# EPISTEMOLOGÍA Y SOCIOGÉNESIS DE LA GEOMETRÍA

Magaly Corredor de Porras*
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

**Resumen**

En el presente texto se ilustra un mecanismo cognitivo hallado por Jean Piaget, en la epistemología de la matemática es la sucesión de periodos (*Intra-Inter-Trans*) define el progreso del conocimiento, desde sistemas elementales relativos a cada figura en particular analizando las propiedades internas de los objetos o de las figuras, seguido por el descubrimiento de relaciones entre los objetos y análisis de éstos desde un punto de vista global, y de allí a la generalización de propiedades válidas para conjuntos amplios de objetos y elaboración de estructuras matemáticas. El presente análisis se enmarca en la historia de la geometría, se examina el mecanismo del progreso intelectual en esta sociogénesis, como instrumento presente en el paso del conocimiento a estados de conocimiento formal y riguroso; se concede mayor interés al mecanismo de la construcción y progreso del saber, más que ocuparse del contenido de las nociones mismas.

**Palabras clave:** epistemología de la geometría, Sociogénesis de la geometria, hexagrama.

**Abstract**
Epistemología y sociogénesis de la geometría. A cognitive mechanism described by Jean Piaget is illustrated. This important epistemological tool in mathematics which is the succession of periods Intra-Inter-Trans defines the progress of knowledge from basic systems on each particular figure by analyzing internal properties of objects or pictures, followed by discover relationships among those objects and data analysis from a global perspective, then generalize valid properties about broad sets of objects and development of mathematical structures.

* Especialista en Matemática Avanzada Universidad Nacional. Magíster en Ciencias-Matemáticas Universidad Nacional.

This analysis is part of the history of geometry; in this socio-genesis, we examine mechanisms involved in intellectual progress as inherent tools in the process from thinking to states of formal and rigorous knowledge. We focus on the construction mechanism and progress knowledge, rather than concerning about the content of notions themselves.

**Key words**: epistemology of geometry, sociogenesis, hexagram.

## Introducción

Considerando La Epistemología Genética, la fuente de los instrumentos deadquisición de conocimientos es la adaptación, constituida pordos procesos básicos: la asimilación y la acomodación; con la asimilación se adopta el conocimiento como relación indisociable del sujeto y el objeto con predominio de la actividad del sujeto, mientras el objeto modifica en parte la asimilación por medio de la acomodación. Este carácter asimilador-acomodador del pensamiento implica una visión constructivista, pues *asimilar* es cercano a construir y *construcción* a *estructura*. En la construcción del conocimiento es importante explorar cuáles son y qué papel juegan los mecanismos de adquisición que se originan particularmente en la asimilación cognoscitiva, que es la propiedad general de las actividades del sujeto como motor activo de su propio desarrollo intelectual.

Cuando un individuo se enfrenta a un problema matemático, intenta asimilarlo a estructuras mentales ya existentes, esto significa el intento de resolverlo mediante conocimientos que ya posee, como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye expandiéndose para acomodarse a la nueva situación.

Los primeros instrumentos cognitivos surgen del constante trabajo de la asimilación-acomodación dando lugar a una organización de esquemas cada vez más elaborada y compleja, lo cual lleva a creer que los instrumentos iniciales de conocimiento son los esquemas de acción sensorio-motrices. Un «esquema» expresa el conjunto organizado de características que permiten repetir las acciones del sujeto o aplicarlasa contenidos nuevos; un esquema es una totalidad fuerte e integrada, tal que los comportamientos que induce están íntimamente relacionados (Piaget 1978). Hay esquemas innatos como por ejemplo los reflejos de prensión, succión, etc., pero la mayoría no son innatos, muchos se basan en ellos y en algunas experiencias, y a su vez son causa de otras experiencias y esquemas. De una u otra forma, estos dominan desde el principio las percepciones y no se formalizan en conceptos o no se interiorizan en operaciones del pensamiento sino hasta más tarde.

Desde muy temprano hay coordinaciones entre los diferentes esquemas yesta coordinación da como resultado un campo de significación más amplio y permite asimilar objetos nuevos a otros esquemas. Cada esquema de acción genera correspondencias en la medida en que es aplicable a situaciones u objetos nuevos, y la coordinación de esquemas genera ***variacione*s** en la medida en que al producir cambios en los objetos y situaciones genera nuevas posibilidades de acción por parte del individuo.

De esta forma, los instrumentos iniciales de adquisición de todo conocimiento y especialmente de **conocimientos de índole matemático son:** los **instrumentos comparativos, constituidos** por correspondencias, y los instrumentos transformadores, constituidos por **operaciones**, que actúan un poco más tarde, y aunque implican un actuar físico sobre el mundo, se realizan de manera cada vez más intelectual. Las operaciones se componen de actividades intelectuales que las caracterizan y suponen la ***necesidad*** de la asimilación-acomodación; estas operaciones se basan en la interiorización y coordinación de **acciones y son comparables a las nociones primigenias e intuitivas de las correspondientes operaciones en el campo de las matemáticas** (Corredor, 2012).

En la obra de Piaget, especialmente en las últimas publicaciones es notorio el hecho de emplear la historia crítica de las ciencias para confirmar sus tesis; aspecto digno de rescatar y profundizar por el vasto campo de acción que señala en los estudios epistemológicos. En la relación entre psicogénesis o desarrollo del pensamiento en el sujeto individual y la sociogénesis o historia evaluativa de la matemática, se encuentra un paralelo en los mecanismos comunes que facilitan el movimiento intelectual de lo precientífico a lo científico. Se muestran uno de estos instrumentos de paso: El mecanismo Intra-Inter-Trans, enfatizando en lo que se refiere a la formación de conocimientos geométricos y espaciales, observando que tanto en los niveles de la inteligencia espacial y geométrica, como en las etapas históricas del devenir de esta disciplina se hallan mecanismos análogos.

