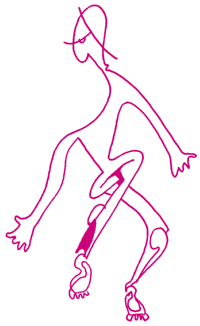
Solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias mediante sus grupos de simetría

Solution to some Ordinary Differential Equations by Means of their Symmetrical Groups



Pedro Nel Maluendas Pardo*
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Grupo de Investigación: Algebra y Análisis

Flor Alba Gómez Gómez**
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Grupo de Investigación: Algebra y Análisis

Marlon Roger Hueza Acevedo***
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Grupo de Investigación: Algebra y Análisis

Recepción: 18/03/2008
Evaluación: 16/04/2008
Aceptación: 16/08/2008

Es un avance del proyecto: «Estudio de las simetrías de diferentes clases de ecuaciones diferenciales y clasificación de sus soluciones mediante grupos de Lies.

* Profesor Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Magister en Ciencias Matemáticas, UNAL pnmaluendasp@unal.edu.co *Grupo de Investigación: Algebra y Análisis*

** Licenciada en Matemáticas, UPTC .orgomezz@yahoo.es. *Grupo de Investigación: Algebra y Análisis*

*** Licenciado en Matemáticas, UPTC *Grupo de Investigación: Algebra y Análisis*

Resumen

Mediante el algoritmo de Lie se pueden encontrar soluciones, con su respectiva clasificación, para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO); además, se puede reducir el orden de algunas ecuaciones. Existen ecuaciones de segundo orden que no se pueden reducir ni solucionar, como lo son las ecuaciones trascendentes de Painlevé, puesto que solo admiten el grupo de simetría trivial (Clarkson, 2005). Aquí se dan a conocer algunos grupos de simetría que admiten diferentes EDO de primer, segundo y tercer orden, con sus soluciones respectivas, encontradas en su mayoría a partir de los casos particulares, que son soluciones del sistema que resulta de la anulación de la función que define la ecuación diferencial, en la respectiva prolongación.

Palabras clave: Grupos de Lie, Invariantes, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Grupos de simetría.

Abstract

By means of the Lie algorithm can be found solutions and their respective classification for the ordinary differential equations, (ODE) besides it can be reduced the order of some equations. There are the second order equations, such as the transcendental equations of Painlevé that can not be reduced neither solved, because the admission is only for the trivial symmetrical field (Clarkson, 2005). Here are shown some symmetrical groups classified as ordinary differential equations of first, second and third order with their respective solutions, found mainly in their particular cases. These are solutions to the system that result from the annulment of the function which defines the differential equation in its respective prolongation.

Key Words: Lie Groups, Invariable, Ordinary Differential Equations, Symmetrical Groups.

Introducción

Se le llama grupo de Lie a una variedad diferencial $\mathcal{G}$ con una estructura de grupo, tal que la operación del grupo y la inversión del grupo

$$\chi : (a,b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow a * b \in \mathcal{G}; \;\; a \in \mathcal{G} \rightarrow a^{-1} \in \mathcal{G},$$

son diferenciables. Habitualmente se denota con $e \in \mathcal{G}$ el elemento neutro del grupo y con notación multiplicativa la operación del grupo.

Una de las ideas subyacentes en la noción de grupo de Lie es la de movimiento. El grupo de Lie por excelencia es el de los movimientos rígidos en el espacio, los cuales no sólo forman un grupo, dado que la composición de dos movimientos es un nuevo movimiento, sino que además el nuevo movimiento depende "suavemente" de los dos dados (ver (Campos, 1992), (Faro, 2003) y (Olver, 1993)). Así, teniendo algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales se pueden calcular otras soluciones de dicha ecuación a partir de las conocidas.

"Se sabe, desde diversos enfoques, que una ecuación diferencial de primer orden admite grupos de Lie; lo que desafortunadamente no se sabe salvo en raras ocasiones, es cómo encontrar los coeficientes ϕ y ξ de un campo de vectores respecto a cuya primera prolongación la ecuación sea invariante; esto se debe a que ϕ y ξ han de satisfacer condiciones diferenciales. En este sentido, el mayor problema consiste en averiguar el método para resolver ecuaciones diferenciales" [4. pag 69]. Es por esto que en este artículo se toman casos particulares que satisfacen el sistema.

Una de las ideas subyacentes en la noción de grupo de Lie es la de movimiento. El grupo de Lie por excelencia es el de los movimientos rígidos en el espacio, los cuales no sólo forman un grupo, dado que la composición de dos movimientos es un nuevo movimiento, sino que además el nuevo movimiento depende suavemente de los dos dados

El presente artículo resume las ideas expuestas en el proyecto de grado presentado por los autores en la Escuela de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC (Gómez y Hueza, 2006).

1. Solución de algunas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante sus grupos de Simetría.

Si una ecuación diferencial ordinaria admite algún grupo de simetría uniparamétrico, éste tiene un generador infinitesimal de la forma

$$\mathbf{v} = \xi\,(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \phi\,(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

el cual se prolonga mediante la expresión

$$\mathbf{Pr}^{(n)}\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial u} + \sum_J \phi^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J} \quad (6)\,.$$

Los detalles sobre estos resultados se encuentran en (Bluman y Kumei, 1989) y (Olver, 1993).

