding science absorbed by mathematics if one admits, with the Dutch mathematician, that it is a rational thought of the world.

In the third and last part of the article we outline Cavaillès's working program, his last roadmap, in favor of a constructive and refined epistemology of mathematics, perceived in its purest essence and per its praxeological relation to the natural sciences.

The definitive aim is to approach the project of Cavaillès, understood as a conceptual epistemology and grounded on a strictly Bolzanoan approach to what's logical, a pure theory of rational chains which at the same time addresses the determination of objects' possibilities and their possibilities of determination. We shall see how that undertaking is supported by a strong notion of necessity, whose unpredictable nature escapes the mesh of logic and is found across all mathematical praxis in its inherent temporality.

Keywords: Conceptual Epistemology, Criticism of Logicism, Intuitionism, Jean Cavaillès, Necessity.

Héroe de la resistencia frente a la ocupación nazi y al régimen colaboracionista de Vichy, el matemático y filósofo Jean Cavaillès (St Maixent, 1903 – Arras, 1944) no pudo seguir adelante con sus eruditas investigaciones, prematura y brutalmente interrumpidas por el pelotón de fusilamiento. No obstante, el pensamiento de Cavaillès ha sido fecundado por otros filósofos contemporáneos suyos y discípulos y, gracias a ellos, sus trabajos y escritos siguen siendo objeto de la máxima atención por parte de la comunidad filosófica actual[1].

En este artículo, dedicado a sus concepciones filosóficas sobre el pensamiento formal, analizaremos, en un primer tiempo, cómo la filosofía de las matemáticas de Cavaillès se presenta como una severa censura del logicismo y, en particular, de la empresa universalista de Carnap, cuya sintaxis lógica es el blanco de las reprobaciones del filósofo francés, tanto en lo que atañe a la cuestión del formalismo como a la que estudia la relación que mantiene la *mathesis formalis* con la física en la epistemología de Carnap. En un segundo tiempo, dado las simpatías de Cavaillès por la matemática intuicionista y una cierta resonancia de su epistemología con la de Brouwer, procuraremos subrayar, a partir del análisis crítico realizado por el propio Cavaillès, las dificultades a las que se expone el intuicionismo; lo veremos, por una parte, en la indeterminación de la matemática a la física, y, por otra parte, en el peligro de encontrarse la ciencia absorbida por la matemática si se admite, con el matemático holandés, que esta es pensamiento racional del mundo. En la tercera y última parte de este artículo esbozaremos el programa de trabajo de Cavaillès, su última hoja de ruta, a favor de una epistemología constructiva y refinada de las matemáticas, entendidas a la vez en su esencia más pura y en su relación praxeológica con las ciencias de la naturaleza.

En definitiva, se tratará de aproximarnos al proyecto de Cavaillès, entendido como una epistemología conceptual, fundada en una aproximación rigurosamente bolzaniana de lo lógico, una teoría pura de los encadenamientos racionales, que contempla a la vez la determinación de las posibilidades de los objetos y las posibilidades de determinación de estos. Tal empresa, lo veremos, se apoya sobre una noción fuerte de necesidad, cuyo carácter imprevisible escapa a las mallas de la lógica y atraviesa toda la praxis matemática en su temporalidad propia.

1.

Según Cavaillès (2008, pp. 17-27), después de Kant, históricamente, dos vías fueron abiertas para la teoría de la ciencia, es decir, para la epistemología: o bien se ponía el acento en la noción de sistema demostrativo o bien se hacía hincapié en la noción de *organon* matemático. Por una parte, está la vía que privilegia el sistema

[1] Testimonio de ello el Coloquio sobre Cavaillès que se ha celebrado el pasado 17/02/2014, en el [45] rue d'Ulm, Ecole Normale Supérieure, bajo la presidencia inaugural del profesor Jacques Bouveresse del Collège de France.

demostrativo, o sea, la concepción lógica inaugurada por Bolzano y continuada de diversas maneras por los logicistas del primer tercio del siglo XX[2], y, por otra, nos topamos con la vía marcada por el *organon* matemático y las filosofías conceptualistas de la inmanencia, representadas, sobre todo, por Brouwer y su escuela intuicionista, y también por el Husserl de *Formale und Transzendentale Logik*, cuyos escritos sobre la lógica y la teoría de la ciencia podrían asemejarse al pensamiento del matemático holandés bajo algunos aspectos. Pero para Cavaillès, el fracaso del método kantiano (Cassou-Noguès, 2001), debido al establecimiento de celdas porosas entre distintos sectores del conocimiento (sensibilidad-entendimiento; intuiciones-conceptos ; analítico-sintético), parce prefigurar la suerte de la sintaxis general o gramática universal de Rudolf Carnap, y eso por razones similares: una vez cortados todos los vínculos con el objeto, la lógica solamente puede constituirse a partir de préstamos a la lógica ya existente en su artificialidad histórica. Es lo que vamos a tratar ahora en el estudio de la crítica que ofrece Cavaillès del logicismo de Carnap.

Carnap, como matemático, era heredero de Frege, cuyo magisterio siguió en Jena, y también de los *Principia Mathematica,* de Whitehead y Russell; pero, en primer lugar, es al Wittgenstein del *Tractatus* a quien Carnap invoca como principal fuente de inspiración para su empresa lógico-filosófica. La idea misma de sintaxis lógica procede directamente de Wittgenstein. Carnap (1934) asevera que el autor del *Tractatus* fue el primero en apuntar la conexión estrecha entre la lógica de la ciencia y la sintaxis, que fue Wittgenstein quien subrayó que la significación de un signo no debe desempeñar ningún papel en la sintaxis y que (en sintonía con el análisis semántico del lenguaje de la ética ofrecido por Moore) los enunciados de la metafísica no son más que pseudoenunciados. No obstante, la ejecución del proyecto de la sintaxis lógica de Carnap va en contra de la convicción de Wittgenstein, según la cual la sintaxis es inexpresable. El lógico alemán anhelaba poder reducir a cuestiones de sintaxis todos los problemas de la matemática recopilados por Hilbert, e incluso los de contenidos, de significado, así como los problemas denotativos o metalingüísticos de relación entre los símbolos y la realidad, como si las relaciones semánticas y las cuestiones de significado se reflejaran en el encadenamiento formal de los símbolos. Carnap entendía por sintaxis la teoría simbólica de las formas lingüísticas de una lengua, formal en el sentido según el cual se consideran únicamente las especies y el orden de los símbolos a partir de los cuales se construyen expresiones gramaticalmente, o sea, sintácticamente bien formadas. Esta sintaxis había de ser completamente analítica, y llegaba, incluso, a confundirse con el análisis combinatorio.