El mecanismo cognitivo *Intra- Inter-Trans* es a grandes rasgos un proceso que describe cómo el conocimiento pasa de análisis de tipo *Intra*a análisis de tipo *inter* y finalmente a los de tipo *Trans*; este proceso constructivo explica no sólo el orden secuencial del desarrollo intelectual en el sujeto individual, sino que además es aplicable al desarrollo histórico del conocimiento. En la sociogénesis el orden sucesivo y necesario del progreso del conocimiento va impulsando superaciones o «rebasamientos», los cuales comienzan agregando a las propiedades halladas en el período Intralas transformaciones elaboradas en el inter, que luego se sintetizan en el Transen un sistema de transformaciones; se constituye así una totalidad cuyos caracteres son nuevos con respecto a lo encontrado en el *Inter*, y éste a su vez implica conocer características y propiedades encontradas ya en el Intra.

Esto es lo que se ilustrará, partiendo de un breve recuento histórico, del desarrollo de la geometría, que se presenta en tres períodos con caracteres definidos y particulares: de los griegos hasta el siglo XVII, del siglo XVII al siglo XIX en tres ramas, geometría analítica, geometría proyectiva y geometrías no euclidianas, y finalmente del siglo XIX en adelante. Se han analizado los principales logros en cada uno desde una visión externa, considerando el papel que juega en esta evolución el concepto de *Transformación* y como las diferentes maneras de aplicar el álgebra determina características peculiares en cada periodo de este desarrollo.

A manera de notación se empleará: Ta para el periodo Intra, Tr para el periodo Inter y Ts para el periodo Trans; y en esta forma se escribirá la triada Intra-Inter-Trans como TaTrTs. La triada TaTrTs induce la construcción de operaciones sobre operaciones, puesto que en el Ta, se analizan casos particulares sin nexos entre sí o con una vinculación insuficiente; en el Tr la comparación en los diferentes casos particulares conduce a la construcción de transformaciones, en virtud de que pone en evidencia tanto las diferencias como las analogías, y establece correspondencias; y en el Ts las correspondencias derivadas del Tr son sistematizadas en totalidades que hasta entonces habían parecido inaccesibles. Es también por esta razón por la que la secuencia TaTrTs describe el aspecto dinámico de la superación intelectual. La importancia del mecanismo cognoscitivo TaTrTs radica en el hecho de que se encuentra en todos los niveles, inherente a toda construcción intelectual, y no se refiere de manera alguna a niveles específicos del progreso de conocimiento, tanto en la psicogénesis como en la sociogénesis.

## 1. Geometría sintética

La geometría prehelénica es de naturaleza empírica, ligada a problemas prácticos como la medición, en ella no se hallan demostraciones lógicas, el argumento general es sustituido por descripciones paso por paso, en procedimientos por lo común referidos a casos numéricos particulares. Los egipcios y babilonios por tanteo dedujeron fórmulas algunas veces incorrectas, quizá forzadas para un caso especial; los métodos empleados se basan en la observación de analogías y contrastes sin discriminar la diferencia entre una solución exacta y una aproximada.

Los griegos razonaron más deductivamente, obtienen conclusiones más por demostración que por experimentación, su geometría sobresale del resto de la matemática de la época para convertirse en el área de conocimiento con mayor grado de perfección, tanto es así que se constituyó durante muchos siglos en paradigma de la ciencia. Sin restar importancia a la geometría anterior, ni a diversos geómetras que contribuyeron a dar lustre a este florecimiento, se mencionan sólo cinco como los aquellos que permiten conocer los rasgos que caracterizan la geometría sintética.

Se resalta a Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pappus; a través de ellos se señalan algunas ideas que durante esta época se manifestaron en forma tácita, que se podrían calificar de embrionarias y que luego con el transcurso del tiempo se convirtieron en verdaderas piedras angulares de progresos en la geometría.

Con Arquímedes y Eudoxo germinó el cálculo infinitesimal en la idea de *exhaución*. Los griegos usaron procedimientos infinitos, al comparar configuraciones curvilíneas con rectilíneas, sugieren la inscripción y la circunscripción de figuras rectilíneas en figuras curvilíneas aumentando cada vez el número de líneas poligonales, Eudoxo (408-355 a.C.) pudo así elaborar el antepasado del concepto de límite de nuestra época. Arquímedes (287-212 a.C.) por su parte empleó el método exhaustivo, cuya idea central es: suponer A una figura cuya área se desea conocer, midiendo porciones de superficie infinitesimales de A y comparándolas con elementos de área correspondientes de una figura B con área conocida.

Con Apolonio (262-200 a.C.) germinó la geometría analítica en la idea de *coordenadas*, es importante reconocer en su obra el uso tácito de coordenadas, que empleó en sus demostraciones sobre propiedades de las cónicas, concretamente en la que llamó Propiedad Fundamental de las Cónicas. Con Pappus (aproximadamente S III) germinó la geometría proyectiva en el descubrimiento de la relación anarmónica o razón cruzada que describió en la proposición 129 de su obra Colección Matemática; en el siglo XIX esta idea fue revivida con ayuda de las magnitudes con sentido y se convirtió en el concepto básico de la geometría proyectiva.

Con Euclides la noción de *transformación*, que usó en forma implícita, bajo los apelativos de «colocar», «ajustar», «superponer» (proposición I.2. Elementos); un desplazamiento que no causa deformación en las figuras y permite demostrar la congruencia; otro germen de trans-formaciones es el de **prolongar o extender segmentos de recta**, que se halla también en sus obras.

Euclides (300 a.C.) escribió varias obras, pero su reputación se debe a sus Elementos, en la cual desarrolló la idea de un discurso lógico como sucesión de principios obtenidos por razonamiento deductivo, a partir de otros tanto iniciales como supuestos al comienzo del discurso; el legado de la antigüedad de innegable trascendencia es el método axiomático con el que se inmortalizó Euclides; Los Elementos son una obra monumental cuya influencia se mide por el extenso período que hubo de espera para una prolongación de su contenido geométrico. En otros análisis de geometría euclidiana, se concede gran importancia al tipo de pensamiento hipotético-deductivo; sin desconocer su relevancia, y puesto que el propósito aquí, es el de buscar las nociones y pensamientos que facilitan el paso de lo Ta, a lo Tr y de allí al Ts, se hará mayor énfasis en la idea de transformación de las figuras planas.

Aunque los desplazamientos de figuras son conocidos por Euclides, no hace uso expreso de ellos, excepto tal vez en la igualdad de triángulos donde da la impresión de que emplea la noción de desplazamiento como sustituto de un axioma no formulado. También, en la noción común 4: «Cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí», (Eves 1969) queda implícito que la superposición es el camino para probar la igualdad de dos figuras, así, supone un axioma de congruencia; deja entrever que usó virtualmente la superposición como movimiento sin deformar las figuras.