Para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las tres primeras prolongaciones son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Pr}^{(1)}\mathbf{v} &= \xi\frac{\partial}{\partial x}+\phi\frac{\partial}{\partial u}+\left(\dot{\phi}_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-u_x^2\xi_u\right)\frac{\partial}{\partial u_x}. \\
\mathbf{Pr}^{(2)}\mathbf{v} &= \xi\frac{\partial}{\partial x}+\phi\frac{\partial}{\partial u}+\left(\dot{\phi}_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-u_x^2\xi_u\right)\frac{\partial}{\partial u_x}+\left(\phi_{xx}+\left(2\phi_{xu}-\xi_{xx}\right)u_x+\right. \\
&\quad \left.\left(\dot{\phi}_u-2\xi_x\right)u_{xx}-3\xi_u u_{xx}u_x+\left(\phi_{uu}-2\xi_{xu}\right)u_x^2-\xi_{uu}u_x^3\right)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \\
\mathbf{Pr}^{(3)}\mathbf{v} &= \xi\frac{\partial}{\partial x}+\phi\frac{\partial}{\partial u}+\left(\dot{\phi}_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-u_x^2\xi_u\right)\frac{\partial}{\partial u_x}+\left(\phi_{xx}+\right. \\
&\quad \left.\left(2\phi_{xu}-\xi_{xx}\right)u_x+\left(\dot{\phi}_u-2\xi_x\right)u_{xx}-3\xi_u u_{xx}u_x+\left(\phi_{uu}-2\xi_{xu}\right)u_x^2-\xi_{uu}u_x^3\right)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\
&\quad +\left(\phi_{xxx}+(3\phi_{xxu}-\xi_{xxx})u_x+(3\dot{\phi}_{xu}-3\xi_{xx})u_{xx}+(3\phi_{xuu}-3\xi_{xxu})u_x^2+\right. \\
&\quad (3\phi_{uu}-9\xi_{xu})u_xu_{xx}+(\dot{\phi}_u-3\xi_x)u_{xxx}-3\xi_u u_{xx}^2-4\xi_u u_x u_{xxx}-6\xi_{uu}u_x^2u_{xx}+ \\
&\quad \left.\left(\dot{\phi}_{uuu}-3\xi_{uxu}\right)u_x^3-\xi_{uuu}u_x^4\right)\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}.
\end{aligned}
$$

Teniendo las prolongaciones del campo vectorial v se pueden encontrar los grupos de simetría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero para esto se deben tener en cuenta los siguientes teoremas, cuya prueba se encuentra en (Olver, 1993).

Teniendo las prolongaciones del campo vectorial *v* se pueden encontrar los grupos de simetría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero para esto se deben tener en cuenta los siguientes teoremas, cuya prueba se encuentra en (Olver, 1993).

Para todos los casos se considera que M es una subvariedad de un espacio euclidiano X U, donde X, isomorfo a $\mathbb{R}^p$ y U, isomorfo a $\mathbb{R}^q$; son llamados respectivamente el espacio de variables independientes y el espacio de variables dependientes.

Teorema 1. Teorema de invariación local. Supóngase que

$$\Delta_k\left(x,u^{(n)}\right)=0$$

k = 1, 2, ..., l, es un sistema de ecuaciones diferenciales de rango máximo definido sobre $M\subset X\times U$*, si G es un grupo local de transformaciones actuando en M, y*

$$\mathbf{Pr}^{(n)}\mathbf{v}\left[\Delta_k\left(x,u^{(n)}\right)\right]=0$$

k = 1, 2, ..., l, cuando

$$\Delta_k\left(x,u^{(n)}\right)=0$$

para todo generador infinitesimal v de G, entonces G es un grupo de simetría del sistema (6).

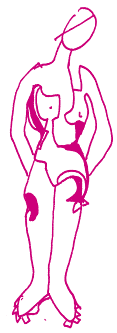
Es decir, dadas algunas ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten un grupo de simetría, este es generado por el campo vectorial

$$\mathbf{v} = \xi\left(x, u\right)\frac{\partial}{\partial x} + \phi\left(x, u\right)\frac{\partial}{\partial u}$$

si y solo si el prolongamiento correspondiente del campo vectorial satisface el sistema diferencial que se deriva de dichas ecuaciones. Los métodos para solucionar los sistemas de ecuaciones que resultan del prolongamiento estan fuera del alcance de este trabajo, luego se optará por tomar casos particulares con algunas restricciones, en especial para el prolongamiento del campo vectorial de las ecuaciones de primer orden.

Para encontrar el grupo de Lie uniparamétrico admitido por una ecuación diferencial ordinaria hay que determinar el par de funciones $\xi(x, u)$ y $\phi\,(x, u)$ conocidas como los coeficientes del generador infinitesimal.