[2] Nos referimos aquí a los promotores del empiricismo-lógico en Reino Unido, en la estela de los trabajos de los autores de los Principia Mathematica, y a los animadores del Círculo de Viena, en la estela de la labor esclarecedora y normativa desempeñada por Frege y Peano sobre los fundamentos de la aritmética.

Hay aquí, según nosotros, una conexión clara entre el proyecto de Carnap y el de Leibniz, y debemos subrayar la influencia que ejerce la filosofía de Leibniz sobre el proyecto de Carnap; influencia que ha sido poco estudiada[3], dicho sea de paso, ya que también para Leibniz, independientemente de otros motivos –filosóficos, teológicos e históricos– una razón de alistar la matemática a lo lógico era, en este caso, no solamente porque la intuición espacial se veía colocada al nivel del plano de la imaginación, sino también el número por sí mismo –debido a las antinomias clásicas retomadas por los contemporáneos de Leibniz– porque este último parecía repugnar por naturaleza a la infinidad. Y aunque Leibniz rechazaba el número infinito, el fenómeno de la fundación del espacio encontraba su base inteligible en la multiplicidad extranumérica infinita de las mónadas. En el entendimiento divino, la homogeneidad racional del finito y del infinito se expresaba entonces en la universalidad de lo lógico: lo que resulta necesario es lo que se demuestra. De ahí estas ideas comunes a Carnap y Leibniz de una combinatoria y de las características universales.

Sin embargo, cabe destacar, y este punto ha sido subrayado con especial énfasis por Bar-Hillel (1963, p. 520), que la sintaxis de Carnap supera ya la consideración exclusiva de las especies y del orden de los símbolos, dado que para construir el concepto central de toda lógica, el de consecuencia, Carnap recurre a procedimientos de evaluación cuya naturaleza es sin duda semántica. Además, pertenecen también a la sintaxis carnapiana los conceptos de interpretación y de traducción, que están en la base de cualquier teoría de los modelos[4]. Fue, como bien se sabe, mérito de Tarski haber constituido en su originalidad la semántica al lado de la sintaxis propiamente dicha. Tras la meta matemática de Hilbert, el matemático polaco insistió en sus investigaciones metalógicas en la necesidad de separar la teoría de la metateoría. No se trataba solamente de proporcionar la forma lógica de los enunciados provistos de significado (reglas de estructura) y los modos de pasaje de un grupo de proposición a otro (reglas de consecución), sino de definir los objetos mismos, elementos y compuestos que intervienen con sus propiedades respectivas en los encadenamientos sintácticos: variables, funciones, individuos, definiciones, o sea, dicho de otra forma, introducir los conceptos del sistema. La definición de estos sistemas les resulta exterior, es decir, el significado fundacional de sus actos constitutivos está vinculado como significado intrínseco de esos actos; estos no solamente distintos de los primeros, sino situados en otro plano. Con

[3] Véanse al respecto los trabajos de Frédéric Nef sobre Leibniz, la ontología y el lenguaje, especialmente en Nef (1998).

[4] En su etapa estadounidense, que no llegó a conocer Cavaillès, y bajo la influencia de Tarski en la UCLA, en los años [40] y [50], la filosofía formal de Carnap se convertirá claramente a la semántica, tal como lo reflejan sus libros del periodo norteamericano, especialmente el primer volumen de sus Studies in Semantics, es decir: Introduction to Semantics, de 1942, y como lo refleja también el legado de su magisterio, un valioso legado que podemos encontrar recogido en las aportaciones y los desarrollos de modelos de semántica formal a la filosofía del lenguaje por sus alumnos y discípulos californianos, Richard Montague y David B. Kaplan.

Tarski, el Carnap americano reconocerá que la definición formal de un sistema no es completa con el enunciado de la sintaxis y que semántica y sintaxis resultan ser, la primera, descripción de las estructuras iniciales y de los resultados de las operaciones y, la segunda, ordenación de los procedimientos. Aunque es cierto que la semántica, tal como la entendía y la practicaba Carnap, tenía por finalidad principal esclarecer los fundamentos filosóficos de la teoría de las probabilidades y de la lógica inductiva. Pero en la época en la que Cavaillès escribe, Carnap todavía no se ha convertido abiertamente a la semántica y sigue confiando en las virtudes de una gramática formal, con su arte combinatorio, sintáctico y puramente analítico. De ahí el análisis que realiza Carnap de las reconstrucciones sintácticas de antinomias como la del Mentiroso. Deriva de ello un importante teorema según el cual si el lenguaje L es lo suficientemente potente como para expresar los axiomas de la aritmética y no se deduce alguna contradicción[5], entonces no es posible definir los conceptos de *analiticidad*, consecuencia y validez en L mismo. Por tanto, según la interpretación que nos proporciona Cavaillès en su tesis doctoral de 1938, *Méthode axiomatique et formalisme* (1994, p. 174), los conceptos que están en la base de la lógica[6] resultan no expresables en un solo lenguaje, que supuestamente sería el de la lógica. Un solo lenguaje ya no es suficiente. Pero se puede también volver a interpretar esta paradoja como un camino iniciático que, basado en la unicidad de la lengua universal, conduce al descubrimiento de la generación indefinida de los lenguajes.

La dificultad a la que se enfrenta la empresa carnapiana radica, según Cavaillès, en la cuestión de saber de qué manera se construye el sistema de base de todas las sintaxis. Lo que el propio Carnap llama sintaxis general no es sino un conjunto de reglas abstractas de carácter lógico deductivo. Parece que la imaginación sintáctica se pierde en el vacío de una abstracción radical (Cavaillès, 2008, p. 49). Además, cabe subrayar que se pierde totalmente la esencia del encadenamiento formal, es decir: su necesaria progresión, siempre condicionada por la efectividad. Una postura simultánea de todos los posibles y admitida para servir de base está en contradicción con la noción de sistema formal, cuyo significado exige una generalización por estallamiento y superaciones sucesivas. Abstraer de esta forma, a la manera de Carnap, no es fijar la esencia de la sintaxis, sino detenerla, petrificarla, nos enseña Cavaillès.

[5] Es importante aclarar que la lógica proposicional y la del primer orden no permiten deducir contradicciones a partir de sus axiomas y, sin embargo, es perfectamente posible definir los conceptos de consecuencia y validez.