A pesar emplear con subrepción las transformaciones, se puede afirmar que hay ausencia explícita de ellas en este período. Como se verá más adelante, la noción de transformación desempeña un papel importantísimo en geometría y por ende en su desarrollo histórico, esta noción es fuente de construcciones y en ella radica la esencia del estudio geométrico.

Este vacío en cuanto a transformaciones, podría tener sus causas en la influencia que por aquella época ejercían la escuela platónica y la de Parménides, que despreciaban el movimiento y el cambio como ajenos a la verdadera filosofía, en la cual, las cosas deberían ser eternas e inmutables. Es muy posible que bajo este punto de vista que propicia la estática de los objetos y figuras, no se tomara en consideración el despla-zamiento de las mismas, esto explica por qué en las pruebas donde se emplea la superposición, se omite aclaraciones al respecto y no hay en esta geometría un axioma que permita trasladar, superponer, u otros movimientos.

Entre los aspectos que describen mejor el pensamiento griego se tienen:

§ las figuras desempeñan un papel protagónico: se describen y se trabajan teniendo en cuenta las relaciones que hay entre sus elementos;

§ las relaciones estudiadas son de tipo interno, particular a cada figura, sin tener en cuenta el espacio que las contiene;

§ al comparar figuras entre sí, y estudiar la congruencia, la semejanza, la equivalencia de áreas, etc. hay ya un paso claro a lo inter-figural.

*Geometría de los S XVII y XVIII*

En el siglo XVII la matemática experimentó una eclosión de métodos nuevos, los genios de este siglo innovaron procedimientos, enriquecieron con sus aportes los temas clásicos y crearon nuevas ramas en el pensamiento matemático. Respecto a la geometría, Desargues (1591-1661) marcó el nacimiento de una nueva geometría; Descartes (1596-1650) fusionó el álgebra y la geometría en un nuevo método del cual emergió la geometría analítica, la que subsidiada por el desarrollo del cálculo diferencial e integral alcanzó niveles insospechados por sus creadores. Se examina ahora un período del desarrollo histórico de la geometría, que por el enfoque de los problemas presenta características definidas y diferentes a la concepción esbozada hasta aquí.

Para los siguientes desarrollos de la geometría, conviene separarla en ramas y observar lo que en cada estilo de investigación sucedió. Es de aclarar que estas no se dieron paralelamente sino que hubo mutuo auxilio entre unas y otras, es más una cuestión de presentación que de fundamento. Se esbozará brevemente la geometría analítica, la proyectiva y las geometrías no euclidianas.

## 2. Geometría Analítica

Se aclara que esta geometría es más un método que una rama de la geometría general; el advenimiento de un simbolismo algebraico marca el punto de referencia obligado para la geometría analítica, en el siglo XVII aparecen Descartes y Fermat (1601-1665), quienes pueden considerarse como sus pioneros; sin embargo, ninguno de ellos inventó el uso de coor-denadas o fue el primero en emplear métodos analíticos; tampoco fueron iniciadores en aplicar el álgebra a la geometría o en representar gráficamente las variables, como también, ninguno de ellos trabajó esta geometría en el sentido moderno. Son pioneros en el sentido de reconocer que una ecuación dada, con dos incógnitas, determina una curva plana con respecto a un sistema coordenado, además porque desarrollaron méto-dos algorítmicos para unir la ecuación y la curva correspondiente.

Cada uno enfocó el problema desde un punto de vista diferente. Puede resumirse la idea de Descartes, en comenzar con el problema del lugar geométrico y obtener la ecuación del lugar; y la de Fermat, en comenzar con la ecuación y deducir las propiedades de su curva. A partir de ellos, los métodos analíticos y algebraicos dominaron casi por entero el enfoque preconizado para el estudio de la geometría, pues estos ofrecían técnicas para obtener resultados más generales y uniformes. Sin embargo, hubo quienes opinaban que esta forma de hacer geometría laceraba la concepción, por entonces común, de que la geometría era la ciencia del espacio, se dudaba de si estos métodos permitían hacer una verdadera geometría.

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX los geómetras se enfrentaron en controversias, de una parte los defensores del método sintético y de otra los que recurrían al álgebra y al análisis; los primeros apoyaban la elegancia, estética y pureza del estilo meramente geométrico, los segundos defendían la eficacia de las ramas mencionadas para encontrar soluciones y facilidad para generalizar las mismas.

Luego, en el siglo XIX, Plücker (1801-1868) ahondó en el estudio del método analítico, junto a la escuela francesa precisó y extendió los métodos y el concepto de coordenadas y generalizó varios problemas a espacios n-dimensionales con ayuda del álgebra; encontró significativas contribuciones al desarrollo del mismo, descubrió separadamente de Lamé, el principio de notación abreviada, trabajó en coordenadas empleando las coordenadas homogé-neas entre las cuales definió las trilineales.

La esencia de la geometría analítica está en establecer una correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos del plano, permitiendo una correspondencia entre curvas del plano y ecuaciones con dos variables; así mismo, se establece una correspondencia entre propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación con las propiedades geométricas de la curva. Para lograr estas relaciones, fue necesario fijar la posición de un punto por medio de coordenadas adecuadas, hecho que tiene su origen en Apolonio y que para este tiempo, ya es una idea mucho más elaborada y por supuesto más clara.

En geometría analítica se procede así:

- § ***Se transforma*** el problema o teorema inicial en un teorema o problema del álgebra o del análisis.
- § ***Se resuelve*** la situación algebraica; colocamos las figuras en un sistema coordenado de referencia, establecemos la relación geométrica que mantiene el punto móvil unido al lugar geométrico, y traducimos la relación anterior a una ecuación algebraica que se resuelve por métodos algebraicos.
- § ***Se invierte*** el resultado algebraico alcanzado en uno de la geometría (identificando el lugar geométrico por medio de su ecuación algebraica).