Teorema 2. *Una función $f : M \to N$ entre variedades, es invariante respecto de un grupo G si y solo si* v*(f(x)) = 0; para cada generador infinitesimal* v *de G, (Bluman y Kumei, 1989).*



1.1. Ecuaciones de Primer Orden

Para empezar el estudio de las simetrías de ecuaciones diferenciales ordinarias es conveniente analizar las de primer orden, teniendo en cuenta que las fórmulas de las prolongaciones dadas por (6) son más simples. Además se consideran aquellas que son presentadas en un curso tradicional de ecuaciones diferenciales, para ver acá un enfoque diferente de ellas.

Los métodos para solucionar los sistemas de ecuaciones que resultan del prolongamiento estan fuera del alcance de este trabajo, luego se optará por tomar casos particulares con algunas restricciones, en especial para el prolongamiento del campo vectorial de las ecuaciones de primer orden.

Ejemplo 3. Una ecuación diferencial homogénea tiene la forma

$$u_x = F\left(\frac{u}{x}\right)$$

luego si se hace

$$\Delta = u_x - F\left(\frac{u}{x}\right),$$

al evaluar Δ en la primera prolongación

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}^{(1)}\mathbf{v}(\Delta) &= \left[\xi\frac{\partial}{\partial x}+\phi\frac{\partial}{\partial u}+\left(\phi_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-u_x^2\xi_u\right)\frac{\partial}{\partial u_x}\right]\left[u_x-F\left(\frac{u}{x}\right)\right]\\ &= \xi\frac{u}{x^2}f'-\phi\frac{1}{x}f'+\phi_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-u_x^2\xi_u,\end{aligned}$$

y aplicando el teorema 1 (de invariación local) resulta:

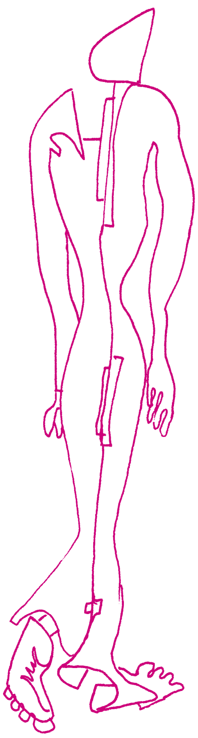
$$\xi\frac{u}{x^2}f'-\phi\frac{1}{x}f'+\phi_x+(\phi_u-\xi_x)f-f^2\xi_u=0 \quad \textit{cuando} \quad \Delta=0$$

Como ‘y no dependen de una función entonces resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\phi_x &= 0 && \textit{(1)}\\ \xi\frac{u}{x^2}-\phi\frac{1}{x} &= 0 && \textit{(2)}\\ \phi_u-\xi_x &= 0 && \textit{(3)}\\ \xi_u &= 0. && \textit{(4)}\end{aligned}$$

De (4) se tiene que ξ no depende u y de (1) se tiene que ϕ no depende x, luego resulta:

$$\begin{aligned}\textit{(2)}\ \frac{u}{x}\xi-\phi &= 0\\ \textit{(3)}\ \phi_u-\xi_x &= 0,\end{aligned}$$



ahora derivando a (3) respecto de u se obtiene:

$\phi_{uu}-\xi_{xu}=0 \rightarrow \phi_{uu}=\xi_{xu}=0$ *luego* $\int\phi_u=\int a$ *y* $\phi=au+b$ *por tanto* (6) $\phi=au+b$ *y reemplazando* (6) *en* (2) *se tiene*

$$\xi=-ax-\frac{bx}{u}.$$

Finalmente derivando respecto a u;

$$\xi_u=\frac{bx}{u^2}=0,$$

como $x\neq 0$ y $u\neq 0$ entonces b = 0 resulta:

$$\begin{aligned}\xi &= -ax\\ \phi &= au+b.\end{aligned}$$

Donde a y b, son parámetros. Se puede considerar una base para el espacio tangente a la variedad solución, al tomar los valores particulares de a y de b según la siguiente tabla:

a	b
1	0
0	1

de la cual resultan los generadores,

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= -x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \ y \\ \mathbf{v_2} &= \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ahora, con los generadores se pueden encontrar las ecuaciones del grupo de simetría, para v1

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= xe^{-p}. \\ \tilde{u} &= ue^{p} \end{aligned}$$

Para v2 resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= p + u, \\ \tilde{x} &= x; \end{aligned}$$

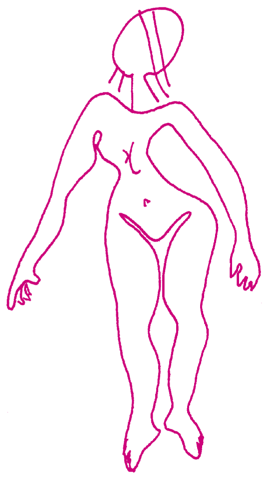
entonces los grupos que admite la ecuación son

$$\begin{aligned} G_1 &= (\tilde{x}, \tilde{u}) = \left(xe^{-p}, ue^{p}\right) \\ G_2 &= (\tilde{x}, \tilde{u}) = (x, u + p) \end{aligned}$$

Lo siguiente es encontrar los invariantes de v_1. Para esto se deben encontrar las funciones y que satisfagan las siguientes condiciones

$$\mathbf{v_1}(\eta) = -x\frac{\partial \eta}{\partial x} + u\frac{\partial \eta}{\partial u} = 0,$$

$$\mathbf{v_1}(\zeta) = -x\frac{\partial \zeta}{\partial x} + u\frac{\partial \zeta}{\partial u} = 1$$



