Apuntes históricos de la lógica matemática*

Historical Notes about Mathematic Logic

Alfonso Jiménez Espinosa**
Profesor titular de la Escuela de Matemáticas y Estadística, Uptc.
Johann Verney Méndez Gamba***
Ex alumno de la Licenciatura en Matemáticas, Uptc. Grupo de Investigación PIRAMIDE

Recepción: 20/05/2008
Evaluación: 20/06/2008
Aceptación: 09/09/2008

Articulo de investigación proyecto de investigación formación de profesores de matematicas el caso de la uptc grupo de investigación pirámide.

Resumen

Entrega elementos de la historia de la lógica y su consolidación como fundamento de la demostración en matemáticas. Se identifican cuatro etapas o periodos, más o menos bien definidos, por los que se considera ha pasado esta disciplina, de acuerdo con algunas características particulares. La primera es llamada aristotélica, por ser justamente Aristóteles quien logra condensar varios trabajos de predecesores y contemporáneos; se caracteriza por su concreción en razonamientos llamados silogismos; el trabajo de este pensador se condensa en el *Organon*. La segunda puede denominarse como de los Estoicos y los Megáricos, dos escuelas griegas cuyo principal aporte consistió en el trabajo con las proposiciones y el desarrollo de los conectivos y sus equivalencias. Posteriormente aparece la etapa de la lógica simbólica, con los trabajos de Pedro Hispano, con la introducción de los cuantificadores, y de Leibniz, quien dedicó parte de su tiempo a intentar crear un cálculo proposicional, que finaliza con los trabajos de Euler y de Venn para la representación de proposiciones a través de diagramas. La última etapa, la de la creación del álgebra matemática de Boole, marca lo que se ha denominado

* *Algunas notas de este artículo son resultado de la monografía «Estudio histórico sobre la desarrollo de la lógica», presentado por el segundo de los autores y bajo la dirección del otro autor.*

** *Profesor de la faculta de ciencias y facultad de educación. Licenciado en matemáticas Uptc Especialista en matemática avanzada Unal Maestría en educación pedagógica nacional Doctorado en educación matemática universidad estatal de Campinas sao Paulo Brasil*

*** *Licenciado en Matemáticas. Uptc Profesor educación básica y media*

el paso de la lógica medieval a la lógica de Boole. Históricamente lo que viene a continuación se caracteriza por el renacimiento de la formalización rigurosa de las matemáticas, que en la etapa clásica griega fue representativa. En este periodo se enfatiza en la lógica simbólica, la lógica formal, la lógica booleana, el cálculo proposicional y la inducción matemática. Personajes muy notables de esta etapa son: Peano, Hilbert, Frege, De Morgan, Gentzen, Russell, Whitehead y Gödel, a los que se deben los planteamientos de las limitantes de la lógica y de la ciencia en general para afirmar verdades absolutas.

Palabras clave: Lógica, Matemáticas, Silogismo, Proposición, Lógica simbólica,

Abstract

It gives elements of the history about Logic and its consolidation as the foundation of the demonstration in Mathematics. Four stages or periods are identified, more or less well defined, this discipline has gone through in accordance with some particular characteristics.

The first one is called Aristotelian, for being exactly Aristotle, who is able to condense several works of predecessors and contemporaries, characterized by his concretion in ways of reasoning called syllogisms. The work of this thinker becomes condensed in the Organon. The second one, it can be named the Estoic and the Megaric, two Greek schools which their main contribution consisted in the work with the propositions and the development of the connective elements and their equivalents. Later another stage appears, the symbolic logic, with Pedro Hispano's job who introduces the quantifiers and Leibniz who dedicated part of his time trying to create a propositional calculation, which ends with Euler and Venn's works who accomplished the representation of propositions through diagrams. The last stage is about the creation of the math algebra by Boole, marks what has been named as the path of the medieval logic to the Boole logic.

Historically, which comes next is characterized by the renaissance of the rigorous formalization of mathematics, which in the classic Greek stage was representative. In this period it emphasizes the symbolic logic, the formal logic, the boolean logic, the propositional calculus and the maths induction. Famous personages of this stage are: Peano, Hilbert, Frege, De Morgan, Gentzen, Russell, Whitehead and Godel, to whom it is owed the expositions of the logic limits and that of the science in general to affirm the absolute truths.

Key Words: Logic, Mathematics, Syllogism, Proposition, Symbolic Logic.

La lógica aristotélica

La evolución de la demostración en matemáticas está estrechamente ligada al desarrollo de este campo del conocimiento; específicamente, la rama que se ocupa de estudiar los diferentes tipos de razonamiento es la lógica. Para entender mejor el papel que juega la lógica en la demostración en matemática es preciso conocer su evolución, y para esto nada más adecuado que conocer el origen y el tiempo en el que se empezaba a dar la lógica como ciencia.