## 3. Geometría Proyectiva

Por otra parte, con Descartes y Pascal (1623-1662)en el siglo XVII, se encuentran los primeros resultados matemáticos para una geometría anteriormente enfocada por los pintores renacentistas. En el Renacimiento los pintores y arquitectos se dieron en la tarea de representar lo tridimensional en una base bidimensional con un alto grado de realismo, y perfección, algunos matemáticos como Descartes se inquietaron en prestar ayuda a los artistas y a los ingenieros, comenzaron con preguntas sobre las propiedades comunes que tienen las secciones de una proyección, o cuáles son las propiedades comunes a las secciones de dos proyecciones distintas. En la geometría proyectiva se busca una transformación de las figuras y la transformación básica fue la que se denominó *proyección,* aunque también en el siglo XVII y XVIII se estudió la *involución.* (ver figura 1.)

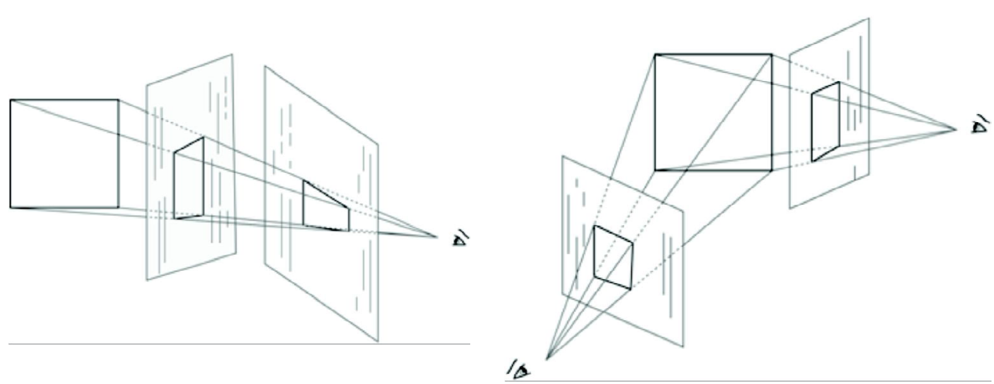


**Figura 1**. Propiedades comunes a todas las secciones de una proyección. Propiedades comunes a las secciones de dos proyecciones distintas.

El descubrimiento de propiedades proyectivas fue anterior a identificar el grupo proyectivo; la más añeja de las propiedades proyectivas invariantes corresponde al producto en diagonal de cuatro puntos colineales o razón cruzada, propiedad que conoció Pappus y seguramente, también Euclides.

Desargues (1591-1661) se ocupó de racionalizar la perspectiva estudió sus propiedades y desarrolló el procedimiento de la geometría proyectiva. Empleó la relación anarmónica en la demostración de su teorema de los dos triángulos, el cual se menciona acá pues además de famoso es aún hoy fundamental para la geometría proyectiva. El teorema establece también una propiedad común a dos secciones de un triángulo según la misma proyección desde un punto fijo O, ver figura 2, plantea que dos triángulos colaterales resultan ser coaxiales, propiedad válida aún en el caso en que los triángulos tengan sus lados paralelos, pues las rectas paralelas se cortan en un punto en el infinito y estos están sobre rectas en el infinito. Luego Poncelet (1788-1867), hizo de este resultado el fundamento de la teoría de las figuras homológicas.

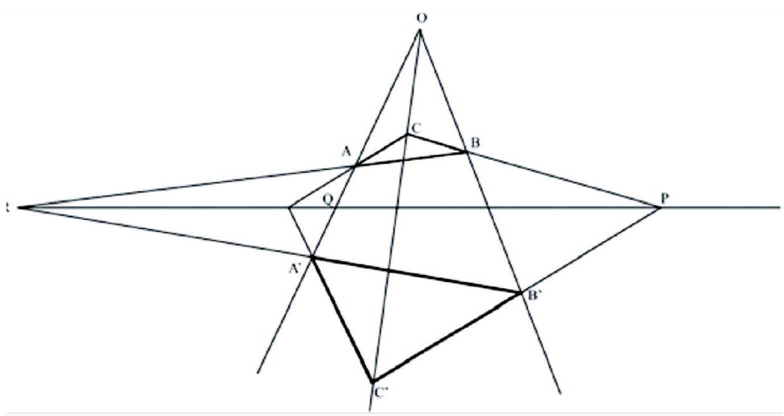
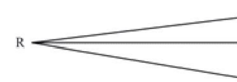



**Figura 2**. Ilustración para el teorema de Desargues.




Poncelet, un gran geómetra del siglo XIX, logró encontrar varias de las propiedades que se mantienen invariantes por proyección; además, se preocupó porque la geometría se independizara de algunas trabas que según él, le restaban potencia, afirmó que sin ellas la geometría tenía tanta efectividad como el álgebra; una es la dependencia de las figuras, y otra, los límites que imponen las figuras a las conclusiones, las cuales son válidas sólo para los efectos de la demostración; mostró que en la geometría hay elementos infinitos, los cuales extendió a puntos imaginarios y configuraciones imaginarias.

Monge (1746-1818) trabajó en el método de proyecciones hasta entonces empleado por Durero, clarificó los principios que le permitieron construir la geometría descriptiva a partir de una técnica gráfica, además de desarrollar el método, sugirió las aplicaciones, e insistió en el valor pedagógico de esta geometría. El fundamento de ella es el uso de la *proyección ortogonal* y el conocimiento que se deriva de las relaciones entre las proyecciones ortogonales de una misma figura. Varias propiedades se conservan por proyección una de ellas es la rectilinearidad, también el número de lados de las figuras se mantiene por proyección. En general, propiedades que se relacionan con la alineación de puntos, concurrencia de rectas, la razón doble, entre las más sobresalientes, se mantienen invariables por proyección. La utilidad de esta geometría descriptiva, derivada de la proyectiva, radica principalmente en dibujar objetos tridimensionales, de tal manera que los sólidos puedan determinarse completamente a partir de sus proyecciones en algunos planos, siendo posible reconocer la forma y deducir las características del cuerpo a través de sus respectivas vistas laterales. Actualmente sigue siendo un gran apoyo para arquitectos ingenieros y constructores. La figura 3 basada en una ilustración tomada del libro «Godel, Escher, Bach» (GEB) (Hofstadter 1989), muestra las vistas de un sólido.