[6] Para llegar a expresar tal conclusión, Cavaillès se basa en la interpretación que hace del teorema [60]c.I,§ [60], de Logische Syntax der Sprache, y en el que Carnap asevera que todo lo que es matemático puede ser formalizado, pero la matemática no puede verse agotada por un sistema. No deja de sorprender la conclusión emitida por el matemático francés, puesto que tanto la consecuencia sintáctica como la consecuencia semántica están definidas, son definiciones recursivas, y hay completitud. De manera que, tal como lo demostraron Post y Gödel, toda deducción sintáctica correcta es válida y viceversa. Cavaillès no podía ignorar los trabajos de Post y Gödel al respecto.

Para suavizar la crítica de Cavaillès sin restarle importancia a la profundidad de su análisis, podemos reconsiderar, no obstante y retrospectivamente, de una forma más benévola el proyecto de Carnap. Una mirada nueva permite hoy en día apreciar a la vez las innovaciones técnicas y el alcance de la labor de Carnap en el contexto de su época. El proyecto de una sintaxis lógica del lenguaje es algo incontestablemente legítimo, fue y sigue siendo una fuente y un motor de inspiración para numerosos lógicos y lingüistas interesados en el estudio y la sistematización de las lenguas naturales[7]. Hintikka (1992) sugiere, por su parte, que las posibilidades constructivas que emanan de la postura universalista, cuya exploración propuso la Sintaxis Lógica de Carnap, no han sido aún agotadas a fecha de hoy y que se pueden construir lenguajes al nivel del primer orden, que admiten una definición de la verdad expresable en el lenguaje mismo de la sintaxis carnapiana. Tal y como lo piensa Hintikka, con otra definición de la verdad, Carnap podría también escapar de las limitaciones que puso Gödel y demostrar la completitud descriptiva de la Aritmética, y eso incluso si siguiera trabajando mediante el método axiomático.

Las críticas de Cavaillès se centran en los supuestos absolutistas de la sintaxis general carnapiana: la teoría del signo de Carnap (o mejor dicho la ausencia de tal teoría en la epistemología formal de Carnap) está totalmente desvinculada del acto que lo funda; pues esta teoría está basada en las celdas kantianas que encasillan el conocimiento (analítico-sintético, empírico-lógico) y carece de una comprensión histórica de las matemáticas, lo que da a las construcciones del lógico alemán la apariencia de una creación *ex nihilo*; son tantas características propias de un método que siempre que se topa con una dificultad se ve obligado a romper barreras rígidas para luego volver a edificarlas un poco más lejos. Ya lo hemos dicho, el fracaso del método kantiano se debió al establecimiento de celdas permeables entre distintos sectores del conocimiento (sensibilidad-entendimiento; intuiciones-conceptos; analítico-sintético) y anticipaba ya la suerte de la sintaxis general o gramática universal de Carnap, y eso por las mismas razones. Al cortar todas las ataduras ontológicas con el objeto, y desatendiendo la cuestión de su historicidad propia, la lógica no tiene otra opción fundacional que constituirse de forma artificiosa a partir de préstamos a la lógica ya existente.

Es cierto que la teoría de la ciencia puede aclararse y afinarse gracias a las formalizaciones, pero no puede ser constituida por estas; es lo que, según Cavaillès, confirma la segunda dificultad del logicismo, el problema que plantea la física moderna; solo existe coordinación del físico al matemático después de la matematización de lo físico, es decir, después de un trabajo descriptivo cuya labor el logicismo se encuentra en la impotencia de definir. Pasamos ahora a la crítica realizada por el matemático francés de la relación entre física y matemática en la epistemología de Carnap.

[7] Yoshua Bar-Hillel, Richard Montague, Jaako Hintikka, o David Kaplan, por citar algunos de los más ilustres filósofos contemporáneos que han reivindicado o reivindican la herencia de Carnap.

La epistemología formal de Carnap es una construcción del mundo a partir de una relación entre *sense data,* y entiende la lógica (i.e. las matemáticas) como una herramienta que carece de contenido propio. Esta es solamente destinada a la descripción de ese mundo, es decir, sirve únicamente para co-ordenar los *sense data* y poder prever constelaciones de datos sensibles. Dicho de otra manera, se trata de una epistemología que procura reconstruir el conjunto de la matemática a partir de la lógica y definir el lenguaje de la ciencia con la ayuda de la sintaxis formalizada de la lógica simbólica. Pero, para Cavaillès, esta dificultad radica en la separación rígida que hace Carnap entre las matemáticas, sistemas de transformaciones tautológicas, y los resultados experimentales. Ahora bien, para Carnap, el núcleo de la ciencia está constituido por enunciados sintéticos o « factuales », siendo los enunciados lógicos y matemáticos no más que unos «auxiliares formales». Y para ello, los lenguajes de las matemáticas de Carnap deben ser enriquecidos con predicados descriptivos. ¿De dónde proceden?; el fisicalismo de los miembros del Círculo de Viena ofrece pocas respuestas relevantes al respecto. Tal y como lo subraya Cavaillès, ni el sistema de signos en matemáticas ni los protocolos de experiencia en física pueden constituirse en un principio absoluto. El coste para restituir el acto bautismal resulta muy caro y se manifiesta en la pérdida del significado de la marcha de la historia en la praxis científica. El ejemplo sintomático de la vuelta al origen fundacional de la geometría constituye un regreso mítico a los actos arbitrarios supuestamente hacedores de significado.

En la epistemología neopositivista de los miembros del Círculo de Viena, los «enunciados protocolarios» presuponían la cuestión fundamental, que radicaba en el hecho de la posible traducción o reducción de la experiencia física a las relaciones lógico-matemáticas; pero, como lo recuerda sagazmente Cavaillès (1947, p. 66-67), ni la cadena física ni la cadena matemática conocen un comienzo absoluto: por una parte, si consideramos los enunciados como relaciones lógicas, estos solamente alcanzan su significado como elementos en un sistema ya asentado y como posesores de un determinado significado experimental ya explicitado, y, por otra parte, la propia y mismísima experiencia, entendida como sistema de actos, resulta interiormente organizada, de tal manera que es imposible interrumpir su desarrollo, salvo por abstracción superficial. Los actos experimentales engendran otros nuevos a través de un encadenamiento *sui generis* que, por lo menos como tal, resulta independiente –debido al hecho de que tiene una esencia distinta– del encadenamiento lógico-matemático.

