

# MODELOS FRACTALES

**Roberto Avila A.**

Profesor Escuela de Filosofía y Humanidades UPTC

**Resumen:** La geometría euclídeana genera admiración y confianza por su sencillez y orden pero su aplicación a la descripción de los complejos objetos reales origina grandes dificultades; actualmente se acude a la geometría fractal por ser más exitosa en ese aspecto. En el artículo se exponen brevemente el origen y características notables de los fractales y se discute hasta dónde esta geometría logra, en efecto, superar el gran bache entre la sencillez de nuestros modelos de conocimiento y la complejidad del universo, con lo cual se concluye si es adecuado hablar de objetos o de modelos fractales.

**Palabras clave:** Geometría, fractal, conocimiento.

Euclidian geometry generates admiration and confidence for its simplicity and order, but its application to the description of complex real objects originates great difficulties; currently fractal geometry is more commonly used. This article will explain briefly the origin and outstanding characteristics of **fractals** and will analyze if this kind of geometry is able to cross the great divide between the simplicity of our models of knowledge and the complexity of the universe, leading to a reflection about the adequacy of talking about fractal objects or models.

No hay que hacer esfuerzos para recordar cuánto le debemos a la geometría euclídeana: prácticamente podemos decir que estamos parados sobre ella, rodeados de ella, y que comemos de ella. Tiene mucho de maravillosa porque alcanza a servirnos tanto como fundamento de las construcciones físicas del hombre como de nuestra forma de conocer el mundo; revivimos a Euclides en cada momento en el que se aplican sus principios, pero también la ciencia lo hace cuando intenta ordenar los conocimientos de acuerdo con el tipo de jerarquía implícita en sus estructuras de conceptos y teorías. Pero, esa evidencia y omnipresencia en ocasiones nos im-

pide percibir los límites que esa visión implica. La admiración que ha generado la geometría euclídeana nos hace olvidar que, tal como cualquier otra manera de formalizar el conocimiento, no corresponde a una visión universal sino a un modelo aplicable dentro de delimitadas condiciones.

Más allá de la utilidad que nos presta tener una visión geométrica del mundo, nos encontramos con el hecho de que su aplicación se limita a formas idealizadas que son muy diferentes de las habitualmente irregulares que pueblan el mundo; la construcción de figuras geométricas

que se desarrolla a partir de Euclides puede llegar a ser compleja pero en una medida diferente. La relación entre la geometría –cuyo nombre proviene de la acción de medir la tierra– con la naturaleza, se hace problemática en virtud a que esta forma de conocimiento se creó con parámetros de jerarquía rigurosa que necesitan operar con sistemas ideales, mientras que la realidad no posee tanta regularidad ni exactitud y, por tanto, hay una evidente dificultad en intentar describir las formas de la naturaleza a partir de figuras geométricas sencillas.

En las últimas décadas se ha desarrollado un camino diferente, en muchos aspectos, por el cual las matemáticas buscan aproximarse a la descripción de las complejas e irregulares formas del mundo real; este camino es el de la geometría fractal, del cual intentaremos dar en este artículo una breve visión, aproximándonos a sus presupuestos y a sus posibles alcances y limitaciones en la construcción de una formalización geométrica del mundo, que nos permita describir y comprender objetos aparentemente irregulares, sin pretender más que hacer una reflexión pertinente para quienes trabajamos sobre la relación entre el conocimiento y la realidad. El estudio de los fractales, asunto de altas matemáticas, no es tan reciente, pero el desarrollo que ha tenido en el campo de la informática sigue expandiendo en la actualidad sus posibles aplicaciones tanto en graficación como en el estudio de diferentes tipos de estructuras.