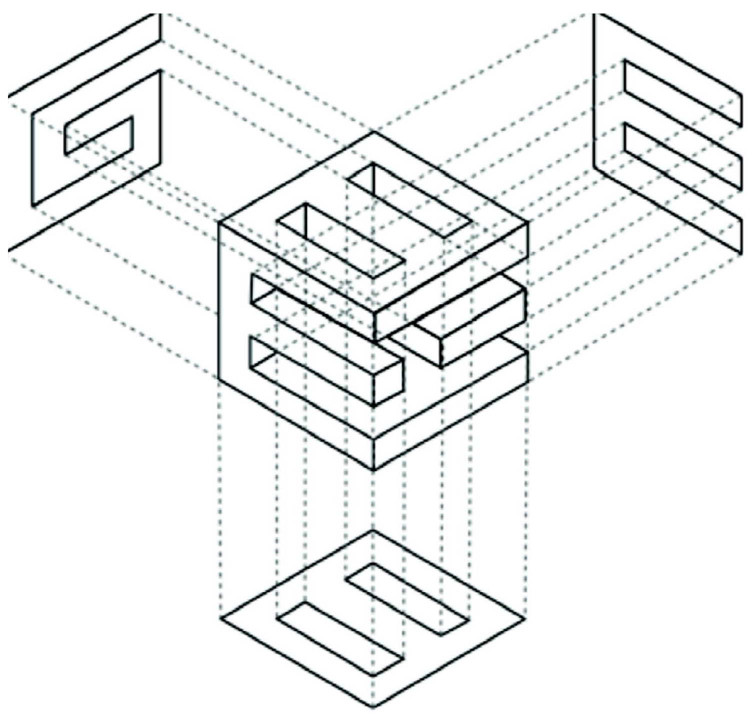


**Figura 3**. Adaptación de una ilustración de GEB, muestra las vistas laterales de un sólido

La influencia de Desargues en su discípulo Pascal es notable en lo que se refiere al interés por las consideraciones de tipo proyectivo, este por su parte precisó el método de la geometría proyectiva y mostró varios problemas cuya solución se trata con tal método.

El teorema de Pascal o «teorema del hexagrama místico para una circunferencia» es de tipo proyectivo, ya que la proyección de un círculo es un cono y las secciones posibles serán elipses, parábolas o hipérbolas. El teorema expone otra propiedad común, una propiedad del círculo que se mantiene en cualquier sección de cualquier proyección, establece que los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica cualquiera, se cortan en puntos que están sobre una misma recta llamada recta de Pascal, LMN y L'M'N' de la figura. El hexágono en el círculo original da origen a un hexágono inscrito en la sección cónica y las líneas que quedan en la primera figura pasarán a ser líneas de las nuevas figuras. (ver figura 4.)

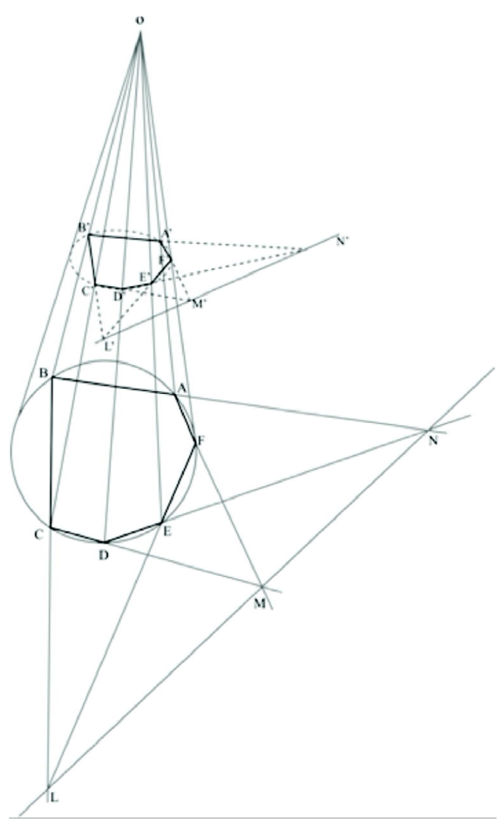



**Figura 4**. Ilustración para el teorema del hexagrama místico

Poncelet al retomar los estudios de la geometría proyectiva se basó en un principio ya anticipado por los griegos, cuya relevancia no fue vista ni fue completamente apreciado. Considerando una sección de la proyección de una recta divida por cuatro puntos. Los segmentos de la recta en la sección no tienen igual longitud a los de la recta original. Sin embargo se cumple (A'C'/ C'B'): (A'D'/ D'B') = (AC/CB): ( AD/DB) conocida como relación anarmónica o también razón doble, propiedad de carácter proyectivo; la razón doble de las rectas OA, OB, OC, OD es tal que si se forma una proyección de estas rectas desde un punto O» y tomamos una sección O'A', O'B', O'C', O'D' formada en dicha proyección, esta sección contendrá cuatro rectas concurrentes cuya razón cruzada es la misma de las cuatro primeras. (Ver figura 5). La invariancia proyectiva de la razón doble fue aprovechada en extenso por los geómetras del S XIX.

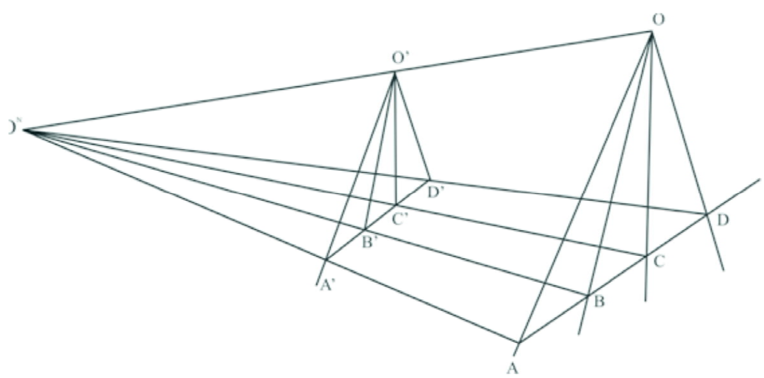



**Figura 5**. La razón doble es un invariante proyectivo

Los éxitos de esta geometría se culminaron con uno de los más bellos fundamentos de la matemática moderna, *el principio de dualidad* que se basa en poder intercambiar punto y recta en un teorema sobre figuras que estén en el plano y obtener un enunciado con sentido; cada inversión de un teorema en esta geometría, conduce a un teorema dual.