Tal como apuntaba Cavaillès, la imagen tradicional de vacío interior que proyectan los formalismos, y que un contenido experimental vendría a rellenar, da solamente en apariencia una solidez científica al fisicalismo de Carnap; se trata de una elección impuesta por la misma experiencia física entre sistemas matemáticos paralelos. De esta forma los enunciados protocolarios, insertándose de manera determinada en el sistema privilegiado por ellos, comunican a este en su desarrollo la plenitud de significado que sacan de sus orígenes sintético-sensibles. Pero la posibilidad de justificar esta subordinación por la inserción de las matemáticas en la construcción imaginativa de la experiencia se encuentra justamente impedida por el carácter abstracto que les confiere el formalismo. Por tanto, la noción de objeto, necesidad inmanente a los encadenamientos físicos, se impone *ipso facto* a los de las matemáticas, en la medida en la que los primeros forman la trama de los últimos y de los que han de ser distinguidos, o sea, situados en un mismo plano y polarizados de manera comparable.

La epistemología fisicalista que promovieron Carnap, Hempel y Reichenbach retoma la herencia de la lógica leibniziana y supera, incluso, sus ambiciones, pues llega a confundirse con el sistema de todos los formalismos posibles y absorbe, en vez de canonizar, de tomar como línea directriz, la totalidad de las demostraciones –luego de la ciencia– formalizables. Tal fue efectivamente la solución contemplada en su tiempo por Frege y Russell: las matemáticas son para ellos una parte de la lógica, es decir, que no hay nada más matemático que un sistema inferencial lógico-demostrativo. Pero para un matemático como Cavaillès, reacio al encuadramiento de las matemáticas en la lógica, esta actitud de principio, meramente logicista, que encontramos en los trabajos de muchos matemáticos de la segunda generación y contemporáneos del propio Cavaillès[8], y a pesar de un fisicalismo declarado, descuida el problema de un conocimiento demostrativo, exterior a los formalismos y cuya puesta en relación con estos, especialmente en el ámbito de las ciencias físicas, permanece indeterminado. Los logicistas como Carnap pensaron poder esquivar el tratamiento de la cuestión asimilando los actos primarios con su representación sensible, objetos figurables cuyos modos de construcción parecían ser exhaustivamente delimitables: el punto de partida es un conjunto de signos o de especies de signos, y los actos, unos medios de arreglarlos, de ordenarlos en grupos con una forma determinada. Consciente de ello, Carnap intentó, sin embargo, ofrecer una solución a la relación entre matemáticas y física, solución según la cual las matemáticas son todos los sistemas formales, y la física, un cierto sistema

[8] Esta actitud logicista criticada por Cavaillès es también, a nuestro entender, sintomática de la filosofía de las matemáticas de W. V. O. Quine. Aunque famoso crítico de la empresa de Carnap en lo que atañe a los "dogmas" del neopositivismo, tanto la epistemología naturalizada desarrollada por el filósofo estadounidense como su filosofía del pensamiento formal están no obstante en deuda con Carnap y poseen un claro cuño carnapiano. Es verdad que los famosos recelos de Quine sobre lo intensional que, a juicio del filósofo de Harvard, no forma parte de la lógica, sino de las matemáticas y su afán normativo por establecer una frontera entre la lógica (de primer orden, entendida como "teoría de la cuantificación") y la teoría de conjuntos, o sea, las matemáticas puras, son esclarecedores, pero resultan muy arbitrarios. En particular, el hecho de decir que el segundo orden no pertenece a la lógica, sino a las matemáticas. Es cierto que cuando alcanzamos las extremidades últimas de la teoría de conjuntos (los conjuntos de conjuntos de conjuntos de conjuntos), llegamos a conceptos que, hasta ahora, no tienen ninguna necesidad excepto en el campo de las matemáticas puras. Sin embargo, los conjuntos de tipo muy elevado o los que poseen grandísimos cardinales, más allá de la potencia del continuo, podrían un día llegar a desempeñar un papel de indispensabilidad en la formulación de las leyes de la física y llegar a ser tan indispensables como hoy lo son los números racionales. Pero la lógica acepta los conjuntos, de la misma forma que acepta los números reales y las funciones cuyos sujetos tienen un valor real.

privilegiado merced al principio de elección que constituye la experiencia y el acceso a los *sense data*. La postura logicista supone, por tanto, que exista una coordinación entre la relación formal y los fenómenos sensibles, mediante una evidencia *sui generis* que pertenece a la otra suerte de demostración distinguida, la demostración que adhiere a lo demostrado, o sea, la teoría física resulta ser la demostración que se encuentra formalmente determinada.

2.

Pasemos ahora a la segunda parte de nuestro trabajo, y veamos lo que Cavaillès ha de decir de esta otra vía de aproximación a la teoría de la ciencia, a la que nos hemos referido como la vía marcada por el *organon* matemático y las filosofías de la inmanencia, pues peligra caer en Scilla, quien quiere evitar a Caribdis. La filosofía matemática de Brouwer, surgida de un problema técnico, fue interpretada de diversas maneras: Hermann Weyl (1927) quería vincularla con la crítica de las fundaciones de la lógica expresada por Husserl; hoy parece, no obstante, suficientemente aceptado que el pensamiento verdadero del matemático holandés, pensamiento expresado en "Mathematik, Wissenschaft und Sprache" o en las obras de Heyting (especialmente en Heyting , 1934), iba en otra dirección que el de Husserl. En primer lugar, la matemática es, para Brouwer, un devenir autónomo, más un acto inspirado y realizado en estado de gracia que una doctrina cuya definición resulta imposible si la queremos captar en su momento primicial, pero cuyos momentos, en su necesaria solidaridad (incluyendo la que participa de la colectividad del gremio matemático), traducen una esencia primigenia. De la diada a las teorías elaboradas existe a la vez continuidad e imprevisibilidad. El único parentesco con Husserl parece radicar en el hecho de referirse a un acto. La toma de consciencia de la esencia de las matemáticas –que funda la norma intuicionista– debe ser situada en el plano de un movimiento espontáneo de su devenir, puesto que exige una amputación o, mejor dicho, un "enderezamiento" de las matemáticas clásicas. Se trata de saber si hay o no referencia a una consciencia absoluta que fuera caracterizable, a los contenidos de los conceptos sumisos a una dialéctica que resulta también aprehensible, o si hay o no referencia a la irreductible especificidad trascendental del movimiento matemático.

En reacción contra el logicismo nacido de los trabajos de Frege y de Russell, en el cual se percibía un resurgimiento de la tradición aristotélica que oponía al pensamiento (creación que escapa a cualquier norma) su expresión lingüística, que como fenómeno social caía derrumbada a la vez por los espejismos de la polis y por las leyes de la naturaleza, la epistemología matemática de Brouwer aseveraba el rechazo de cualquier afirmación de existencia que se refiriese a una colectividad solamente puesta en lo abstracto, en virtud de un infinito traducible, al fin y al cabo, por una negación o una indeterminación; esto iba a manifestarse en el rechazo del tercio excluido y, sobre todo, en el rechazo de las definiciones no predicativas. De esta manera, las querellas en torno al infinito cantoriano ilustraban solamente la resistencia a un nuevo impulso creador[9]; también en este sentido se podía entender la reaparición periódica de las mismas paradojas, como la de Epiménides, que prueban, según Brouwer y Heyting, la incapacidad de la lengua para expresar la potencia indeterminada del pensamiento.