La geometría, medida de la tierra, nos proporciona un claro ejemplo que nos permite comprender cómo se estructuran y originan los fractales<sup>1</sup>: cuando se intenta determinar la longitud exacta de un objeto real, como el caso de una línea costera, se encuentra una dificultad inesperada que consiste en que esa comprensión depende completamente de la escala que se uti-

lice. Por medio de una fotografía aérea nuestra escala nos va a permitir cierta aproximación en la que detalles inferiores a cierto rango (unos metros) van a ser despreciables, pero si observamos la misma línea a una escala más cercana a nuestra perspectiva esos detalles son grandes, aunque seguimos sin poder apreciar rasgos inferiores a unos milímetros. La misma noción de límite o de línea se diluye pero continúan apareciendo nuevas escalas cuando se hace una aproximación mayor, y se insinúan otras nuevas. En resumen, dependiendo de la escala que utilicemos para medir la longitud de una costa el resultado va a ser diferente –no leve sino completamente diferente–. Si tomamos a escala de avión una de nuestras líneas costeras, su longitud es de 1.200 kilómetros, pero si tomamos en cuenta todas sus circunvoluciones a escalas microscópicas o atómicas, simplemente su longitud es infinita. Infinita, o indefinida, como prefieren decirlo los matemáticos, propensos al horror al vacío que causa la ausencia de resultados medibles. La geometría euclideana nos sugeriría medir por medio de segmentos rectos y curvos, lo que puede sumar una gran extensión, pero jamás podría decirnos que una línea cerrada o limitada puede tener una longitud infinita. Este caso se puede manejar con la utilización de un tipo de objetos matemáticos: los fractales (del latín *fractus*, roto, irregular).

Los intentos de acercarse a una descripción de los fenómenos irregulares de la naturaleza por medio de los fractales han empezado con la graficación de las ecuaciones que les dan origen, con lo cual se aprecia que las curvas que los componen tienen una particularidad, la autosemejanza, esto es, el hecho de que a diferentes grados de aproximación nos muestren una estructura similar. Un triángulo equilátero de cuyos lados salen otros triángulos equiláteros en una sucesión infinita, es el principio de la curva

de Koch, que se ve en el gráfico 1. Aquí el problema es que se puede lograr un alto grado de complejidad que no necesariamente coincide con la irregularidad de lo que se intenta describir. Esta curva es demasiado ordenada para que pueda servirnos como descripción de una línea costera; para esto necesitaremos apelar a curvas fractales en las que el azar se haga presente. Sin embargo en ella se pueden apreciar las características principales de los fractales: la autosemejanza y la posibilidad de tener dimensiones fraccionarias, es decir que sus componentes puedan ocupar un fragmento de la dimensión siguiente, con lo cual nos aproximamos a un grado de complejidad cualitativamente diferente del que posibilita la geometría euclidea.

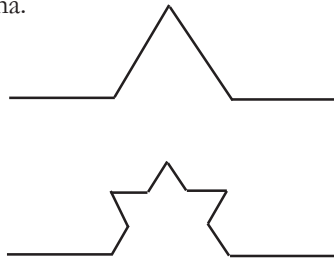
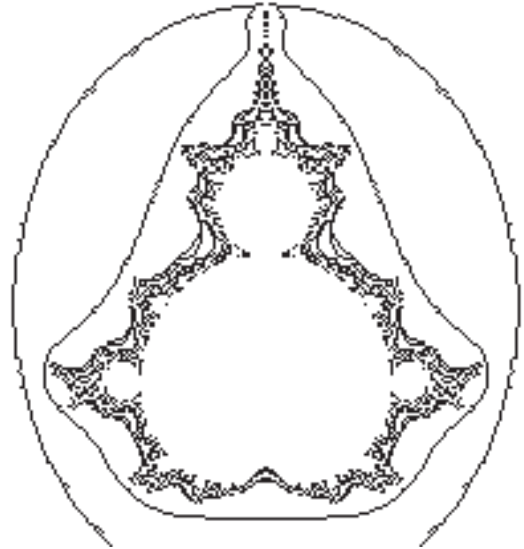


Gráfico 1: curva de Koch

pero no exactamente; escoger entre dos formas casi exactas nos puede llevar a sitios con configuraciones completamente diferentes, como puede verse al mirar en detalle el hombre de Mandelbrot de los dos gráficos siguientes,



ampliados a diferente escala.