## 4. Geometrías no –Euclidianas

La importancia de las geometrías no euclidianas, una vez demostrada su consistencia, apunta a mostrar como la geometría euclidiana no es más que un caso particular de la geometría, además con los modelos para la geometría lobachevskiana y para la geometría riemanniana se puso en tela de juicio que la geometría fuera la ciencia del espacio.

Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777) y Legendre (1752-1833), cayeron en el mismo paralogismo de Euclides: asumieron la infinitud de la recta. Sacheri se propuso demostrar como la hipótesis del ángulo agudo y del ángulo obtuso conducen a una contradicción y así por reducción al absurdo la hipótesis del ángulo recto sería la única en verificarse; lo que llevaba consigo una demostración del postulado de las paralelas. Disimuladamente supuso la infinitud de la recta y eliminó la hipótesis del ángulo obtuso, luego forzó una contradicción, basada en elementos infinitos, para el caso del ángulo agudo. Si Sacheri se hubiera declarado incapaz de hallar esta supuesta contradicción, se le hubiera atribuido el hallazgo de las geometrías no euclidianas.

A partir del siglo XVIII quedaron señaladas las otras dos posibilidades: más de una paralela, o ninguna paralela, pues el quinto postulado de Euclides en la versión llamada de Playfair, conocida ya por Proclo, señala la unicidad de la recta paralela que se puede trazar a una recta dada por un punto exterior a ella.

El desarrollo mostrado desde el siglo XVII hasta el siglo XIX, permite observar cómo a partir de las ideas primigenias de coordenada en Apolonio, de proyección en Pappusy de transformación en Euclides, mediante un proceso de reacomodación, reinterpretación y enriquecimiento, se fueron perfeccionando, se ganó mayor claridad y precisión en los métodos y se abrió un horizonte más prometedor para los avances futuros en esta materia.

Tanto en los albores de la geometría analítica como en los de la geometría proyectiva, se observa un recurso a la transformación: de curva a ecuación y viceversa en la primera; de involución y proyección ortogonal en la segunda. Sin embargo, no hubo conciencia sobre el alcance de la noción de transformación, esta conciencia sobre la potencia del mencionado concepto, sólo se alcanzó en el siglo XIX, la demora se explica quizá en que aún no se admitía o no se concebía la naturaleza algebraica y operatoria de las transformaciones. El paso de la aplicación sobreentendida a la utilización premeditada, es decir, a la conceptualización de transformación, exige el concurso del álgebra y del análisis.

### *Geometría del S XIX*

Este siglo es comparable a un semillero donde germinaron varias especies geométricas, se inauguró la geometría algebraica y la topología, se intensificó el estudio de las curvas y de las superficies, se establecieron las propiedades de naturaleza métrica para la geometría euclidiana, las geometrías ndimensionales y la geometría diferencial.

Se ha visto que el camino abierto por Pascal y Desargues hacia la geometría proyectiva, y posteriormente, Monge y sus discípulos, amparados en su propio tesón y en el genio pedagógico de su maestro, dirigieron el rumbo de esta geometría. En el siglo XIX se determinó claramente el uso de las transformaciones, básicamente en descubrir propiedades de una figura particular a partir de propiedades específicas de otra; después de Poncelet principal discípulo de Monge, las transformaciones se consideraron en forma de correspondencias entre figuras, transformaciones afines, lineales, rotaciones, homotecias, traslaciones, entre otras. Sin embargo, la geometría proyectiva no se fundamentó hasta no considerar idéntica la figura inicial con todas aquellas obtenidas de ésta por proyección, y hasta no independizar las propiedades de la figura con respecto a las modificaciones causadas por la proyección. Al comienzo de la geometría proyectiva se incorporaron los sistemas de transformaciones como método fundamental de la geometría en un intento para dar a esta rama la independencia del álgebra, el mismo nivel de generalización, la flexibilidad y fertilidad de la geometría analítica.

Plücker (1801-1868) empleó el punto de vista analítico para obtener la expresión algebraica de las transformaciones, y así, se dejó de lado la rivalidad entre estos dos estilos de investigación y surgió con mayor evidencia un mutuo auxilio entre álgebra y geometría. Además de los trabajos de Plücker, el estudio del álgebra lineal contribuyó en geometría para que se diera el paso siguiente, la reflexión sobre los invariantes por una transformación, que si bien ya se había iniciado, desde entonces se perfilaba como el camino más seguro hacia el futuro de la investigación en esta área.

La cuestión que embargó la atención de buen número de matemáticos fue la independencia del postulado de las paralelas en el sistema de Euclides, todos la asumían, pero les preocupó su independencia, es decir si este postulado es demostrable a partir de otros. Gauss (1777-1855) pensó que no lo era, pero no publicó sus ideas, mientras que Bolyai (1802-1860) y Lobachevsky (1793-1856) y posteriormente Riemann (1826-1866), sorprendieron al mundo con la idea de unas geometrías con tanta consistencia lógica como la euclidiana, más adelante se reconoció la geometría bidimensional euclidiana como la geometría ordinaria de ciertas curvas como la esfera y la psuedoesfera. Con referencia a las geometrías no euclidianas, se apunta su importancia para la algebrización de la geometría paso siguiente en el desarrollo de toda el área.

Llegando al final del siglo los investigadores proyectivos emplearon el método analítico para hacer más fácil la investigación de las propiedades invariables. En el álgebra las propiedades de las figuras son expresiones algebraicas y la transformación proyectiva de sección a sección es un cambio de un sistema de coordenadas a otro; de ahí se originó el estudio de la invariancia de las formas algebraicas, al cambiar de coordenadas, y en la transformación de coordenadas, la invariancia proyectiva conserva su forma algebraica.

Desde el siglo XIX y en lo sucesivo, se incorporaron los sistemas de transformaciones como método fundamental de la geometría, lográndose así la anhelada independencia de las figuras y el grado de generalidad de ellas; bajo estos aspectos evolucionaron las características de un período nuevo con una forma particular y diferente de enfrentar las cuestiones de la geometría.

Felix Klein (1849-1925) enseñó cómo definir distancia, medida de ángulos en términos de la razón opuesta, de ahí se hizo posible sostener que la geometría proyectiva es anterior a la euclidea y por tanto puede considerarse como caso especial de la primera, también mostró que las no euclidianas son casos especiales de la misma. El programa de Erlangen, obra de Klein, presentó una clasificación de las geometrías fundamentada en la proyectiva y caracterizándolas mediante los grupos de transformaciones que les corresponden; de tal manera que cada geometría es el estudio de las propiedades que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo seleccionado. Este programa permitió una definición de geometría como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto S que permanecen invariantes cuando los elementos de S se someten a las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones G.