Brouwer no solo rechazaba el papel legislador de la lógica «clásica» en la epistemología, sino que consideraba también cualquier lógica, y el mismo lenguaje, como una expresión inadecuada y empobrecedora de la ciencia, que no era para él un saber, sino una actividad; pues, para Brouwer, la lengua tiene por única función la trasmisión de la voluntad y una función deóntica, pero carece de exactitud y de seguridad, y eso aun cuando interviene en la construcción de los sistemas de la matemática. El signo no es un objeto del mundo, pero denota los actos que lo utilizan, y lo indefinido de la regresión está ahí de esencia. Cualquier comparación de las matemáticas con una manipulación espacial choca frontalmente con este carácter fundamental del símbolo matemático, el hecho de solo estar ahí como parte integrante o base de aplicación de una actividad que ya es en sí matemática (y que es generación de otros actos). Tanto para Brouwer como para Cavaillès, los términos de espiritualidad e inmanencia suponían la posibilidad de una ascesis o de una profundización de consciencia distinta de la única comprensión científica de lo matemático. Por tanto, es necesario que exista un absoluto de inteligibilidad que legitime la superposición espinosista de la idea de idea, es decir, que exista la referencia a una consciencia generativa cuya esencia performativa se realiza inmediatamente en sus actos auténticos. De ahí, es preciso que haya un análisis ontológico, pero, justamente, tal como apunta Cavaillès, es lo que falla en la epistemología de Brouwer, la cual carece de una ontología propia.

Se ha dicho que las matemáticas intuicionistas resultaban especialmente cómodas en la física moderna (Weyl, 1927), y Cavaillès se hizo eco de aquello: «*N'est-ce pas que l'attitude intuitioniste est d'abord attitude de physicien, que la représentation d'un monde où s'exerce l'activité mathématique et qui la détermine, en lui fournissant au moins départ et point d'application, reste élément primordial et peut-être dominateur ?*» (2008, p. 31). Pero, según Cavaillès, la filosofía brouweriana, su meta matemática, no ofrece ninguna respuesta a las preguntas propias que plantea la epistemología. Todas las ciencias están confundidas en un mismo movimiento, en el que la matemática y las ciencias de la naturaleza no se pueden distinguir. El ser del mundo –de un mundo puesto ahí fuera y que la consciencia reduce en términos de interioridad– subsiste como condición determinante de la ciencia. Conocer el

[9] Como bien apuntaron Cavaillès y Quine en su On What There Is, la controversia contemporánea entre logicismo e intuicionismo sobre los fundamentos de las matemáticas, controversia que revivificaba la querella medieval entre el realismo y el nominalismo, nació en realidad de unos desacuerdos sobre el infinito. Los logicistas pueden, a partir de sus asunciones, integrar los órdenes crecientes de infinidad de Cantor, a diferencia de los intuicionistas que han de conformarse con el orden más bajo de infinidad, e incluso, consecuencia directa de lo que asumen, han de renunciar a algunas leyes clásicas de la matemática elemental que afectan a los números reales.

mundo, entenderlo, es ya en sí un programa que representa el abandono de la autonomía creativa, la renuncia a una necesidad que no se vincula a otra cosa que a sí misma. Ahondando en esta idea, muchos epistemólogos opinan, efectivamente, que una teoría de la ciencia no puede ser otra cosa que una teoría de la unidad de la ciencia; pero esta unidad es movimiento, nos recuerda Cavaillès: no se trata aquí de un ideal científico, sino de la ciencia realizada, en la que la incompletitud y la exigencia de un progreso ya forman parte de la definición. Únicamente progreso autónomo, dinamismo cerrado sobre sí mismo, sin ningún comienzo absoluto ni término final, la ciencia se mueve fuera del tiempo –si es que el tiempo significa otra cosa que la referencia a la vivencia de una consciencia–. Para ilustrar aquello, Cavaillès se ha referido a la demostración de la no contradicción de la aritmética, o consistencia de la teoría elemental de los números por Gentzen (1936), demostración que admiraba. En su demostración, Gentzen utilizaba la inducción transfinita, lo que exige, por tanto, unos medios más potentes que la propia aritmética; de esta manera, la intervención del infinito modifica la búsqueda de la zona de pensamiento efectivo y conduce al abandono de la seguridad apodíctica inicial; permanece el procedimiento canónico de iteración indefinida. Como nos lo explica Hourya Sinaceur (1987), la existencia de los objetos se asienta entonces en sus procedimientos de construcción; sin embargo, ninguna axiomática, ningún sistema operativo sería capaz de controlar los desarrollos ulteriores, imprevisibles, debido a la intervención del infinito. Todas las partes de las matemáticas son solidarias, y es el cuerpo entero de estas el que se desarrolla a través de un solo movimiento en sus etapas y bajo diversas formas. De esta manera, se entiende que la autonomía científica resulta simultáneamente ser expansión y clausura: clausura negativa por el rechazo de coger de fuera o de un fin exterior. Para ilustrar aquello, Cavaillès utiliza una imagen sugestiva: la ciencia se parece a un volumen de Riemann que a la vez puede estar cerrado y sin exterior a sí mismo.

3.

En esta tercera parte del artículo vamos a aproximar al lector a la posición de Cavaillès en torno a las ideas de necesidad[10] y de constructivismo, que atraviesan y dan sentido a toda la epistemología del matemático francés. Con Cavaillès es legítimo preguntarse, entonces, si la formalización no representa en realidad una parada del movimiento de las matemáticas, deteniéndolas en una posición petrificada, históricamente contingente; esta era reductible, tal como lo pensaba Carnap en 1934, a un estudio sintáctico combinatorio de las lenguas simbólicas, o sea, al análisis de la propia sintaxis formalizada de la ciencia.

[10] Aquí se advierte ya el fuerte spinozismo de Cavaillès, subrayado por Granger y Canguilhem repetidas veces. Véase al respecto Canguilhem, G. (2004): *Vie et mort de Jean Cavaillès,* Paris, éditions Allia, p. [26]. Más recientemente, esta vertiente del pensamiento del matemático ha sido enfatizada por Cassou- Noguès (2013): "Cavaillès, 1938: L'imprévisible et le nécessaire de l'histoire". Agradezco estas referencias (comunicación personal) al profesor Francisco Vázquez García, catedrático de Filosofía de la Universidad de Cádiz.