Claramente se puede establecer que el primer personaje en tratar de configurar algunos de los diferentes tipos de razonamiento es el filósofo griego Aristóteles (384-322 a.c.), lo que lo acredita como el fundador de la lógica. Pero ¿qué lo impulsó a pensar en organizar algunos de los diferentes tipos de argumentación? En esto tienen gran influencia pensadores de la talla de Parménides y Zenón de Elea (490-430 a.c.) a quienes se les atribuye el uso de la demostración por reducción al absurdo; Zenón perfeccionó el método de reducción al absurdo utilizado por su maestro Parménides; Zenón «utilizaba para demostrar un método indirecto, así: probaba a través de la reducción al absurdo, es decir, comienza por aceptar como verdaderas premisas desde las cuales se infieren conclusiones mutuamente contradictorias y, por ende, la conclusión será que las premisas supuestas son falsas» (Perazzo, 1983). Zenón es reconocido por dar argumentos que contradicen la existencia de la multiplicidad (pluralidad), el espacio, la percepción sensible y el movimiento (demuestra la no existencia del movimiento a través de cuatro argumentos conocidos como: Dicotomía, Aquiles y la tortuga, la flecha y el estadio), estos argumentos son denominados paradojas, las cuales, aún en nuestros días, son foco de discusión. Por ejemplo, el argumento de 'Aquiles y la tortuga' narra el hecho de que un corredor nunca podrá alcanzar a su adversario, aunque este lleve una menor velocidad, pues siempre entre los dos corredores habrá una distancia, por más pequeña que sea. Basándose en esto Zenón admite la no existencia del movimiento. El enunciado de esta paradoja es el siguiente:

> Si el movimiento existe, lo más lento nunca será alcanzado por lo más rápido. Pero como esto es imposible, el movimiento no existe... Aquiles no puede dar alcance a la tortuga que persigue, pues es necesario que el perseguidor, antes de alcanzar la meta, llegue primero al lugar del cual partió el que huye. Pero cuando el perseguidor llegue a este punto, el que huye avanzó una cierta distancia, si bien esta es menor que la que recorrió el perseguidor, que es más veloz. ... Por el hecho de suponer distancias cada vez menores hasta el infinito, a causa de la división de las magnitudes hasta el infinito, no sólo Héctor no será alcanzado por Aquiles; tampoco lo será una tortuga... Mientras que una décima parte de cualquier distancia, la tortuga estará siempre adelante de Aquiles, y jamás ninguno de los dos podrá recorrer la totalidad (Campos, 1994).

Claramente se puede establecer que el primer personaje en tratar de configurar algunos de los diferentes tipos de razonamiento es el filósofo griego Aristóteles (384-322 a.c.), lo que lo acredita como el fundador de la lógica.

Zenón de Elea se valió de principios establecidos por él mismo, *«formuló algunas reglas dialécticas, pero sin elevarse nunca al concepto de <<ley>> lógica, como estructura formal de carácter universal y necesario»* (Agazzi, 1973).

Las argumentaciones de filósofos como Zenón, Parménides de Elea y otros incentivaron a Aristóteles a formalizar algunos de los diferentes tipos de razonamientos, uno de cuyos fines fue encontrar las posibles fallas en las argumentaciones, como la anteriormente expuesta y demás presentadas en aquel tiempo. El trabajo de Aristóteles está constituido por cinco tratados, a cuya reunión se le llamó *Organon*;

> el primer tratado se titula Categorías y se ocupa principalmente de las diversas clases de objetos que pueden actuar como sujetos o predicados en una proposición. A esto, que constituye una teoría de los términos, sigue una teoría de la proposición, estudiada en el De interpretatione, que contiene una discusión casi exhaustiva de las categorías sintácticas del discurso, además de ciertos principios más generales de la lógica aristotélica (por ejemplo, el principio del tercio excluso)[1]. Siguen luego los Primeros Analíticos, que se ocupan, como tema principal, de la teoría de la deducción y desarrollan, en especial, la famosa silogística aristotélica. Los Segundos Analíticos tratan, en cambio, no ya de la técnica deductiva, sino más bien de las condiciones que deben satisfacer las proposiciones iniciales de las demostraciones para que haya verdadera ciencia, de modo que contiene la exposición más sistemática de la teoría aristotélica de la ciencia y de la consideración del método axiomático en su versión clásica. Los Tópicos constituyen una especie de colección de reglas prácticas y de esquemas típicos de demostración, con lo que vienen a responder a la necesidad que tratan de satisfacer los <<ejercicios>> de cualquier manual, es decir, la de hacer adquirir cierta práctica en el manejo de los procedimientos fundamentales para la resolución de problemas concretos a los principiantes de una cierta disciplina. Las Refutaciones Sofísticas son, por último, una especie de apéndice de los Tópicos y están dedicadas al arte de descubrir las falsas sutilezas de razonamiento (Agazzi, 1973).

Uno de los temas que tienen gran importancia y que es de uso frecuente en el desarrollo de la lógica aristotélica es la conversión de premisas, tema que se estudia en el escrito de la interpretación (*De interpretatione*); en este tratado se hace la exposición de qué es para Aristóteles un nombre, un verbo y, a continuación, una negación, una afirmación, una declaración y un enunciado. Volviendo al tema acerca de la conversión de premisas, Aristóteles invierte los términos en las proposiciones, por ejemplo, aquellas proposiciones en las que una cosa en ninguna otra se da, se pueden invertir al decir que esta otra cosa se dará en ninguna de las primeras cosas, esto se ilustra de la siguiente manera: *ningún hombre es mujer;* la forma como se invierten los términos de esta proposición, teniendo una nueva proposición, en este caso equivalente, es: *ninguna mujer es hombre*, el siguiente cuadro muestra las conversiones dadas en el tratado:

[1] *Este principio indica que una proposición no puede ser a la vez falsa y verdadera, sino estrictamente alguna de las dos.*

Proposición	Conversión[2]
A se da en ningún B	B se da en ningún A
A se da en todo B	B se da en algún A
A se da en algún B	B se da en algún A

Así mismo, Aristóteles hace énfasis en que la negación de una premisa es una sola, además, se opone contradictoriamente a la premisa. En el caso de los cuantificadores y sus negaciones se darán los siguientes ejemplos para comprender dicha cuestión:

Cuantificador	Negación
Todo hombre **es** bueno	**Algún** hombre **no es** bueno
Ningún hombre **es** bueno	**Algún** hombre **es** bueno
Algún hombre **es** bueno	**Ningún** hombre **es** bueno

Principalmente con este par de cuestiones, Aristóteles se dispuso a configurar lo que hoy conocemos como *silogismo*, del cual estableció tres formas válidas que luego, posiblemente gracias a Teodofrasto (Méndez y Angarita, 2007), sumaron cuatro formas en total, las cuales se enuncian así:

Primera figura. Aristóteles la denomina razonamiento perfecto, y la enuncia así: *«cuando tres términos se relacionan entre sí de tal manera que el último esté contenido en el conjunto del término medio y el término medio esté o no esté contenido en el conjunto del término primero, habrá necesariamente razonamiento»* (Aristóteles, 1995).

Segunda figura. Se da así: *«cuando se da, por una parte, en cada uno y, por otra, en ninguno, o cuando en ambos casos se da en cada una o en ninguna, llamó medio al predicado de ambas proposiciones y extremos a aquellos de los cuales se dice éste»* (Aristóteles, 1995).

Tercera figura. Aristóteles la enuncia así: *«Si, respecto a la misma cosa, una se da en ella en todos los casos y otra en ninguno, o ambas en todos o en ningún caso, llamó a ésta la tercera figura, y llamó en ella medio a aquel término acerca del cual se dicen ambos predicados. Así pues tampoco en esta figura se produce razonamiento perfecto, pero será posible tanto si los términos se relacionan de manera universal como no universal con el medio»* (Aristóteles, 1995).

Cuarta figura[3]**.** Surge de lo que se conoció en el Tratado de la Interpretación como los modos indirectos de las tres figuras; da claridad acerca del caso en el que las premisas una es afirmativa y la otra negativa, *«al tomar la negativa como universal, siempre se produce razonamiento del extremo menor con el extremo mayor»* (Aristóteles, 1995). Es decir, tomando como predicado de la conclusión al extremo menor, y por sujeto al mayor o de mayor extensión[4]; «por ello se les llama a estas variantes *modos indirectos*» (Aristóteles, 1995), y son los que dieron luego pie a esta figura.

Para cada figura existen unos modos válidos de razonamiento, que suman en total 19. Con esto Aristóteles constituyó el primer sistema lógico conocido, y por esto es denominado el Padre de la Lógica. Más tarde, hacia el siglo II a.c., la escuela estoica crearía una nueva serie de silogismos, que no dependen de un término medio, sino de proposiciones, lo que hace que estos razonamientos disten completamente de los aristotélicos; estos nuevos silogismos son los que hoy conocemos como las reglas de inferencia (Méndez y Angarita, 2007).

[2] *Estas conversiones han sido catalogadas en dos tipos: las filas primera y tercera denominadas por conversión simple, puesto que permanece la misma cantidad; la fila segunda denominada como conversión per accidens, en este caso cambia la cantidad*

[3] *Según J. Holthoefer: «la cuarta figura, estrictamente hablando, no es aristotélica; fue añadida por Teodofrasto, discípulo de Aristóteles, al desarrollar cinco modos indirectos a la primera figura. Se duda si Teodofrasto se limitó a sistematizar y ordenar la obra aristotélica, quedando esta figura como aristotélica, o si, por el contrario, la aparición de esta figura se debe a su actividad reflexiva».*

[4] *Esto ocurre al contrario que en las tres formas figuras vistas, donde el término mayor es predicado del menor*

La lógica de los estoicos y los megáricos

Principalmente los estoicos y los megáricos, dos escuelas filosóficas griegas, observaron que no todos los razonamientos podían llevarse a la forma del silogismo aristotélico, y por esto se dedicaron a estudiar lo que comprende la conexión entre proposiciones (conectivos y, o, si… entonces…) y las relaciones que guardan entre sí. Quien estudió principalmente estas relaciones fue el estoico Crisipo (280-208/204 a.c.), que se ocupó de las argumentaciones con enunciados compuestos; él reconoció los siguientes cinco tipos de razonamientos[5]:

1) Si lo primero entonces lo segundo (**p → q**)[6], se da lo primero (**p**), luego se da lo segundo (**q**) [«Este silogismo se conoció en la Edad Media como *modus ponens*» (Méndez y Angarita, 2007)]. Ejemplo: Si es boyacense es colombiano. Pero es boyacense. Luego es colombiano.

2) Si lo primero entonces lo segundo (**p → q**), no se da lo segundo (**→ q**), luego no se da lo primero (”# **p**). [«Este es el famoso silogismo bautizado como *modus tollens*» (Méndez y Angarita, 2007)]. Ejemplo: Si es boyacense es colombiano. Pero no es colombiano. Luego no es boyacense.