Se desarrolla el sistema característico asociado a cada campo vectorial (Olver, 1993),

$$\frac{dx}{-x} = \frac{du}{u} \textit{ al integrar } -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} + c \textit{ se obtiene:}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln u + c \\ c &= \ln \frac{u}{x} \textit{ luego:} \\ e^c &= \frac{u}{x} \end{aligned}$$

procediendo de la misma manera se encuentra que:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{u}{x}. \\ \zeta &= \ln |x| . \end{aligned}$$

De manera que las funciones η y ζ dejan invariante la ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial ordinaria se puede transformar en otra con un cambio de variable, partiendo de este hecho es que las variables a las que se pretende cambiar, son precisamente los invariantes del grupo admitido por dicha ecuación diferencial, de esta manera se pueden encontrar diferentes soluciones de la ecuación diferencial original.

1.1.1. Transformación de la Ecuación Diferencial con las nuevas coordenadas (η, ζ).

Una ecuación diferencial ordinaria se puede transformar en otra con un cambio de variable, partiendo de este hecho es que las variables a las que se pretende cambiar, son precisamente los invariantes del grupo admitido por dicha ecuación diferencial, de esta manera se pueden encontrar diferentes soluciones de la ecuación diferencial original. Los siguientes ejemplos se desarrollan para ecuaciones obtenidas en (Boyce y Di Prima, 1997).

Ejemplo 4. Si se tiene que la ecuación homogénea $\mathbf{u_x}=\frac{u}{x}+(\frac{u}{x})^2$ que admite el siguiente grupo de simetría

$$G_p(x,u) = (\tilde{x}, \tilde{u}) = (xe^{-p}, ue^p),$$

donde los invariantes son $(\eta, \zeta) = (\frac{u}{x}, \ln|x|)$, entonces despejando x y u de η y ζ se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= e^{\zeta}, \\ u &= \eta e^{\zeta}. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{\eta e^{\zeta} d\zeta + e^{\zeta} d\eta}{e^{\zeta} d\zeta} \\ &= \eta + \frac{d\eta}{d\zeta}\end{aligned}$$

y reemplazando x y u en la ecuación original se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{\eta e^{\zeta}}{e^{\zeta}} + \left(\frac{\eta e^{\zeta}}{e^{\zeta}}\right)^2 \\ &= \eta + \eta^2,\end{aligned}$$

luego

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \eta^2$$

asi que la ecuación transformada con las nuevas coordenadas es:

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{1}{\eta^2}, \ \ de \ donde \ \zeta = -\frac{1}{\eta} + c.$$

Reemplazando por las coordenadas originales resulta :

$$\ln|x| = -\frac{x}{u} + c,$$

la cual también es solución de la ecuación original. Como se comprueba al derivar implícitamente. Utilizando otro grupo que admita la ecuación resulta un proceso similar y se encuentra otra solución de la ecuación.

Ejemplo 5. Se encuentran algunos de los grupos de simetría de la ecuación

$$u_x + 3x^2 u = x^2. \tag{1}$$

Mediante el mismo proceso, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{x}\partial_x, \\ \mathbf{v}_2 &= e^{-x^3}\partial_u\end{aligned}$$

Se puede ver que para v1 los invariantes son $\eta(x,u) = \eta(u)$ y $\zeta(x,u) = \zeta(x) = \frac{1}{2}x^2$, en especial como es cualquier función que depende de ***u*** se puede escoger $\eta(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$: Ahora para el cambio de coordenadas de la ecuación (1) se tiene $\eta = \boldsymbol{u}$ entonces $\boldsymbol{d}\eta = \boldsymbol{du}$ y $\zeta = \zeta\ ½\boldsymbol{x}^2$; luego

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[2]{2\zeta}, \\ dx &= -\frac{1}{\sqrt[2]{2\zeta}}d\zeta, \end{aligned}$$

de lo cual se tiene que la ecuación transformada es:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = -\frac{1}{\sqrt[2]{2\zeta}}2\zeta(1-3\eta) \tag{2}$$

de donde se obtiene la siguiente función que es solución implícita de la ecuación ordinaria (2).

$$-\frac{1}{3}\ln\left(\eta - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt[2]{2}}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} + b.$$

Análogamente se procede cuando se trabaja con otro generador.

Ejemplo 6. Dada la ecuación:

$$u_x = 1 + x^2 - 2xu + u^2 = 1 + (x-u)^2 \tag{3}$$

para encontrar algunos grupos de simetría y posteriormente hallar las funciones invariantes y la ecuación con nuevas coordenadas., se trabaja de igual manera que en los ejemplos 4 y 5.