Independientemente de cualquier desarrollo lógico, existe una ontología general espontánea, ensanchada en *mathesis universalis* por Leibniz, en la que están directamente señaladas las propiedades del objeto cualquiera (Nef, 2001). Qué es el número, qué son las operaciones de nivel superior si no aquellas determinaciones a las que están necesariamente sumisos, de una necesidad que se confunde con la necesidad misma del desarrollo matemático, los modos de aparición del objeto cualquiera, se preguntaba ya Cavaillès. ¿Qué hace el matemático si no describir o fijar lo que concierne todo objeto, elemento abstracto de una multiplicidad? (Cavaillès, 2008, p. 62). Tal y como Cavaillès en su epistemología entiende la teoría de la ciencia, la *mathesis formalis* proporciona la determinación de las posibilidades de los objetos, y la apofántica formal, las posibilidades de determinación de los objetos. La perspectiva de la apofántica desarrollada por Husserl era 'genealógica', y eso se debía en gran medida al hecho según el cual, en la opinión de Husserl, la lógica formal clásica ocultaría el problema fundamental de la evidencia. 'Evidencia' significa para el filósofo la inmediatez de la donación de los fenómenos en la presentación perceptual, *l'ecceidad;* problema cognitivo que a Brouwer y Cavaillès les preocupaba especialmente. Cavaillès analizó cómo Husserl reconstruyó para este fin el 'génesis categorial' de las categorías lógicas 'primitivas' (sujeto *vs*. predicado); génesis que convierte la unidad perceptiva sintética de la extensión espacial de un substrato delimitado por un borde y que posee un momento dependiente (cualidad sensible) en la unidad analítica de la proposición. El contenido perceptivo de tipo "*S* es *p*" se encuentra, entonces, arraigado en la experiencia ante-predicativa y pre-judicativa del mundo perceptivamente dado, y es concretamente este arraigamiento semántico –que Husserl llamaba una 'fundación'– lo que el filósofo quiso anclar en su concepción de la naturaleza mundana del *Lebenswelt*, mediante una epistemología normativa y contextual del mundo sensible, en otras palabras, ofreciendo una apofántica o tipología de esclarecimiento.

Pero a pesar del interés y de la estima que sentía Cavaillès por los trabajos de Husserl, la ontología formal por la que aboga en su teoría de la ciencia no es de inspiración husserliana, sino inspirada tanto por la *mathesis universalis,* de Leibniz, y por la teoría del objeto de Bolzano o cualquier cosa en general (*Etwasüberhaupt*). Semejante ontología se da por tarea filosófica construir formalmente los primeros conceptos matemáticos: los de conjunto, de relación, de función, de operación y de número. Según Cavaillès, la superioridad de la teoría de la ciencia de Bolzano con respecto a la epistemología de Carnap se manifiesta, entre otras cosas, en su relación inicial entre actos y contenidos, entre apofántica y ontología, o sea, y dicho de otra manera, entre significado y objetos.

Con respecto a la idea de necesidad, Cavaillès acredita a Bolzano la primacía de haber hecho hincapié en el carácter necesario de la ciencia. Fue Cavaillès quien, entre las dos guerras mundiales, no solo reconoció la figura fundamental de Bolzano en la formación del análisis matemático y en los fundamentos primiciales de la teoría de conjuntos, sino que, en sus *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles,* Cavaillès analizó la demostración puramente analítica que proporciona Bolzano en 1817, así como sus contribuciones esenciales a las paradojas del infinito (1851). Bolzano no se contenta con hacer rigurosos los fundamentos del análisis infinitesimal, sino que quiere transformar de forma radical la propia lógica y proporcionarle una base ontológica. En su *Rein analytischer Beweis* (1817), Bolzano ya se ofuscaba por el recurso demasiado fácil a la evidencia por parte de los matemáticos, una evidencia que, para Kant, regía todo el razonamiento geométrico. Para Bolzano, la estructura de la ciencia no solamente es demostración, sino que también se confunde con la demostración (p. 39). En ella se encuentran efectivamente estos rasgos esenciales para Cavaillès, que son la unidad, la necesaria progresión y el indefinido, así como la clausura sobre sí mismo. La matemática no podría definirse como ciencia de la construcción de los conceptos en la intuición pura, tal como lo pensaba Kant. Tanto para Bolzano como para Cavaillès, la matemática es una ciencia conceptual, como lo prueban no solamente las disciplinas de las matemáticas puras, sino también las disciplinas aplicadas como la topología o la ciencia del espacio. Podemos retomar la interrogación kantiana y preguntarnos si hemos de construir un objeto en la intuición pura para asegurarnos de su existencia. La innovaciones lógicas de Bolzano, su «teoría pura de los encadenamientos racionales», que el matemático expuso en la *Wissenschaftslehre* (1837), y especialmente las distintas variedades de su concepto de deducción[11] (i.e. de consecuencia lógica) subrayan, por contraste, la extrema estrechez de la concepción kantiana de la lógica como ciencia acabada, cuyas formas históricamente contingentes se encuentran identificadas con la estructura inmutable del mismísimo entendimiento. El movimiento demostrativo no prolonga la intuición, y esta no puede refugiarse en los axiomas que resultan verdaderos en virtud de los conceptos que los contienen; en contra de lo que pensaba Brouwer, esta exigencia ya señalada por Bolzano impone la eliminación de la intuición de las demostraciones matemáticas.

Pero el filósofo ha de preocuparse por ello. No puede aceptar una matemática que se libera de la idea de las aplicaciones posibles y se vuelve un juego sutil del puro pensamiento. Fuera de las aplicaciones, nos recuerda Cavaillès (2008, p. 67), no existe conocimiento matemático: la matemática, consciente de su significado primicial, o sea, de lo que genuinamente es, se bifurca, entonces, por una parte, en las matemáticas aplicadas, que son las ciencias físicas, y, por otra parte, en las

[11] Cavaillès pensaba que Carnap habría ganado mucho tiempo si hubiese leído y meditado los capítulos dedicados a la noción de validez y de deducibilidad en la *Wissenschaftslehre* de Bolzano, publicada en 1837, o sea un siglo antes de *Logische Syntax der Sprache.* Ambos textos redactados en Praga.

matemáticas formales, que son la lógica. Para Cavaillès, la matemática se ve verificada y encuentra su razón de ser en la física, pues no hay sino un solo movimiento y un solo conocimiento para el que la unidad del conjunto otorga la validez de cada uno de los movimientos y de sus relaciones de subordinación. La necesidad está presente en todo y fundada, porque resulta única.