3) No: lo primero y lo segundo (**”# (p ‘« q)**)[7], se da lo primero (**p**), luego no se da lo segundo (”# **q**). O si se da lo segundo (**q**), no ha de darse lo primero (”# **p**). Ejemplo: **No**: es de día y es de noche. Pero es de día. Luego no es de noche. Obsérvese cómo, en el lenguaje actual de la lógica formal, dadas las premisas **”# (p ‘« q)**) y (**p**), se requiere de la Ley de Morgan y de la ley del Modos Tolendo Ponens para deducir a (”# **q**) en el primer caso. Igualmente para deducir a en el (”# **p**).

4) O lo primero o lo segundo (**p »» q**)[8], pero no ambas, se da lo primero (**p**), luego no se da lo segundo (”# **q**). Ejemplo: O es de día o es de noche. Pero es de día. Luego no es de noche.

5) O lo primero o lo segundo (**p »» q**), pero no ambas, no se da lo primero (”# **p**), luego se da lo segundo (**q**). Ejemplo: O es de día o es de noche. Pero no es de noche. Luego es de día.

Estos esquemas de razonamientos son siempre válidos, pero no siempre son verdaderos, ya que son verdaderos solamente cuando la premisa es verdadera, es decir, corresponde a la situación de hecho o actual. Sin embargo, en el trabajo en lógica siempre se asumen las premisas como verdaderas.

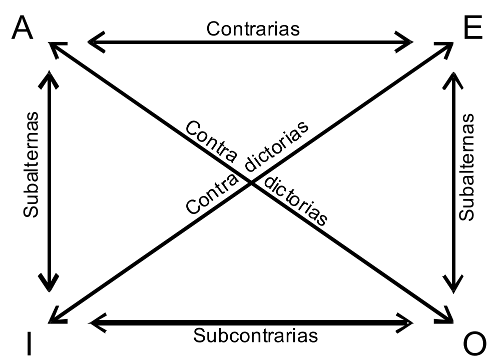
Otro hallazgo importante de los estoicos está en expresar razonamientos en términos de otros. Es así como ocurre por ejemplo con el condicional **p ’! q** que equivaldría a **”# (p ‘« (”#q))** o también a **”# p** («[9]**q**. En el lenguaje actual la equivalencia es una tautología.

Con esto, tanto Aristóteles como estoicos y megáricos constituyeron las principales formas de argumentación.

[5] *Cfr. CAMPOS, Alberto. Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides. Universidad Nacional. Bogotá, 1994.*
[6] *Condicional*
[7] *Disyunción incompatible*
[8] *Disyunción exclusiva*
[9] *Disyunción inclusiva*

Otro personaje que realizó un aporte significativo en el campo de la demostración en la rama de la lógica fue Euclides (300 a.c.), con su método de análisis–síntesis, que se explica de la siguiente manera: *«Saca conclusiones una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa, si llegas a una conjetura indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera (análisis). En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso; desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito habrás probado tu conjetura (síntesis). Esta regla pone de manifiesto por qué los griegos tenían en gran estima la reducción al absurdo: les ahorraba el trabajo de la síntesis, habiendo probado el caso solo con el análisis»* (Lakatos, 1981).

Según los recuentos históricos, pasaron siglos en los cuales no hubo personajes importantes en el campo de la lógica que hicieran aportes relevantes, pero sí se puede hacer mención de algunos, como el caso de Apuleyo, quien en su *De Philosophia Rationali* se interesa por las relaciones entre las cuatro proposiciones clásicas (premisas), divididas en universales, particulares, singulares e indefinidas. En su trabajo se encuentra lo siguiente: *«Una proposición es universal cuando el predicado es atribuido o negado con respecto a todos los entes abarcados por el sujeto: <todos los hombres (o: ningún hombre) son filósofos>. Tenemos una proposición singular cuando el predicado se afirma o se niega de un solo individuo: <Juan es filósofo>. Una proposición particular es aquella en la que el predicado se atribuye o se niega sólo de algunos de los entes abarcados por el sujeto: <algunos hombres (o: no) son filósofos>. En la proposición indefinida el predicado se atribuye o se niega de un sujeto, pero sin precisar a cuántos individuos se hace referencia: <el tren corre>»* (avizora.com). Apuleyo fue el primero en trabajar en lo que hoy conocemos como el cuadro clásico de la oposición. El primer esbozo realizado por Apuleyo fue luego mejorado por Boecio (480-524), quien finalmente completó el cuadro. Por último, este esquema tuvo un pequeño cambio hecho por el portugués Pedro Hispano (1205–1277), quien indicaría mediante letras las cuatro proposiciones clásicas, colocando de manera oportuna las formas normales de las proposiciones categóricas; así se obtiene el clásico cuadrado de la oposición (Avizora.com):



El cuadrado tradicional ofrece la base lógica para un número considerable de inferencias inmediatas, algunas de las cuales son:

- Si A es verdadera: E es falsa, I es verdadera, O es falsa
- Si E es verdadera: A es falsa, I es falsa, O es verdadera
- Si I es verdadera: E es falsa, A y O son indeterminadas.