*en especial como es cualquier función que depende de **u** se puede escoger $\eta(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$: Ahora para el cambio de coordenadas de la ecuación (1) se tiene $\eta = \boldsymbol{u}$ entonces $\boldsymbol{d}\eta = \boldsymbol{du}$ y $\zeta = \zeta\ ½\boldsymbol{x}^2$;*

El campo generador en este caso es:

$$\mathbf{v} = c\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial u},$$

así, las ecuaciones del grupo que admite la ecuación son

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= cp + x,\ y \\ \tilde{u} &= cp + u. \end{aligned}$$

Por tanto $G_1(x, u) = (cp + x, cp + u)$ teniendo en cuenta especialmente cuando c = 1; se pueden encontrar las funciones invariantes. $dx = du \rightarrow x = u +$ c, haciendo c = η, resulta $\eta(x, u) = x - u$: Para encontrar la función ζ, $dx = du = d\zeta$; suponiendo que ζ es independiente de u, $(x) = x$, por tanto

$$(\eta, \zeta) = (x - u, x), \tag{4}$$

despejando de cada función invariante $x = \zeta - c$ y $u = \zeta - \eta - c$, luego

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\zeta - d\eta}{d\zeta} = 1 - \frac{d\eta}{d\zeta}$$

y de la ecuación original se tiene:

$$\frac{du}{dx} = 1 + \zeta^2 - 2\zeta(\zeta - \eta) + (\zeta - \eta)^2 = 1 + \eta^2,$$

asi que $-\frac{d\eta}{d\zeta} = \eta^2$ y resolviendo la ecuación $-\frac{d\eta}{\eta^2} = d\zeta$ se obtiene la solución implícita:

$$\zeta = \frac{1}{\eta} + c_1. \tag{5}$$

Reemplazando ζ y η en (5) por las expresiones en (4) se tiene

$$x + c = \frac{1}{x - u},$$

la cual también es solución de la ecuación (*3*), se puede comprobar derivando implícitamente.

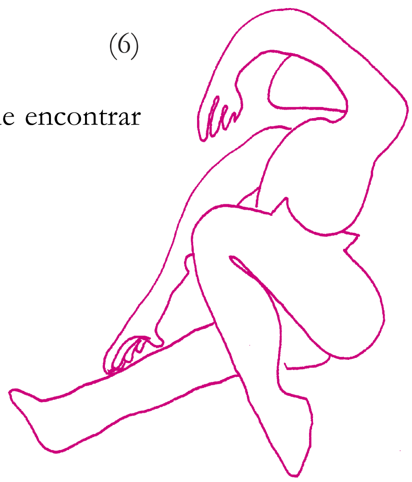
Ejemplo 7. Considérese la ecuación

$$u_x = ru - ku^2, r, k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}. \tag{6}$$

Para esta ecuación se hacen tres consideraciones (a), (b) y (c) con el fín de encontrar algunos de sus grupos de simetría.

(a) Si $\xi = 0$ *y* $\phi_x = 0$, resulta el campo de vectores

$$\mathbf{v} = (ru - ku^2)\, c\frac{\partial}{\partial u},$$



para encontrar las ecuaciones del grupo se resuelve el siguiente sistema asociado

$$\frac{d\tilde{x}}{dp} = 0 \ y \ \frac{d\tilde{u}}{dp} = \left(r\tilde{u} - k\tilde{u}^2\right).$$

Teniendo en cuenta que se cumplan las condiciones iniciales $\tilde{u}(0) = u \ y \ \tilde{x}(0) = x$, entonces la ecuación (6) admite como grupo de simetría a:

$$G_p(x,u) \to \left(x, \frac{rue^{pr}}{r - ku + kue^{pr}}\right).$$

Ahora se procede a encontrar los invariantes (cuando c = 1). Para η se deduce que $\eta(x,u) = \eta(x)$, es decir, cualquier función de x es invariante, en este caso se hace η = x y de

$$\frac{du}{(ru - ku^2)} = d\zeta$$

se tiene

$$\zeta = \frac{1}{r}\ln u - \frac{1}{r}\ln(r - ku). \tag{7}$$

Despejando x y u de los invariantes, y posteriormente reemplazando en (7) se obtiene

$$x = \frac{1}{r}\ln\frac{u}{r - ku} + C$$

Esta última ecuación es una solución implícita de la ecuación (6).

(b) Si se tiene en cuenta ahora las condiciones $\phi = 0 \ y \ \xi_x = 0$,, resulta ξ= c; por tanto el campo de vectores está dado por

$$\mathbf{v} = c\frac{\partial}{\partial x},$$

y las ecuaciones del grupo son $\tilde{u} = u \ y \ \tilde{x} = cp + x$, además los invariantes son

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(u), \\ \zeta &= cx. \end{aligned}$$

y resulta la siguiente solución de la ecuación de Bernoulli (ver Campos, 1992).

$$\frac{1}{r}\ln u - \frac{1}{r}\ln(ku - r) = x + c$$

(c) Dado que (6) también admite el grupo generado por el campo:

$$\mathbf{v} = u^2 e^{-rx}\frac{\partial}{\partial u}$$

se pueden calcular los invariantes y otras soluciones de la ecuación con un proceso similar al utilizado para (a) y (b) (Campos, 1992:79).

Ejemplo 8. Para la ecuación

$$e^x \sin u + e^x \cos(u)\, u_x = 0. \tag{8}$$

Si se considera nula se tiene que $\xi(x) = cte$ ó $\xi(u) = cte$ entonces se satisface la ecuación anterior, en especial si se elige $\xi = 1$ se tiene el siguiente campo de vectores.