Una diversidad de geometrías pueden estudiarse por medio de subgrupos del grupo de transformaciones de una dada. Se estableció además una jerarquización de las geometrías puntuales planas: el grupo de transformaciones de la geometría métrica euclidiana es subgrupo del grupo de transformaciones de la geometría equiforme, a su vez, el grupo de transformaciones de ésta, es subgrupo del grupo de transformaciones de la geometría afín y éste es subgrupo del grupo de transformaciones de la geometría proyectiva (ver figura 6.) De esta forma, la geometría proyectiva contiene como subgrupos a los grupos de transformaciones de las anteriores geometrías; los teoremas de la geometría proyectiva están contenidos en cada una de las otras, siendo la euclidiana la más rica en teoremas.

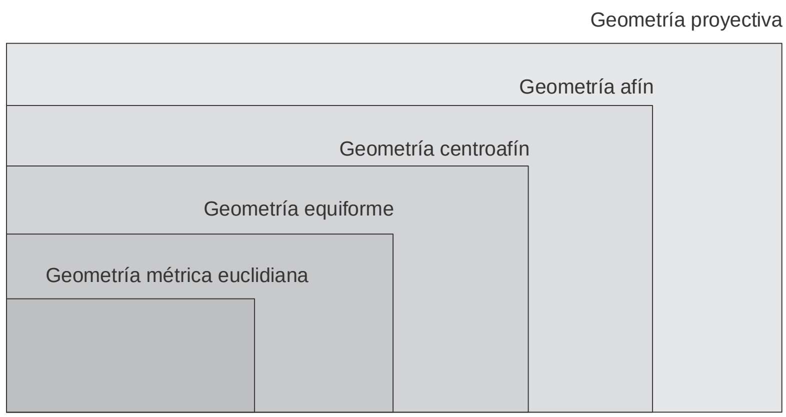



**Figura 6**. Ilustración de la jerarquización de las geometrías puntuales planas

El estudio de las geometrías no euclidianas constituyó un período importante en la maduración del programa de Erlangen, pues con ellas quedó claro que la euclidiana no es más que un caso particular de la geometría general. Klein puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas; cada una de ellas es una geometría proyectiva de una superficie de curvatura constante, así, la geometría de Lobachevsky es la geometría de una superficie de curvatura constante negativa; la geometría Riemann, es la geometría proyectiva de superficies de curvatura constante positiva. De este modo quedó establecida la independencia de la geometría proyectiva respecto de la teoría de las paralelas.

Fue a partir del hecho de considerar las transformaciones como grupos cuando se comenzó a reconocer el alcance de la estructura de grupo en el estudio geométrico. Cuando Klein adoptó la definición de geometría, dejó de tomarla como estudio de propiedades de las figuras y la adoptó como el estudio de los diversos grupos de transformaciones y sus invariantes.

La teoría de tensores o cálculo tensorial resultó de gran apoyo para los físicos ya que facilita expresar las leyes científicas sin que varíen al cambiar de coordenadas. Los proyectivos iniciaron el estudio de los conceptos y técnicas empleados en la teoría de la relatividad, sin que haya mediado una mínima traza de previsión por su parte.

*Tríada Intra-Inter-Trans en la sociogénesis de la geometría*

Se destaca el valioso papel que jugó la idea matemática de *transformación* en este desarrollo. Transformar es el fundamento de la geometría, conocer sus antecedentes históricos y los métodos que median su larga evolución, permiten tomar conclusiones epistémicas.

Los antecedentes históricos de la noción de transformación se remontan a las contribuciones de los griegos, en la rudimentaria idea de coordenadas de Apolonio, en las modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite con Arquímedes y en el tenue empleo de transformación en Euclides y por proyección en Pappus; sin embargo, como ya se ha señalado, puede decirse grosso modo que no hubo un manejo formal de transformaciones en esta época.

Posteriormente Desargues y Pascal empleando ideas sencillas elaboraron los cimientos de la teoría de las proyecciones; asombra el hecho de que a pesar de la sencillez de tales conceptos no se hayan aplicado y transcurrió más de un siglo para su expansión y empleo. La noción de transformación sólo puede precisarse a través del álgebra y el análisis, este el argumento para dar cuenta de este retraso, pues estas dos áreas se desarrollaron hasta el siglo XVI y XVII.

Más tarde este concepto atraviesa un periodo largo de exploración marcado por el apogeo sobresaliente de la geometría proyectiva. La diferencia entre métrica y proyección se formuló luego con Klein, quien sujetándose de la potencia del concepto de grupo, consideró el grupo de transformaciones sobre un conjunto como instrumento para distinguir los diferentes tipos de geometría y la independencia de las figuras.

Anterior al proceso de algebrización, transformar era un movimiento intuitivo, lo que traía serias limitaciones, toda vez que se aplicó a un caso particular se extrajeron propiedades sin lograr expresar la estructura y sin globalizar el rol de este desplazamiento. La teoría de grupos permite reformular profundamente y a otro nivel la noción básica de la geometría. Tanto en estado embrionario como intuitivo el pensamiento de transformación, fue empleado como herramienta, sin lugar a reflexiones sobre su significado e importancia. La transición del uso implícito al consciente, es la conceptualización o tematización en palabras de Piaget, este desfase entre uso y tematización no es cuestión del azar, para este caso, se debió al método analítico, cuyo proceder y fundamento a su vez se deben al algebra; la operatoria, característica inherente de las transformaciones algebraicas, constituye la base de la conceptualización de la transformación en geometría.

En el período en que la geometría es subsidiaria del álgebra, las transformaciones se trabajan por medio de ecuaciones, la geometría aparece al comienzo y al final del procedimiento, como traducción del resultado de transformaciones algebraicas. Recurrir al álgebra explica también la diferencia conceptual entre los griegos y aún entre Desargues y Pascal, con respecto a los geómetras del siglo XIX, pues los primeros no poseían el instrumento operatorio capaz de revolucionar el método geométrico, esto es el grupo de transformaciones.