Según los recuentos históricos, pasaron siglos en los cuales no hubo personajes importantes en el campo de la lógica que hicieran aportes relevantes

Como se ha hecho mención, Pedro Hispano hizo aportes al cuadro de la oposición, pero esto no fue lo único, su verdadera y más importante participación en el desarrollo de la Lógica está en las conocidas reglas nemotécnicas, que indican los modos del silogismo Aristotélico. Se presentan a continuación algunos modos del silogismo:

1ª FIGURA	2ª FIGURA	3ª FIGURA	4ª FIGURA
Barbara	**Cesare**	**Disamis**	**Fesapo**
Todo M es P	Ningún P es M	Algún M es P	Ningún P es M
Todo S es M	Todo S es M	Todo M es S	Todo M es S
Todo S es P	Ningún S es P	Algún S es P	Algún S no es P

En estas reglas cada vocal representa el tipo de proposición correspondiente. Así mismo, a las letras también se les ha asignado un significado, que va de la siguiente manera (www.ehu.es):

· La consonante inicial de cada fórmula indica que el modo ha de ser reducido a uno de los cuatro primeros modos (primera figura), a saber, aquel cuya inicial coincida con la del modo a reducir. Así, los modos que empiezan con B (Baroco, Bocardo, Bramantip) se pueden reducir al modo Barbara, de la primera; los modos que empiezan con C (Cesare, Camestres, Camenes) son reductibles al modo Celarent de la primera, y así respectivamente.

- La *s* que aparezca inmediatamente a continuación de una vocal indicará que la proposición correspondiente ha de ser convertida por conversión simple en el curso de la reducción.
- Cuando sea *p* la letra que figure en tal posición, la proposición en cuestión habrá de convertirse parcialmente o *per accidens*.
- Una *m* entre las dos primeras vocales de la fórmula sirve para indicar que las premisas habrán de transponerse.
- Finalmente, la *c* tras una de las dos primeras vocales indicará que la premisa de que se trata ha de ser reemplazada por su negación en orden a facilitar la reducción *per impossibile* del modo.

Por ejemplo, dadas las premisas: *Todo niño es humano* y *ningún humano es piedra*, se tiene que *ninguna piedra es niño*. Claramente se trata de la regla nemotécnica Camenes, ya que sus premisas iniciales son del tipo A y E, respectivamente; la letra C nos indica que el silogismo ha de reducirse al modo Celarent de la primera figura; la m indica la transposición de las premisas iniciales, es decir, *ningún humano es piedra* y *todo niño es humano;* como la conclusión de este razonamiento es *ningún niño es piedra*, la s finalmente indica que la conclusión del razonamiento original se convierte por conversión simple, para llegar así al modo Celarent.

Con Pedro Hispano ya empezaba a vislumbrarse una simbolización de la lógica; en este aspecto, Leibniz (1646-1716) fue más adelante,

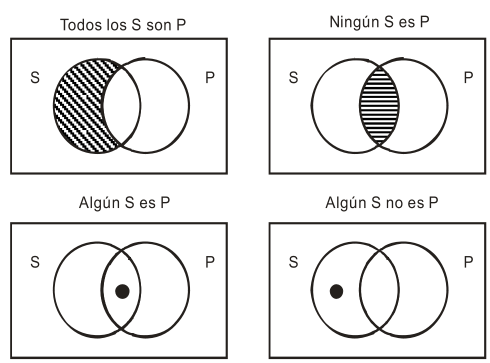
Periodo de la lógica simbólica

Con Pedro Hispano ya empezaba a vislumbrarse una simbolización de la lógica; en este aspecto, Leibniz (1646-1716) fue más adelante, pues no solo buscó una simbolización, sino que pensó en un cálculo con el cual fuese posible justificar toda clase de razonamientos. *«Leibniz imaginó la posibilidad de una <característica universal o tipo de matemáticas universales> en las que un <cálculo de razonamiento> expresado en un simbolismo eficaz sujeto a reglas adecuadas de combinación elaboradas de una vez para siempre, guiarían a la razón»* (Agazzi, 1973).

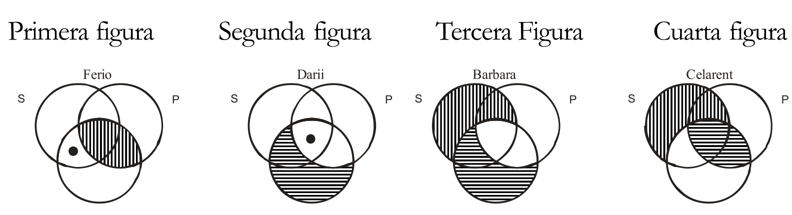
Leibniz era *«un gran admirador de la silogística aristotélica, aunque no creía que todos los argumentos pudiesen ponerse en forma de silogismo; por ejemplo: los argumentos por inversión de la relación, como <Tito es más alto que Cayo>, por tanto, <Cayo es más bajo que Tito>. Sostuvo también que las figuras de los silogismos no son tres, sino cuatro, obteniéndose entonces veinticuatro, y no catorce, formas de silogismo válidos»*

Entre 1679 y finales de ese siglo, Leibniz dedicó parte de su tiempo a intentar crear una lógica simbólica: *«Enunció en la primera terminología corriente las propiedades de la adición y la multiplicación de la lógica, la negación, la clase nula y la inclusión de clases, y análogamente indicó la semejanza (identidad abstracta) de ciertas propiedades de inclusión de clases y lo que implican para las proposiciones»* (Bell, 2002). Los trabajos de Leibniz lo acreditan como el fundador de la Lógica Matemática.