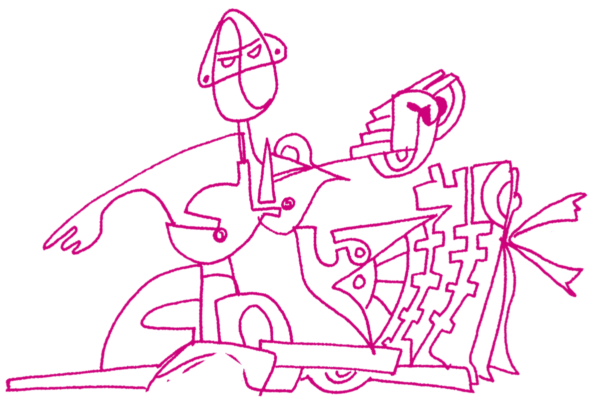
$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$$

donde el grupo de Lie es $G_p(x, u) = (x + p, u)$. Para los invariantes se tiene:

$$\eta = (u),$$

en especial $\eta(u) = u,\ y\ \zeta = x$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\zeta} &= \tan(\eta) \\ -\ln(\sin\eta) &= \zeta + c \end{aligned}$$



haciendo cambio de variables se tiene:

$$\ln(\sin u) = x + c$$

que es una solución implícita de la ecuación exacta (8).

1.2. Ecuaciones de Segundo Orden

Ejemplo 9. Para determinar los grupos de simetría de

$$u_{xx} = 0 \text{ (Ecuación diferencial de la partícula libre),}$$

se utiliza la fórmula de la segunda prolongación y el proceso es similar al que se utilizó para las ecuaciones de primer orden.

$$\mathbf{Pr}^{(2)}\mathbf{v}\Delta=\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})\, u_x + (\phi_u - 2\xi_x)\, u_{xx} - 3\xi_u u_{xx} u_x + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})\, u_x^2 - \xi_{uu} u_x^3,$$

teniendo en cuenta el teorema 1, Pr(2)v(Δ) = 0 si Δ = u_{xx} = 0; reemplazando u_{xx} por 0 resulta un polinomio, que de acuerdo con sus variables y con sus coefientes se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_{xx}, & (9)\\ 0 &= (2\phi_{xu} - \xi_{xx}), & (10)\\ 0 &= (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}), & (11)\\ 0 &= \xi_{uu}. & (12) \end{aligned}$$

Reemplazando en las posibles derivadas que aparecen en el sistema (9)-(12), con el fin de encontrar el menor número de constantes yreemplazando en (10) y (11),

Como las soluciones del sistema (9)-(12) han de ser analíticas, se prueba de forma tentativa con las posibles soluciones de las formas:

$$\begin{aligned} \xi(x,u) &= a_0 + a_1 x + a_2 u + a_3 x^2 + a_4 xu\\ \phi(x,u) &= b_0 + b_1 x + b_2 u + b_4 xu + b_5 u^2 \end{aligned}$$

Reemplazando en las posibles derivadas que aparecen en el sistema (9)-(12), con el fin de encontrar el menor número de constantes y reemplazando en (10) y (11), resulta $b_4 = a_3$ y $b_5 = a_4$,; respectivamente, luego las ecuaciones se pueden escribir así:

$$\begin{aligned}\xi(x,u) &= a_0 + a_1 x + a_2 u + b_4 x^2 + b_5 xu\\ \phi(x,u) &= b_0 + b_1 x + b_2 u + b_4 xu + b_5 u^2\end{aligned}$$

Así que las constantes obtenidas al integrar son a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_4, b_5 y para encontrar los campos vectoriales se considera la siguiente tabla:

a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	b_4	b_5
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1

y por lo tanto los generadores infinitesimales del grupo están dados por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x};\\ \mathbf{v}_2 &= x\frac{\partial}{\partial x};\\ \mathbf{v}_3 &= u\frac{\partial}{\partial x};\\ \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial u};\\ \mathbf{v}_5 &= x\frac{\partial}{\partial u};\\ \mathbf{v}_6 &= u\frac{\partial}{\partial u};\\ \mathbf{v}_7 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u};\\ \mathbf{v}_8 &= xu\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}$$

Ahora, mediante integración se obtienen las ecuaciones respectivas del grupo asociado a cada campo vectorial.

$$\begin{aligned} G_1 &= (p+x,u), G_2 = (\exp(p)\,x,u), \\ G_3 &= (up+x,u), G_4 = (x,p+u), \\ G_5 &= (x,xp+u), G_6 = (x,\exp(p)\,u), \\ G_7 &= \left(\frac{-1}{p-\frac{1}{x}}, \frac{-u}{\left(p-\frac{1}{x}\right)x}\right), \\ G_8 &= \left(\frac{-x}{\left(p-\frac{1}{u}\right)u}, \frac{-1}{p-\frac{1}{u}}\right). \end{aligned}$$

Los respectivos invariantes son:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1(u);\ \zeta_1 = x. \\ \eta_2 &= \ln x;\ \zeta_2 = u. \\ \eta_3 &= x;\ \zeta_3 = \frac{x}{u}. \\ \eta_4 &= x;\ \zeta_4 = u. \\ \eta_5 &= x;\ \zeta_5 = \frac{u}{x}. \\ \eta_6 &= \ln u;\ \zeta_6 = x. \\ \eta_7 &= \frac{u}{x};\ \zeta_7 = \frac{-1}{x}. \\ \eta_8 &= \frac{x}{u};\ \zeta_8 = \frac{-1}{u}. \end{aligned}$$

Las funciones invariantes de los primeros seis grupos no convierten la ecuación en alguna otra mientras que los invariantes del séptimo y octavo campo vectorial la convierten en una ecuación un poco más complicada de solucionar que la original.