Cavaillès (2008, p. 41) consideraba que la teoría de la ciencia, o epistemología científica, no se puede construir directamente, tal como los neopositivistas tenían la pretensión, sino que es fruto de una analítica, cuya primacía le da el contenido de su objeto, y de una ontología, que la termina como ser; en este sentido, la noción de objeto, necesidad inmanente a los encadenamientos físicos, se impone *ipso facto* a los de las matemáticas, en la medida en que estos constituyen la trama de aquellos, y en la que deben de ser distinguidos, es decir, situados en el mismo plano y polarizados de forma comparable. De esta manera se resuelve el problema que plantea la doctrina de la ciencia, sin que se vean sacrificadas las metas de los objetos, cuyo ser se supone está fuera de su alcance, ni tampoco la autonomía de los encadenamientos racionales. Según Lautman (2006), la autoridad de la lógica sobre la física se encontraría así explicada. En efecto, se trataría de un solo y único movimiento que, a través de las matemáticas, va desarrollándose hasta las realidades del mundo.

Como lo explicaba Husserl en su *Krisis*, la física teórica, que ha ido constituyéndose desde Galileo, se ha sumado al *Lebenswelt,* el mundo de la vida, lo que Cavaillès llama "el mundo vital". Ella no nació solamente de las necesidades técnicas, sino que es promoción de la técnica, una técnica para controlar la predicción, y sobre la predicción se asienta la vida. Ahora bien, con la predicción dejamos la modalidad de lo necesario para pasar a la de lo posible. Aquí Cavaillès (1947, p. 81), y especialmente en el artículo coescrito con Lautman, "La pensée mathématique" (1994, p. 626), injerta su propia reflexión sobre la matematización de la física, que, para él, consiste en la coordinación de predicciones espontáneas y, sobre todo, en la eliminación de lo que en ella resulta inútil merced a la idealización infinita. De esta idealización nacen los objetos geométricos, el espacio homogéneo y la medida que permite controlar el espacio vivido, el propio infinito, y que hace posible la representación matemática de las relaciones físicas. En este sentido, la matemática no está desvinculada del mundo y no hay ruptura entre las matemáticas y el mundo sensible. Las preguntas de la física teórica solo toman significado y forma cuando se transforman en preguntas de la matemática pura; ambas disciplinas forman unos sistemas interiormente organizados, dos sistemas de experiencias específicas, y es en la encrucijada de estos dos procesos donde aparece la relación física, de su coordinación más o menos completa nace la teoría física.

Pero incluso para las ciencias de la naturaleza, el crecimiento se realiza sin préstamo a lo exterior, a lo que está fuera: Hay una ruptura entre sensación o recta opinión y ciencia. La experiencia, lejos de ser inserción en la naturaleza, resulta ser incorporación del mundo al universo científico: e incluso si no está despejado su significado, incluso si aparece como un cuerpo opaco, obstáculo a las teorías efectivamente ideadas, su valor de experiencia se encuentra a la vez en su desprendimiento de un mundo de singularidad y exterioridad, en donde lo que es no tiene significado fuera de su existencia actual (y determinada) y en la unificación virtual a la que debe necesariamente presidir un día. Uno de los blancos de la crítica de Cavaillès a Carnap era su desconocimiento de la temporalidad propia de la ciencia, del lugar de la necesidad, dado que la progresión se efectúa por vía demostrativa, y de la imprevisibilidad, ya que la ciencia solo se realiza por estallamiento y reordenación de las matemáticas en su conjunto. Esta crítica es fundamental y delimita una de las facturas más características y originales de la aportación de Cavaillès. Para Cavaillès, las matemáticas no solo son por esencia un devenir, y no solo tal como lo creen Brouwer y el idealismo, un sistema reglado de gestos y de actos inspirados en los que los matemáticos no hacen otra cosa que actualizar virtualidades. Las matemáticas están inscritas en los conceptos tejidos, hilvanados por la historia de su propio desarrollo. Esta historia, que no lo es en el sentido historicista, se desarrolla en una temporalidad propia, acompasada por la necesidad. La autogeneración de los conceptos y de las estructuras atraviesa la historia. Tras haber examinado detenidamente y rechazado las soluciones idealistas propuestas por Husserl y Brouwer, Cavaillès utiliza, sin referirse a ello, los conceptos de Spinoza, cuya filosofía alumbra el último escrito del matemático francés, escrito al que Gilles- Gaston Granger dedicó un luminoso análisis (Granger, 1947). Cavaillès insiste sobre el carácter esencialmente imprevisible de esta historia, aunque retrospectivamente toda la historia de la matemática entera sea totalmente inteligible. Su necesidad escapa al imperio de la lógica, pues es del resorte de la dialéctica.

Conclusión

Se puede decir que en este trabajo he intentado aproximar al lector a la concepción de la epistemología que desarrolló Jean Cavaillès en su reflexión teórica sobre las matemáticas y la física; se trata, efectivamente, de una reflexión vigorosamente crítica frente al logicismo dominante en la época en la que se inserta el trabajo del matemático francés. Cavaillès, desde finales de los años veinte y durante toda la década de los treinta, hasta sus últimos años, pasados entre la clandestinidad de la resistencia al ocupante nazi y el calabozo, va elaborando una filosofía del pensamiento formal, no solamente crítica con el reduccionismo lógico-fisicalista que caracterizaba a la empresa neopositivista de los promotores del Círculo de Viena, sino también constructiva y programática para el devenir de la epistemología científica[12]. Consciente de que el problema crucial de la teoría de la ciencia radicaba en la relación entre el estatuto de las entidades lógicas y los objetos de la física, fue introductor entre los filósofos franceses de su tiempo de la obra de Bolzano y su teoría del objeto, de la que destacó numerosas virtudes para la elaboración de una ontología formal.

Atento lector de Husserl y agudo analista de su apofántica, familiarizado con la matemática intuicionista de Brouwer y sus ramificaciones en física teórica, Cavaillès supo sintetizar todas estas fuentes de inspiración y proponer una visión personal de las relaciones entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza, para las que la epistemología no puede constituirse directamente, tal como ella tenía la pretensión, sino que resulta posterior a la analítica, que le da el contenido de su objeto, y a la ontología, que la termina como ser. En definitiva, y para terminar ensanchando el horizonte, la importancia que el propio Cavaillès otorgaba a la necesidad en el transcurrir de la praxis matemática y en su temporalidad propia, la progresiva elevación metamatemática hacia la metafísica, y los graves y austeros acentos espinosistas del último periodo del matemático, tal vez tengan algo que ver con su protestantismo heredado y con una cierta visión teleológica del mundo, con esa religiosidad *abrahamita* en la cual los conceptos de necesidad y autosacrificio resultan tan importantes. Pero el estudio de aquella filiación espiritual subterránea, para arrancar las raíces metafísicas[13] del pensamiento de Cavaillès y su manera de entender el sentido del "mundo vital", merecería otro estudio, un estudio que contemplaría el análisis de los fundamentos antropológicos de su formación intelectual.