Ahora bien, para ayudar a la intuición de los razonamientos hubo diversos intentos de ilustración. Entre estos están los conocidos diagramas de Leonard Euler (1707-1783) y los de John Venn (1834-1923). Entre las ideas de estos dos personajes se han configurado ilustraciones (círculos u otras figuras) que representan conjuntos, una parte rayada que indica los elementos que no interesan en la explicación y puntos que significan las partes de las áreas que representaban clases no vacías. Hoy se usan esos diagramas conservando la idea original, pero con algunas variantes. Con los diagramas de Venn–Euler, los cuatro tipos de proposiciones quedan así:



La manera como quedan ilustrados algunos de los modos del silogismo aristotélico mediante los diagramas de Venn–Euler es:



Entre 1679 y finales de ese siglo, Leibniz dedicó parte de su tiempo a intentar crear una lógica simbólica

Estos diagramas pueden considerarse ilustraciones de la teoría de la extensión mediante la que George Boole (1815-1864) justificaba sus diversos procedimientos de cálculo, pues en este aspecto fue él quien, al fin, y de una vez por todas, estrechó el vínculo entre la Lógica y la Matemática a través de su configuración del cálculo lógico en dos partes. Históricamente se dice que la lógica simbólica nació *«decididamente con el importantísimo folleto de 82 páginas de Boole, The Mathematical Analysis of Logic Being and Essay Toward a Calculus of Deductive Reasonin, 1847»* (Bell, 2002).

Periodo de la lógica matemática

Como se ha hecho mención, George Boole configuró su Lógica Matemática en dos partes, una de ellas denominada **lógica de las proposiciones primarias,** que solo se ocupa de los razonamientos de tipo aristotélico. El desarrollo de esta lógica se basa en que a cada clase de objetos puede atribuírsele una letra; por decir, x corresponde a la clase de las ovejas. Dado esto pensó en que si y representaba la clase de los objetos blancos, xy habría de representar a la clase de ovejas blancas, esto es lo que se conoce como producto lógico; análogamente definió la suma lógica, entonces $x + y$ representará la clase de las ovejas junto con la clase de los objetos blancos. El 1 (uno) lo definió como el *universo del discurso*, 1 representa el Universo, que lo entenderemos como comprendiendo toda clase concebible de objetos; en este caso el 0 (cero) representa el conjunto al que nada pertenece, es decir, el conjunto vacío (Méndez y Angarita, 2007).

Para ocuparse de los razonamientos del tipo de las reglas de inferencia configuró el segundo cálculo, conocido como lógica de las proposiciones secundarias;

Para ocuparse de los razonamientos del tipo de las reglas de inferencia configuró el segundo cálculo, conocido como **lógica de las proposiciones secundarias;** en este caso Boole utilizó las ecuaciones X = 1 para indicar que la proposición X es verdadera; así mismo, utilizó la ecuación X = 0 para indicar que X es falsa.

Boole distingue entre los símbolos X y x. Él dice que

> mediante 'X' designamos una proposición de tal forma que podemos decir cosas tales como: X es verdadera (o falsa), x denota el tiempo para el cual la proposición X es verdadera. Llamaremos a x el símbolo representativo de la proposición X. 0 representa nada con referencia al tiempo, mientras que 1 representa la totalidad del tiempo, a la cual se supone que el discurso de alguna manera se refiere. También, en este caso, tiene Boole una concepción limitada del universo del discurso: ... del mismo modo, en las proposiciones secundarias el universo del discurso puede estar limitado a un sólo día o al momento que pasa, o puede comprender la duración total del tiempo *(www.ehu.es)*.

Ahora bien, *«la operación producto xy selecciona los instantes temporales en los que X e Y son ambas verdaderas»* (www.avizora.com). Boole escribía la ecuación «**XY = 1** *para representar 'X e*

Y'. Esto funciona porque X e Y es verdadero precisamente cuando X e Y son ambas verdaderas, mientras que algebraicamente, XY = 1 si X = Y = 1, pero XY = 0 cuando o bien X = 0 o bien Y = 0 (o ambas cosas)» (www.ehu.es).

Para este caso, Boole enuncia la adición así: *«x+y es el agregado de aquellas porciones de tiempo en las que X e Y son verdaderas, estando estos tiempos enteramente separados uno del otro»* (www.ehu.es). De la misma manera, la diferencia tiene la siguiente definición: *«x – y es el resto del tiempo que queda cuando quitamos de la porción del tiempo para la que X es verdadera, aquella parte (por suposición) incluida para la que Y es verdadera»* (www.ehu.es).

Un aspecto importante de la lógica de Boole está en las propiedades que cumplen las operaciones definidas, suma y producto lógico, algunas de las cuales son:

- **Conmutativa**
- **Asociativa**
- **Distributiva** respecto a la primera función: $(x + y)z = xz + yz$
- **Distributiva** respecto a la segunda función: $(xy) + z = (x + z)(y + z)$
- **Identidad** respecto a la primera función: $x + 0 = x$
- **Identidad** respecto a la segunda función: $x1 = x$
- **Idempotente (**$x + x = x$, $xx = x$)
- **Ley de Morgan** respecto a la primera función: $(x + y)' = x'y'$
- **Ley de Morgan** respecto a la segunda función: $(xy)' = x' + y'$

El recuento hecho hasta este momento, desde la aparición del cuadro de la oposición hasta la creación del álgebra matemática de Boole, marca otra etapa en la evolución de la Lógica, la que se ha denominado **de la lógica medieval a la lógica de Boole**, la cual abarca desde el siglo V al siglo XIX.