Gráfico 2: Hombre de Mandelbrot

Una característica que hace más interesantes a los fractales es que la autosemejanza no es una igualdad, es decir, que las variaciones que presenta a diferentes escalas pueden ser ínfimas pero sus efectos son acumulables y proporcionan una variedad apreciable, característica que es común a los fenómenos estudiados por la matemática del caos. Cuando se hacen acercamientos de un fractal vemos que la misma figura se repite

<sup>1</sup> Un tipo, los que conforman líneas de dimensión superior a 1. MANDELBROT, Benoit. *Objetos fractales*. P. 27

Estamos acostumbrados a reducir el mundo a una serie de figuras simples que nos son comprensibles. No hay ninguna dificultad en tener una serie de imágenes mentales con sus correspondientes fórmulas de solución, pero, de ahí a la realidad hay un gran salto, como lo podemos constatar en las graves diferencias existentes entre los modelos normalizados y la realidad. Un círculo de tiza es en el mejor de los casos un anillo que guarda en promedio alguna equidistancia con su centro. Sin necesidad de lupa es una figura bastante irregular en sus tres dimensiones. Pero si lo dibujamos en superfi-

cies más planas y con medios más exactos el problema no se soluciona sino que cambia de escala. Las figuras euclidianas funcionan a la perfección siempre y cuando no salgan de nuestra cabeza: sus relaciones se mantienen puras, intangibles y perfectas, correspondiendo a los deseos de Platón y de Pitágoras. Eso, sin embargo, no les resta un milímetro de su utilidad, pues nos han permitido tener un conocimiento de la realidad que es principalmente aplicado a la técnica: después de todo los puentes y los edificios normalmente no se caen y esto es debido a que el rango de utilidad de nuestra matematización del mundo es suficiente para nuestra escala y para la escala de la mayoría de los factores que consideramos como normales.

Lo curioso es que creemos en las matemáticas por su exactitud, no por dar la mayor aproximación posible. Después de todo los profesores de matemáticas no evalúan en las previas el grado de aproximación de las respuestas sino su exactitud y, en lo posible, la utilización de algunos métodos determinados. Y casi siempre las matemáticas giran más en torno a su exactitud que a sus posibilidades de aplicación.

Al dar un vistazo a las matemáticas del último siglo se aprecia que nuestro concepto sobre ellas

ha cambiado considerablemente. La confianza que se les tiene ha variado: esa fe absoluta en la aplicación de las fórmulas para hallar unos resultados determinados e inmutables no ha podido mantenerse intacta debido a que la complejidad de algunos problemas hace inútil o imposible intentar esas soluciones de las matemáticas instrumentales. Cuando la cantidad de operaciones traspasa en demasía las capacidades humanas y aún de los computadores, empieza a ser superfluo un intento de solución. Ese tipo de problemas no está muy lejos: la dinámica newtoniana prevé las posibles interacciones entre dos cuerpos, pero cuando hay tres cuerpos involucrados los resultados escapan a las soluciones sencillas que corresponden a los modelos simplificados.