Las funciones invariantes de los primeros seis grupos no convierten la ecuación en alguna otra mientras que los invariantes del séptimo y octavo campo vectorial la convierten en una ecuación un poco más complicada de solucionar que la original.

Ejemplo 10. Dada la ecuación

$$x^2 u_{xx} + \alpha x u_x + \beta u = 0, \quad x > 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

(*a*) Si ϕ = cte, $\beta = 0$, $\alpha = 0$ y ξ = cte entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \\
\eta &= x - u, \ \zeta = u
\end{aligned}
$$

(*b*) Si $\phi = 0$, $\beta \neq 0$; $\alpha = 0$ y $\xi =$ cte entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x} \\
\eta &= u, \ \zeta = x \\
\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} &= -\frac{\beta}{x^2}\eta
\end{aligned}
$$

Las funciones invariantes de (*a*) y (*b*) no transforman la ecuación (13).

(c) Si $\phi = u$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$ y $\xi = 0$ entonces

(c) Si $\phi = u$, $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ *y* $\xi = 0$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= u\frac{\partial}{\partial u} \\
\eta &= x, \ \zeta = \ln u \\
0 &= \frac{dy}{d\eta} - \frac{\alpha}{x}y \\
\ln u &= \frac{\alpha}{x}ce^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación es solución de la ecuación diferencial dada, la cual cumple las condiciones del punto (c).

1.2.1. Ecuaciones de Painlevé

$$
\begin{aligned}
(P1)\ u_{xx} &= 6u^2 + x,\\
(P2)\ u_{xx} &= 2u^3 + xu + \alpha,\\
(P3)\ u_{xx} &= \frac{1}{u}u_x^2 - \frac{1}{x}u_x + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u},\\
(P4)\ u_{xx} &= \frac{1}{2u}u_x^2 - \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2\left(x^2 - \alpha\right)u + \frac{\beta}{u},\\
(P5)\ u_{xx} &= \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u_x^2 - \frac{1}{x}u_x - \frac{(u-1)^2}{x^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \frac{\gamma u}{x} + \frac{\delta u\,(u+1)}{u-1},\\
(P6)\ u_{xx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x}\right)u_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x}\right)u_x +\\
&\quad \frac{u\,(u-1)\,(u-x)}{x^2\,(x-1)^2}\left\{\alpha + \frac{\beta x}{u^2} + \frac{\gamma\,(x-1)}{(u-1)^2} + \frac{\delta x\,(x-1)}{(u-x)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de Painlevé solamente admiten al grupo de simetría trivial. Se mostrará este hecho para las ecuaciones P1 y P2:

Ejemplo 11. Para la primera ecuación de Painlevé

$$u_{xx} = 6u^2 + x$$

se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Pr}^{(2)}\mathbf{v}\triangle &= -\xi - 12u\phi + \phi_{xx} + \left(2\phi_{xu} - \xi_{xx}\right)u_x + \left(\phi_u - 2\xi_x\right)u_{xx} - 3\xi_u u_{xx}u_x\\
&\quad + \left(\phi_{uu} - 2\xi_{xu}\right)u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de Painlevé solamente admiten al grupo de simetría trivial.

Reemplazando u_{xx} *por* $6u^2 + x$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\xi - 12u\phi + \phi_{xx} + \left(2\phi_{xu} - \xi_{xx}\right)u_x + \left(\phi_u - 2\xi_x\right)\left(6u^2 + x\right) -\\
&\quad 3\xi_u\left(6u^2 + x\right)u_x + \left(\phi_{uu} - 2\xi_{xu}\right)u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3
\end{aligned}
$$

es un polinomio y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\xi - 12u\phi + \phi_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x)\left(6u^2 + x\right) \\
0 &= (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) - 3\xi_u\left(6u^2 + x\right) \\
0 &= (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) \\
0 &= -\xi_{uu}
\end{aligned}
$$

cuya solución es:

$$
\begin{aligned}
\phi &= 0 \\
\xi &= 0.
\end{aligned}
$$

y por tanto la ecuación admite únicamente al campo vector nulo.

Ejemplo 12. Si para la segunda ecuación de Painlevé;

$$u_{xx} - 2u^3 - xu - \alpha = 0$$

se realiza el proceso inmediatamente anterior, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
0 &= -u\xi - \phi\,(6u + x) + \phi_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x)\left(2u^3 + xu + \alpha\right) \\
0 &= (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) - 3\xi_u\left(2u^3 + xu + \alpha\right) \\
0 &= \phi_{uu} - 2\xi_{xu} \\
0 &= -\xi_{uu},
\end{aligned}
$$

que al resolverlo arroja como resultado

$$
\begin{aligned}
\phi &= 0 \\
\xi &= 0.
\end{aligned}
$$

Es decir, la ecuación solo admite al grupo trivial.