Históricamente, lo que viene a continuación se caracteriza por el renacimiento de la formalización rigurosa de las Matemáticas, que en la etapa clásica griega fue representativa. En este periodo se enfatiza en la lógica simbólica, la escuela formal, la lógica booleana, el cálculo proposicional y la inducción matemática. Personajes muy notables de esta etapa son: Peano, Hilbert, Frege, De Morgan, Gentzen, Russell, Whitehead y Gödel, a los que se deben los planteamientos de las limitantes de la lógica y de la ciencia en general. Por esto se ha catalogado este nuevo periodo como **la Ciencia Matemática**.

En este tiempo el principal aporte de Frege (1848-1925) se dio con la lógica proposicional, pues fue en él donde surge esta idea. «En 1879, Frege publica el Begriffsschrift, un tratado sobre la lógica de proposiciones, donde aparece por primera vez establecida como un sistema deductivo en forma axiomática estricta. El sistema fregeano de lógica proposicional está constituido sobre la base de dos conceptos fundamentales, los de negación e implicación» (www.avizora.com).

Un aspecto importante de la lógica de Boole está en las propiedades que cumplen las operaciones definidas, suma y producto lógico

En el sistema fregeano la disyunción incompatible ~(~A ‘« B), puede convertirse así:

1) A v ~B   Teorema de Morgan
2) ~B v A   Conmutación sobre 1
3) B ’! A   Implicación material en 2.

Fue finalmente Frege quien dio las bases del llamado cálculo de proposiciones, el cual más adelante sería desarrollado por Bertrand Russell.

Otro personaje que dejó su huella en el campo de la lógica fue Peano, con el análisis postulacional. Peano fue el primero en usar la lógica de enunciados para clarificar los argumentos de la matemática ordinaria, viendo en la lógica un instrumento para aclarar y dar rigor al razonamiento matemático. Nadie antes de Peano puso de relieve que la implicación es la relación fundamental en matemáticas, por ser implicaciones casi todos los enunciados verdaderos en cualquier sistema matemático. Con Peano se constató la posibilidad de poner todos los enunciados de la Matemática en forma de un lenguaje de signos, y construir las demostraciones de todos los teoremas matemáticos mediante cambios y sustituciones de tales signos partiendo de axiomas y definiciones.

Para destacar también está el matemático Bertrand Rusell y su importante trabajo Los Principios de la Matemática, que es considerado tan trascendental en nuestro tiempo como lo fue el Organon aristotélico en la antigüedad.

Para comprender cómo se desenvolvió la lógica en el siglo XX, también se debe tener presente a George Cantor, puesto que a él se debe la construcción de la teoría de conjuntos, lo que para algunos estudiosos de la Matemática constituye la parte más audaz y compleja de la Matemática Moderna. Por ejemplo, en el campo de las clases George Cantor realizó los siguientes aportes:

> Si dos clases de objetos A y B son tales que a cada elemento de A se puede hacer corresponder de un modo cualquiera un elemento de B y viceversa, se dice que tienen la misma <potencia> o el mismo <número cardinal>. La cosa está bastante clara intuitivamente, en cuanto el hecho de poder hacer corresponder a cada elemento de A uno y sólo uno de B nos indica que ambas clases contienen el <mismo número de elementos>. Esta afirmación, aunque aparentemente elemental, es importante porque permite conocer <si dos clases tienen la misma cardinalidad aun sin saber contar> (Agazzi, 1973).

Posteriormente, al aplicar a las clases infinitas las relaciones y las operaciones que el Álgebra de Clases había establecido ya para las clases finitas, Cantor construyó una autentica Aritmética de lo Infinito.

Para destacar también está el matemático Bertrand Rusell y su importante trabajo *Los Principios de la Matemática,* que es considerado tan trascendental en nuestro tiempo como lo fue el *Organon* aristotélico en la antigüedad. Se atribuye a Russell la finalización del trabajo simbólico en la Lógica, aunque Agazzi, entre otros autores, en su libro titulado *La Lógica Simbólica*, considera que sus mayores aportes se dieron en el campo de la Matemática. En el tratado *Los Principios de la Matemática* se encuentra lo siguiente:

> La primera parte, titulada Lógica matemática, desarrolla la Teoría de los Juntores o conectivas (lógica de enunciados), la Teoría de Cuantores o enunciados con variables de individuo (Ló-

gica de Predicados Monádicos) y la Teoría de Clases y Relaciones (lógica de predicados poliádicos) como un álgebra. La segunda parte, titulada Prolegómenos a la aritmética cardinal, se ocupa de las ideas necesarias para definir <número cardinal> y para poder construir una aritmética de los números cardinales con los pilares de la lógica. Los volúmenes 2 y 3 estudian en detalle las aritméticas de los números cardinales y ordinales, basándolas enteramente en la lógica» (www.avizora.com).