El examen reseñado permite distinguir tres aspectos diferentes del empleo del álgebra, cuya divergencia radica en la concepción y en el alcance de la aplicación, cada uno marca a su vez tres grandes etapas en la gesta señalada; esta demarcación se basa en los estudios de Piaget (1982), siguiendo sus lineamientos, la tríada *Intra-Inter-Trans*, para el caso de la evolución geométrica, se traduce en las tres formas de aplicación del álgebra a la geometría; la diferencia en el modo de aplicar el álgebra, establece períodos con un determinado tipo de análisis de los problemas geométricos.

**Aplicación traductiva del algebra**

Sin pretender hacer exclusión alguna, únicamente teniendo en cuenta los más sobresalientes pensadores, este periodo puede tomarse desde Euclides hasta Descartes y Fermat, en donde a grandes rasgos se recurre a una aplicación traductiva del álgebra; con este nombre se quiere designar al periodo caracterizado por el estudio de las figuras, los cuerpos, las curvas, a través de relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o cuerpos sin considerar el espacio total. Las transformaciones se emplean al interior del espacio que las comprende, y se mantiene un carácter local e intrínseco. La relación entre los elementos de una figura en un problema particular es traducida al álgebra, esto se observa desde Apolonio, en sus análisis de las propiedades de las cónicas; las relaciones que pueden establecerse algebraicamente corresponden a relaciones estrictamente internas entre los elementos de una figura determinada, aún en la relación álgebra-geometría lograda con Descartes y Fermat, las transformaciones que se emplean se hacen al interior de la figura, no alcanza a adquirir el carácter general de un método, pues se trataron curvas particulares con ecuaciones específicas.

Por las características de este período se puede decir que es una etapa en la cual prevalece un análisis de tipo *intra-figural*, aunque -como se observó arriba- también hay preámbulos de análisis de tipo inter-figural, y aparecen los gérmenes de las transformaciones.

## Aplicación del concepto de función

Una segunda etapa, desde Descartes-Fermat hasta Poncelet, de tipo inter-figural, corresponde a un período en el cual se aplica el concepto de función en geometría; este tipo de aplicación del álgebra, pone en relación las figuras entre sí, se buscan transformaciones que relacionen las figuras según diversas formas de correspondencias; las cuales se consideran explícitamente inmersas en el espacio o el plano que las contiene, tenido en cuenta al expresar la función.

Es una época marcada por el uso de las funciones y de las transformaciones tomadas como caso particular de ellas, sin llegar a subordinarlas en una estructura algebraica del espacio sino más bien, una serie de construcciones que deben efectuarse para ajustar el álgebra al espacio y recíprocamente.

Se inaugura con el método analítico de la geometría que lleva este nombre, y continúa con la geometría de las proyecciones; se encuentran ideas de simetría de figuras traducidas al álgebra en términos de cambios de ejes coordenados y ejes de rotación. Dada la característica de relacionar figuras con otras en un mismo espacio, se le adjudica el nombre de periodo *Inter-figural*.

## Aplicación de estructuras algebraicas

En la última etapa acudimos a una aplicación de una estructura algebraica, no se establecen correspondencias punto por punto entre dos o más figuras, sino correspondencias entre los elementos de una estructura dada. Se deja de transformar una figura en otra manteniendo sin variación algunos elementos, para estudiar la estructura que opera sobre un conjunto de transformaciones. Se conceptualizan las transformaciones, se conciben colectivamente en un conjunto en el que actúa una operación de segundo orden, la composición, que le confiere al conjunto de transformaciones la estructura de grupo, en ella se analizan las propiedades comunes de las diversas correspondencias entre figuras.

La principal manifestación de este tipo de estudio es el Programa de Erlangen, y por este modo de enfocar la investigación es denominado *Trans-figural*. Se abstraen totalmente las figuras y se trabaja indiscriminadamente bajo las transformaciones, centrando la atención en estas no en la figura como objeto central, tal es el caso de la etapa anterior, cimentada en comparar figuras como imágenes y pre-imágenes de las funciones.

Entre uno y otro periodo hay una reinterpretación del fundamento conceptual, la noción de transformación. Hay reconstrucción de lo conquistado anteriormente, en términos Piagetianos, hay una reorganización de los conocimientos influida por nuevos puntos de vista, que no se limita a acrecentar, por el contrario, se asiste a una reinterpretación y reorganización de los conocimientos básicos ya asimilados en forma dispersa.

El mecanismo cognitivo encontrado a lo largo del recorrido histórico, ilustra el proceso de asimilación del álgebra a la organización de los conocimientos geométricos que se tenían hasta el siglo XVII, y la acomodación de los conocimientos operatorios derivados de la geometría analítica, para conseguir un panorama más prometedor para la geometría, que permitió reinterpretar y expresar sus fundamentos. No sólo se trata de una nueva armazón para el pensamiento geométrico, sino que es el terreno abonado para generalizar la geometría adquirida en épocas precedentes.

## Bibliografia

*COLLETTE, Jean Paul. (1986).* Historia de las matemáticas, Tomos I y II. México: Siglo XXI.

CORREDOR, Magaly. (1993). «Mecanismos cognoscitivos comunes a la historia y la psicogénesis de la Geometría». Policopiado. Tesis de Magister en Matemáticas UN, director Dr. Carlos Eduardo Vasco. Santanfé de Bogotá.

CORREDOR, Magaly. (2012). «Instrumentos cognitivos en el pensamiento matemático». En: Revista *Praxis & Saber* Nº4 de la Maestría en Educación de la UPTC. Tunja.

HOFSTADTER, Douglas. (1989*). Gödel, Escher, Bach.* Un eterno y grácil bucle. 3ª edición. Barcelona. Tusquets editores.

KLINE, Morris. (1997). «Geometría proyectiva». En Sigma: *El mundo de las matemáticas*, volumen 4. Selección de textos matemáticos por James R. Newman. Barcelona: Grijalbo.

EVES, Howard. (1969). *Estudio de las Geo-metrías,* Tomos I y II. México: Unión tipográfica editorial hispano-americana. UTEHA.

PIAGET, Jean. (1978). *Introducción a la epistemología genética*, 1. El pensamiento matemático. 2 ed. Buenos Aires: Paidós.

PIAGET, Jean y GARCIA, Rolando. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI.

Recibido: abril 30 de 2012 - Aprobado: noviembre 1 de 2012