En las EDO de tercer orden, el proceso es análogo al de las anteriores tipos de ecuaciones sólo que se utiliza la tercera prolongación para hallar los coeficientes del generador.

1.3 Ecuaciones de Tercer Orden

En las EDO de tercer orden, el proceso es análogo al de los anteriores tipos de ecuaciones sólo que se utiliza la tercera prolongación para hallar los coeficientes del generador.

Ejemplo 13. En este caso se hallarán los grupos de simetría para la ecuación de Blasius Prandtl

$$u_{xxx} + \frac{1}{2} u_{xx} u = 0.$$

Se calcula Pr(3)v y allí se reeamplaza u_{xxx} *por* $-\frac{1}{2} u_{xx} u$ cada vez que aparezca de donde se obtiene un polinomio, del cual se obtienetiene el siguiente sistema de ecuaciones:

N_0.	*Variable*	*Coeficiente*
1	*1*	$\phi_{xx} u + 2\phi_{xxx}$
2	u_x	$(2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u + 2(3\phi_{xxu} - \xi_{xxx})$
3	u_{xx}	$\phi + (\phi_u - 2\xi_x) u + 2(3\phi_{xu} - 3\xi_{xx}) + (-\phi_u + 3\xi_x) u$
4	u_x^2	$(\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u + 2(3\phi_{xuu} - 3\xi_{xxu})$
5	$u_{xx} u_x$	$2(3\phi_{uu} - 9\xi_{xu}) + \xi_u u$
6	u_{xx}^2	$-6\xi_u$
7	u_x^3	$-\xi_{uu} u + 2(\phi_{uuu} - 3\xi_{uxu})$
8	$u_x^2 u_{xx}$	$-12\xi_{uu}$
9	u_x^4	$-2\xi_{uuu}$

Es necesario que cada uno de los coeficientes sea cero; obviando las ecuaciones que no son necesarias resulta el siguente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_{xx} u + 2\phi_{xxx} && \textit{(1)} \\
0 &= (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u + 2(3\phi_{xxu} - \xi_{xxx}) && \textit{(2)} \\
0 &= \phi + \xi_x u + 6(\phi_{xu} - \xi_{xx}) && \textit{(3)} \\
0 &= \phi_{uu} u + 6\phi_{xuu} && \textit{(4)} \\
0 &= 6\phi_{uu} && \textit{(5)} \\
0 &= 2\phi_{uuu} && \textit{(7)}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a

$$\begin{aligned}
\xi &= a_0 + a_1 x, \\
\phi &= -a_1 u.
\end{aligned}$$

Ahora, para encontrar los generadores infinitesimales de los grupos de simetría se realiza la tabla

a_0	a_1
1	0
0	1

y se obtienen entonces los siguientes generadores:

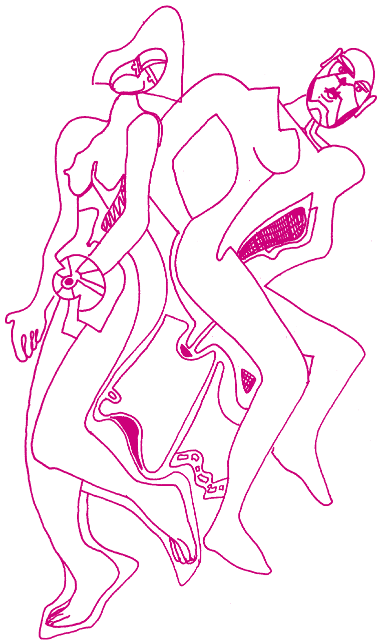
$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
\mathbf{v}_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}
$$

Así los grupos de simetría que admite la ecuación de Brasius Prandtl son:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (p + x, u)\,, \text{ y} \\
G_2 &= \left(e^{p}x, e^{-p}u\right),
\end{aligned}
$$

y por lo tanto los invariantes son:

$$
\begin{aligned}
\eta &= xu, \\
\zeta &= \ln x.
\end{aligned}
$$



Referencias

[1] CAMPOS, Alberto (1992): Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie. Bogotá: Unibiblos.

[2] BLUMAN, George, and, KUMEI Sukeyuki (1989). Symetries and di£erential equations. Springer Verlag, New York.

[3] CLARKSON, Peter (2005): The Painlevé Equations-Nonlinear Special Functions. Institute of Mathamatics & Statistics. University of Kent at Canterbury. Canterbury.

[4] Ecuación de Riccati en teoría de grupos de Lie y Teoría de Galois. Proyecto de Investigación. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. (Trabajos no publicados).

[5] FARO, Ricardo (2003): Apuntes de Grupos de Lie.

[6] OLVER, Peter (1993): Aplications of Lie Groups to Di£erential Equations. Springer-Verlag.

[7] BOYCE, William & DIPRIMA Richard (1997): Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. 3 ed, Limusa.

[8] GÓMEZ, Flor & HUEZA, Roger (2007): Solución de Algunas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Mediante sus Grupos de Simetría. Trabajo de grado (Licenciatura en Matemáticas. Escuela de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de ciencias de la Educación, UPTC.