En *Los Principios de la Matemática*, Russell esboza sus ideas de derivar las Matemáticas de la Lógica[10]. El método que principalmente usó fue el analítico, que consiste en pasar de lo complejo a lo simple, de lo demostrable a premisas indemostrables. Russell reconoce que la Lógica Simbólica está formada por tres partes: el cálculo de proposiciones, el cálculo de clases y el cálculo de relaciones. Entre los dos primeros existe, dentro de ciertos límites, un cierto paralelismo. Dentro del cálculo proposicional se encuentran los axiomas, que son los principios de deducción, y si son verdaderos, las consecuencias que parecen deducirse por el uso de un principio opuesto no se deducirán realmente, de modo que los argumentos basados en la suposición de la falsedad de un axioma se hallan sujetos aquí a errores especiales (Méndez y Angarita, 2007). La otra parte fundamental del sujeto de la Lógica Simbólica es el cálculo de clases; aquí se considera como fundamental la noción de *clases*, al igual que la relación de un miembro de una clase a su clase. Por ejemplo, la relación de Juan con la raza humana, que se indica diciendo que Juan es un hombre. Por último se tiene el cálculo de relaciones, en donde

> si R es una relación, expresamos con xRy la función proposicional <x guarda la relación R con y>. Necesitamos una proposición primitiva (es decir, indemostrable) con el fin de que xRy sea una proposición para todos los valores de x e y. Entonces debemos considerar las clases siguientes: La clase de términos que guardan la relación R con algún término que llamaré la clase de <referentes> respecto a R; y la clase de términos respecto a los cuales algún término guarda la relación R, que llamaré la clase de <relatos>. Así, si R es la paternidad, los referentes serán los padres y los relatos los hijos. Debemos considerar también las clases correspondientes respecto a términos particulares o clases de términos: tales y tales hijos (Russell, 1948).

Esto es a grandes rasgos la división hecha por Russell a la Lógica Simbólica. Para algunos estudiosos de la lógica, el aporte más importante de Russell en este campo fue su teoría de las descripciones, que es explicada de la siguiente forma: Para explicarla utilizaremos el ejemplo de Russell. ¿Expresa el enunciado «Scott es el autor de Waverley» una identidad o una tautología? La respuesta de Russell es que este enunciado es claramente una identidad, porque cuando Jorge IV preguntó quién era el autor de Waverley, quería saber si Scott era el autor de Waverley, pero no quería saber si Scott era Scott. Esto parece evidente; ¿dónde está, pues, el problema? Antes de Russell los lógicos solían pensar que si dos frases

[10] *En el lenguaje actual este trabajo dio origen a lo que se conoce como Escuela de Pensamiento Logisista.*

denotan el mismo objeto, una proposición que contenga a una de ellas puede ser reemplazada siempre por una proposición que contenga a la otra, sin dejar de ser verdadera, si era cierta, o falsa, si era falsa. Ahora bien, argumenta Russell, si esto fuese cierto la proposición verdadera «Jorge IV quiso saber si Scott era el autor de Waverley» se convierte (sustituyendo 'el autor de Waverley' por Scott) en la proposición falsa «Jorge IV quiso saber si Scott era Scott». Esto demuestra, según Russell, que es necesario distinguir entre un nombre y una descripción. Scott es un nombre, «el autor de Waverley» es una descripción» (www.avizora.com). Con esto queda Russell como el personaje más emblemático, en este ultimo tiempo, en el campo de la lógica.

Los actuales estudios en la lógica se encuentran orientados a su implementación en el campo de la informática y la tecnología, tal es el caso de Alan Turing, matemático y lógico, quien fue pionero en la teoría de la computación y contribuyó en importantes análisis lógicos de los procesos computacionales. Las especificaciones para la computadora abstracta que él ideó (llamada la Máquina de Turing) resultó ser una de sus más importantes contribuciones a la teoría de la computación. Turing, además, probó que es posible construir una máquina universal que con una programación adecuada podrá hacer el trabajo de cualquier máquina diseñada para resolver problemas específicos.

Así como a Alan Turing, se podría hacer mención de otros matemáticos que buscan estrechar los lazos entre la Lógica y la tecnología. Por esto el estudio de la Lógica muestra un futuro de avances tecnológicos en busca de mejoras en la calidad de vida de los humanos.

Los actuales estudios en la lógica se encuentran orientados a su implementación en el campo de la informática y la tecnología, tal es el caso de Alan Turing, matemático y lógico, quien fue pionero en la teoría de la computación y contribuyó en importantes análisis lógicos de los procesos computacionales.

Bibliografía

AGAZZI, Evandro (1973): *La lógica simbólica*. Traducido por J. Perez Ballestar. Barcelona: Editorial Herder.

ARISTÓTELES (1995): *Tratado de lógica (Organón) II*. Traducido por Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Gredos.

.BELL, E. T. (2002): *Historia de las Matemáticas*. Traducido por R. Ortiz. McGraw–Hill. Sexta reimpresión.

CAMPOS, Alberto (1994): *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá: Universidad Nacional.

LAKATOS, Imre (1981): *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza.

PERAZZO, Ermita Elies (1983): *Primera axiomatización científica y desarrollo posterior*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

MÉNDEZ G., Johan Verney y Angarita, Lucy (2007): *Estudio histórico sobre el desarrollo de la lógica*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Director Alfonso Jiménez E.

RUSSELL, Bertrand (1948): *Los Principios de la Matemática*. Traducido por Juan Carlos Grimberg. Buenos Aires: Espaso.

www.avizora.com

www.ehu.es