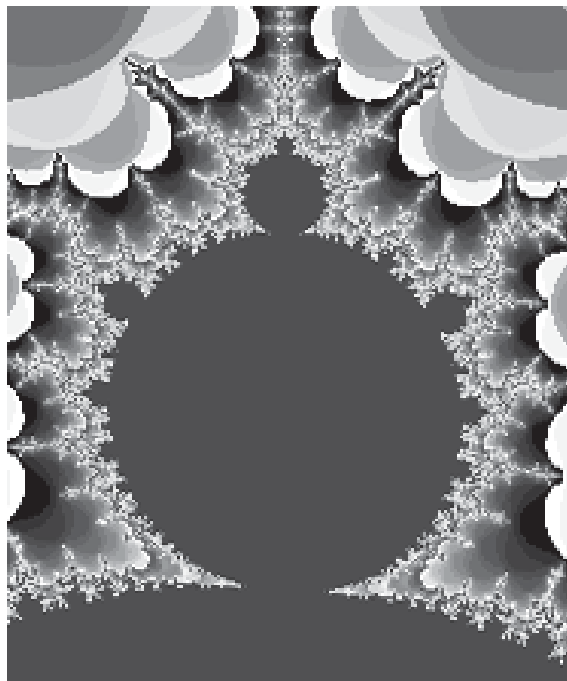


Gráfico 3 (generado en Fractint 20.0): La 'cabeza' del hombre de Mandelbrot es, a su vez, otro hombre de Mandelbrot, que, a su vez...

las situaciones permanentes de interacción entre objetos y el tamaño del universo, y así no queda por ahora más remedio que conformarse con un tipo de solución que no es del mayor agrado de los matemáticos como son las estadísticas de probabilidades y el recurso a los gráficos. Hay una gran diferencia en la utilización de estos instrumentos en esta y otras épocas: se creía que un gráfico es una manera de visualizar un proble-

mas como el mencionado abarcan de hecho la mayoría de las situaciones reales, dada la

ma pero no de solucionarlo, pero frente a la complejidad y el desorden son la única alternativa posible, pues si bien no permite el grado de precisión que esperamos al resolver una ecuación, al menos nos da ideas de cómo pueden configurarse regiones de espacios determinados y una delimitación del comportamiento de diferentes variables.

En la forma actual de ver las matemáticas se han ido introduciendo términos que son algo extraños por lo etéreos. Existen arduas discusiones para lograr la definición de cosas como la complejidad, el azar, el caos. Lo que hay de común en estos términos es una cierta confluencia en un modo de ver la realidad como algo mucho más rico de lo que podíamos imaginar. El mundo no está en ese soso equilibrio de lo previsible, pues si algo está en claro es que la interrelación entre los fenómenos de la realidad produce resultados inesperados. No se necesita la existencia de leyes extrañas y desconocidas para que puedan suceder cosas imprevistas. Pongamos una llave a gotear: a medida que se incrementa la cantidad de agua la secuencia de gotas será más rápida, hasta que algunas gotas se unan a las siguientes y creen el desorden; si se sigue incrementando la cantidad de agua se llega a un fluido laminar que luego

va a llenarse de turbulencias y de nuevo desorden. Aquí no hay ninguna ley ni fuerza extraña y sin embargo el equilibrio matemático conocido no se cumple de la forma en que creíamos preverlo, una gota de agua más otra suman una más grande o pueden causar la ruptura en gotas más pequeñas.

Lo cual nos lleva a intentar comprender que el azar no se produce por una indeterminación de las leyes de la naturaleza, sino simplemente porque la naturaleza cumple esas leyes. En los experimentos mentales no se produce el azar porque todos los factores están previstos y esa serie de cosas que nos estorban las consideramos desdeñables porque descartamos su influencia sobre los resultados: una palanca o una balanza, por ejemplo, como objetos ideales se limitan a relaciones inversas y exactas de dos longitudes y dos fuerzas, pero en cualquier caso real involucran fricciones y torciones que escapan a la hermosa simplicidad de las descripciones (o leyes) matemáticas. Recordemos el efecto

mariposa: en el caso de los modelos aplicados a la predicción del clima, la cantidad de factores variables que intervienen es tan alta que las consecuencias de cambios desdeñables en situaciones controladas se acumulan y