---

[12] Ha quedado bastante claro que con su magisterio y a su pesar, Cavaillès fue el instigador póstumo de una escuela francesa de epistemología, a la cual podemos conectar cada uno a su manera los nombres de filósofos del pensamiento formal como Jean-Toussaint Desanti, Gilles-Gaston Granger, Raymond Martin, Hourya Benis Sinaceur o Frédéric Nef. El Pr. Francisco Vázquez García (comunicación personal) señala que fue Francisco Jarauta quien, en España, empezó a interesarse y a publicar sobre Cavaillès. Para Vázquez García, en la crítica de Cavaillès, le interesaba sobre todo a Jarauta las distancias del matemático francés respecto a la-fundamentación husserliana de las matemáticas. Lo que explicaría, según Vázquez García, la escasa recepción española de Cavaillès: como la epistemología francesa apenas interesaba a los lógicos y filósofos de la ciencia españoles (desde mediados de los sesenta centrados en la tradición analítica), el interés generado por la figura y el pensamiento de Cavaillès quedó reservado a los historiadores de la filosofía contemporánea y a los ontólogos, en relación con la cuestión de la filosofía de la consciencia o del sujeto fundador.

[13] El concepto de necesidad de Cavaillès, en particular, tiene unas conexiones antropológicas interesantes con la visión actual de necesidad lógica: reactualización de la tesis leibniziana de verdad en todos los mundos posibles. Esta concepción metafísica de la necesidad ha sido desarrollada en los trabajos pioneros de Ruth Barcan Marcus y Saul Kripke. Se trata de unas aproximaciones a la accesibilidad a los mundos, en las que el necesario esencialismo de la identidad solamente se ve afectado por alteraciones contingentes, y en las que la naturaleza de la necesidad es de orden teleológico. Temas que encontramos ya en la filosofía del matemático francés. Por otra parte, la semántica desarrollada por Kripke de manera formal, también nos proporciona una semántica para la lógica intuicionista de Brouwer. Es interesante anotar que los sistemas formales así trabajados son completos. Así tenemos hoy en día una definición formal de consecuencia lógica modal. Véase al respecto: el artículo de Kripke –con una notación antigua y difícil de entender– y los trabajos de Chagrov y Zakharyaschev. Véase Chagrov, A. and Zakharyaschev, M. (1997). Modal Logic, Oxford University Press. Kripke, S. (1959). "A Completeness Theorem in Modal Logic". The Journal of Symbolic Logic, Vol. 24, N.° 1, pp. 1-14.

Referencias

Bar-Hillel, Y. (1963). "Remarks on Carnap's *Logical Syntax of Language*", in *The Philosophy of Rudolf Carnap,* (ed. Schilpp P.), LaSalle, Illinois, Open Court.

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis*, Praha

Bolzano, B. (1837). *Wissenschaftslehre* I – IV. Edición crítica por Jan Berc (1985-1990): *Bolzano's Gesamtausgabe* I, 11.14, Stuttgart –Bad Cannstatt, Fromman – Holzboog.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen,* Leipzig, publicación póstuma. Traducción al español por Luis Felipe Segura (1991): *Las paradojas del infinito.* México D. F.: U.N.A.M, Colección Mathema.

Brouwer, L.E.J. (1929). "Mathematik, Wissenschaft und Sprache", *Monatshefte für Mathematik und Physik,* N.° 36*,* pp. 153-164.

Canguilhem, G. (2004). *Vie et mort de Jean Cavaillès,* Paris : Editions Allia.

Carnap, R. (1934). *Logische Syntax der Sprache,* Wiena, Springer. Versión inglesa y aumentada del texto original, en Carnap, R. (1937). *The Logical Syntax of Language.* London : Kegan Paul.

Cavaillès, J. (2008). *Sur la logique et la théorie de la science.* Paris : Vrin.

Cavaillès, J. (1994). *Oeuvres complètes de Philosophie des sciences.* Paris : Hermann. Estas obras completas están recopiladas en cuatro tomos:

- Tome I : *Méthode axiomatique et formalisme* (1938)
- Tome II : *Philosophie mathématique* (1962)
- Tome III : *Sur la logique et la théorie de la science* (1947)
- Tome IV : *Articles scientifiques*

Cassou-Noguès, P. (2001). « Cavaillès critique de Kant ». *Cahiers de philosophie et d'histoire des sciences,* no. 50, pp. 143-171.
Chagrov, A. and Zakharyaschev, M. (1997). *Modal Logic.* Oxford: Oxford University Press.
Gentzen, G. (1936). «Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie». *Mathematische Annalen,* no. 112*,* pp. 493-565.
Granger, G. G. (1947). «Jean Cavaillès ou la montée vers Spinoza». *Les études philosophiques,* pp. 271-279.
Heyting, A. (1934). *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie.* Berlin: Springer.
Hintikka, J. (1992). «Carnap's work on the foundations of logic and mathematics in historical perspective». *Synthese*, no. 93, pp. 167-189.
Huisman, B. (1993). «Cavaillès et Spinoza». Bloch O. (dir.): *Actes du colloque «Spinoza au XXème siècle»,*. Paris: P.U.F.
Husserl, E. (1929). *Formale und transzendentale Logik,* Halle, Niemeyer. Traducción al español por Luis Villoro (1962): *Lógica Formal y Lógica Trascendental. Ensayo de una Crítica de la Razón Lógica.* México D. F.: UNAM.
Husserl, E. (1934). *Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie.* Traducción al español por Jacobo Muñoz (1991): *La crisis de las ciencias europeas y la fenomenología trascendental. Una introducción a la filosofía fenomenológica.* Barcelona: Crítica.
Lautman, A. (2006). *Les mathématiques, les idées et le réel physique.* Paris: Vrin.
Nef, F. (1998). *L'objet quelconque. Recherches sur l'ontologie de l'objet.* Paris : Vrin.
Sinaceur, H. (1987). «Structure et concept dans l'épistémologie de Jean Cavaillès», *Revue d'histoire des sciences*, no. 40, pp. 5-30.
Weyl, H. (1927). *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* München : Oldenbourg Verlag.