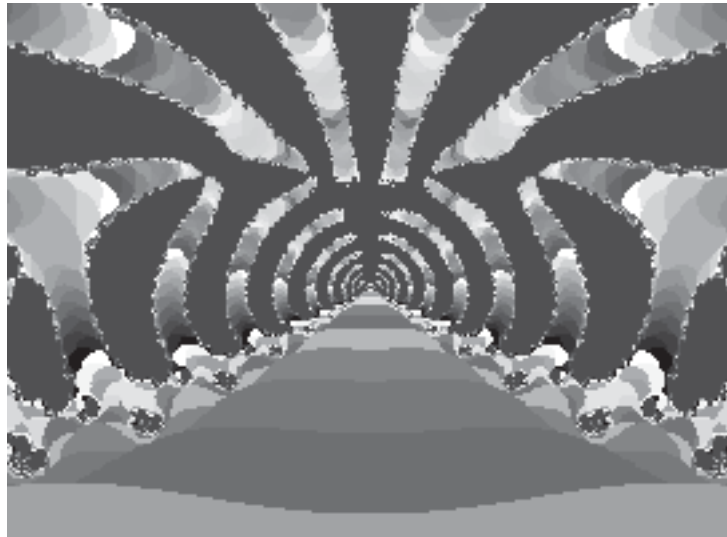


Gráfico 4: Araña fractal generada en Fractint 20.0

producen un efecto, como el de una mariposa que aletea en Pekín y causa una tormenta en Nueva York. Un cuerpo en equilibrio inestable se caerá con una ínfima presión: el culpable podría ser un microbio, que normalmente no puede mover un cuerpo pesado. En relaciones causales deterministas se puede ver secuencias a las que nos acostumbramos sin reflexionar mucho sobre el asunto, pero en la medida en que intervienen más factores como causa se hace cada vez más difícil determinar los pesos relativos de cada uno de ellos en la ocurrencia de un efecto, como ocurre en el ejemplo mencionado acerca del clima y mucho más en las relaciones sociales.

Nos estamos refiriendo a la existencia del caos, del azar, del desorden. Estos términos tienen sin embargo diferentes aplicaciones: por lo general llamamos caos, o desorden, a un tipo de orden desconocido, a una secuencialidad cuya norma no entendemos, o al entrecruzamiento de secuencias causales diferentes. En cierta medida lo que sucede con las descripciones matemáticas que se están empezando a utilizar para comprender la realidad es que no corresponden a las descripciones geométricas que se acostumbraba a creer como ordenadas. Cuando intentamos describir formas de la naturaleza con los instrumentos sencillos y usuales de la geometría euclidiana nos damos cuenta no sólo de su complejidad sino de que su complejidad es de otro tipo, como afirma Benoît Mandelbrot. Nos tenemos que remitir a otro tipo de orden diferente al que buscamos en la descripción geométrica. Para lograrlo tenemos que apelar a un nuevo tipo de conjuntos que se acercan a la irregularidad de la naturaleza: los fractales.

Como decíamos, en ocasiones el desorden no es más que un orden desconocido y lo que prueban los fractales es la existencia de cierto tipo de regularidad en el aparente desorden que ge-

nera el azar. Los fractales ocupan el espacio comprendido entre las dimensiones a las que estamos acostumbrados: a diferentes escalas la dimensión de los objetos varía, una estrella puede parecer desde lejos como un punto sin dimensión, pero en la medida en que nos acerquemos puede parecer bidimensional o tridimensional. Lo mismo sucede a nivel microscópico, un tablero de madera puede parecer con dos dimensiones pero en la medida en que hagamos un progresivo acercamiento se verá su diferente naturaleza, llena de rugosidades tridimensionales. Los fractales ocupan los espacios intermedios entre las dimensiones enteras: un punto de dimensión 0, una línea de dimensión 1, un plano de dimensión 2 y los objetos de tres dimensiones; por ejemplo, las líneas costeras mencionadas antes tienen una dimensión comprendida entre 1 y 2, de lo cual se deriva su posibilidad de tener una longitud infinita a pesar de ser cerradas.

Queda una pregunta por hacer y es hasta qué punto los fractales son una descripción válida de la realidad. Se habla de conjuntos fractales y de objetos fractales pero este último término deja las mismas dudas que decir que una piedra “redonda” es una esfera; la Tierra misma pasó de ser «redonda» a ser un geoide, es decir, a tener la forma de la Tierra, pues su figura exacta no corresponde exactamente a ninguna de las formas sencillas de la geometría. No podemos caer en el error de confundir una representación mental o un modelo simplificado con la realidad, y si bien la aproximación descriptiva que nos dan los fractales sobre la realidad natural es mayor que la provista por la geometría euclidiana esto no puede tener por consecuencia que los fractales sean la realidad, tal como algunos matemáticos optimistas se imaginan. Podemos construir imágenes de hojas de helecho, de árboles, de rostros, de nubes, a partir

de fractales y van a ser muy similares a una imagen fotográfica de esos objetos, pero no se construye la imagen exacta de un objeto real; podemos construir la imagen fractal de un árbol, pero este es un objeto ideal o quizá un árbol imaginario, o, más bien, ideal, por más que se parezca a los existentes.

El problema está, en definitiva, en el salto que hay entre todas nuestras descripciones del mundo, intentos de estructurar en un esquema ordenado jerárquicamente todos los conceptos que resultan de relacionar las percepciones con la razón, con respecto a los posibles órdenes existentes. La mente humana se niega a aceptar que la realidad no pueda ser conocida, pero los objetos no se acoplan por completo a las descripciones del mundo. Por fortuna es así, pues en el momento en que este salto fuera superado, el mundo no tendría nada más que decirnos. Los esquemas que aplicamos no van más allá de ciertos límites, lo cual se ve claramente ejemplificado en las dos grandes teorías de la Física: la relatividad, ocupada de las grandes dimensiones de tiempo, masa y espacio, y la física cuántica que nos revela el mundo subatómico. Seguramente algún día estas dos visiones llegarán a ser plenamente compatibles pero mientras tanto nos van a permitir hacer predicciones, cada uno dentro de su campo, así como nos ha seguido sirviendo Newton a escala humana.

Al igual que lo que se puede decir acerca de la geometría euclídeana, el hecho de que los fractales no agoten la realidad no significa que sean inútiles. Antes se tenía la creencia de que lo que faltaba para convertir a la realidad en geo-

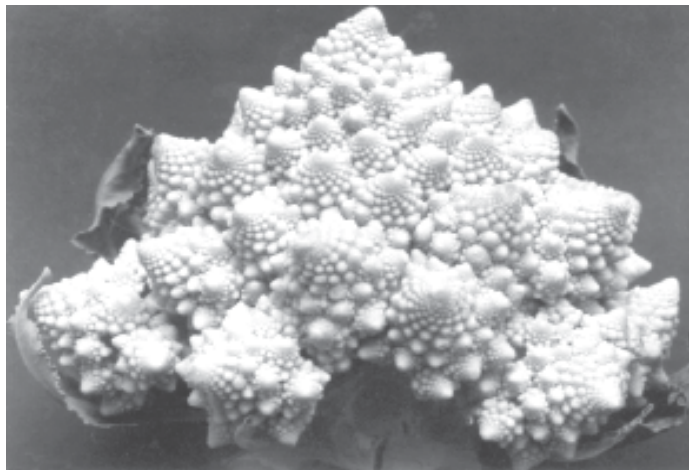


Gráfico 5: Romanesco, tipo de coliflor que ilustra los patrones fractales (fotografía del autor)

metría analítica era sólo tiempo y computadores potentes. Con los fractales se creyó que se había llegado a esa meta, pues éstos proveen una forma asequible para obtener descripciones de objetos complejos, pero no podemos olvidar que sigue existiendo ese abismo insalvable entre la realidad y nuestro conocimiento, por lo que es más adecuado hablar de modelos fractales.

## BIBLIOGRAFIA

MANDELBROT, Benoît. *Los objetos fractales*, Tusquets, Barcelona, 1984

STEWART, Ian. *¿Juega Dios a los dados?*, Grijalbo, Barcelona, 1989

HIRST, Bill. *Fractal Landscapes from the Real World*. Conerhouse Publications, Manchester, 1994.

BARROW, John D., *¿Por qué el mundo es matemático?*. Grijalbo, Barcelona, 1997