

Efectos de sitio por resonancia geométrica

Site Effects for Geometric Resonance

Fecha de recepción: 4 de junio de 2010
 Fecha de aprobación: 13 de octubre de 2010

Juan Diego Jaramillo*
 Juan David Gómez**
 Doriam Restrepo***

Resumen

Las características de los movimientos sísmicos se modifican cuando las ondas cambian de medio de propagación; el contacto entre el suelo y el aire es uno de estos casos, al igual que el contacto entre la corteza y los depósitos de suelo superficiales; a estas modificaciones del movimiento se les denomina efectos locales, y se deben no sólo al contraste entre las propiedades mecánicas de los dos medios en contacto, sino a la geometría del contacto. En este artículo se caracterizan algunos efectos locales debidos a la geometría del contacto entre el medio de propagación y la superficie. Para resolver el problema se utiliza, en los casos más complejos, el método de elementos de frontera, porque permite modelar de manera exacta la condición de radiación, y para casos más simples, pero muy ilustrativos, se utiliza la teoría de rayos.

Palabras clave: Efectos locales, Método de elementos de frontera, Propagación de ondas, Resonancia geométrica, Teoría de rayos

Abstract

The characteristic features of the incident seismic motions are modified once the wave field encounters changes in the propagation medium. The contact between soil and air and between the earth crust and layers of the surface soil's deposits, are clear examples of such changes. The modifications experienced by the incident motion are usually known as local site effects and are the result not only of changes in the medium mechanical's properties, but also of the contact interfaces' geometry. This article focuses mainly in the latter cause of site effects. To address the problem the BEM technique is used for the most complex cases, since it allows to model the exact field's conditions, for the analytical considerations of the radiation conditions, while for simple yet illustrative cases the problem is tackled via the ray theory.

Key words: Local Effects, Frontier elements' methodology, Wave propagation, Geometric effects, Geometric resonance, Ray theory,

* Prof. Univ. EAFIT, Grupo Mecánica Aplicada, Medellín, Colombia. jjarami@eafit.edu.co

** Prof. Univ. EAFIT, Grupo Mecánica Aplicada, Medellín, Colombia. jgomezc1@eafit.edu.co

*** Est. Doc. Univ. EAFIT, Grupo Mecánica Aplicada, Medellín, Colombia. drestre6@eafit.edu.co

I. INTRODUCCIÓN

La influencia de las condiciones locales en los movimientos sísmicos registrados en la superficie ha sido reconocida y ampliamente estudiada mediante soluciones analíticas para casos muy simples, simulación numérica o “experimentalmente”, a través de proyectos de instrumentación sísmica. Las modificaciones en amplitudes, contenidos frecuenciales y duraciones, que se presentan en los movimientos registrados en un sitio en particular son originadas por el contraste entre las propiedades mecánicas de los medios en contacto o por la geometría del contacto; dependiendo de las características del problema en particular, los efectos de sitio pueden estar controlados en mayor o menor grado por una de estas causas.

El caso de sitios localizados sobre depósitos profundos y lejanos a las fronteras laterales del basamento (centro del valle de México, Bogotá en zonas alejadas de las laderas de los cerros) corresponde a un problema en el que los efectos locales se deben fundamentalmente al contraste entre las propiedades mecánicas del basamento rocoso y del depósito de suelo; este problema puede ser reproducible con relativa precisión mediante modelos matemáticos unidimensionales de propagación de ondas, y ha sido ampliamente estudiado desde el punto de vista teórico y computacional (Thomson [1], Haskell [2]-[4], Ewing et ál [5], Aki y Richards [6]). A la segunda categoría correspondería, por ejemplo, el problema de una perturbación topográfica en un semiespacio elástico y homogéneo, es decir, un basamento sin consideración del depósito sedimentario (o equivalentemente a un depósito sedimentario con perturbación en superficie pero sin consideración del basamento); estos casos han sido abordados analíticamente para geometrías simples por Trifunac [7], Wong y Trifunac [8], Lee [9], Sánchez-Sesma [10], [11] y Todorovska y Lee [12], [13].

Si se consideran los dos casos extremos es razonable esperar que a medida que disminuye la profundidad del depósito de suelo o la distancia de las fronteras laterales, la incidencia de los efectos geométricos

comience a controlar la respuesta local; tal es el caso de valles sedimentarios poco profundos, en los cuales es esperable que la topografía de la superficie y del basamento sean responsables de parte de las modificaciones resultantes; casos de valles superficiales susceptibles de estos efectos se configuran, entre otros, en Medellín (Colombia), Caracas (Venezuela) y Wellington (Nueva Zelanda). En general, puede afirmarse que siempre existirán sitios donde la contribución de tales efectos debe ser considerada.

La incidencia de efectos geométricos como los descritos ha sido ampliamente reconocida desde el punto de vista instrumental (interpretación de registros), y estudiada de manera parcial a través de soluciones cerradas correspondientes a casos simples. Existen también algunos análisis cualitativos en términos de simulación numérica de problemas bidimensionales y tridimensionales, pero aplicados a escenarios particulares (ver, por ejemplo, Bard *et ál.* [14] y Campillo *et ál.* [15]). Sin embargo, los autores no han encontrado estudios teóricos lo suficientemente generales que permitan identificar las variables geométricas y mecánicas que controlan la física de la respuesta sísmica local; esta falencia representa un gran vacío conceptual a la hora de entender el problema de amplificaciones locales.

Por ejemplo, para sitios localizados sobre depósitos profundos de relativa infinidad lateral es claro que el factor geométrico determinante en la respuesta superficial corresponde a la profundidad del depósito. En el caso de efectos geométricos debidos a topografías complejas entre el basamento rocoso y la superficie libre, no se posee el mismo nivel de entendimiento desde el punto de vista teórico; esta falta de comprensión del problema constituye una brecha teórica que dificulta la interpretación de resultados instrumentales, la definición de las estrategias para los estudios de microzonificación sísmica y la utilidad práctica de las simulaciones.

Un estudio que apunte a contribuir con el estado del arte de los efectos geométricos en la respuesta sísmica local desde un punto de vista conceptual es claramente necesario. Estudio que no debe estar

orientado a explicar mediante comparación con registros qué sucede en un sitio en particular –como ha sido lo usual–, sino a caracterizar, con base en argumentos físicos, superposición de soluciones fundamentales y estudios paramétricos, la incidencia de estos efectos geométricos.

Por ejemplo, la solución exacta para una cuña infinita bajo ondas SH fue encontrada por Sánchez Sesma [10], y de esta solución se identificó una forma simple de predecir la amplificación en el vértice; esta solución dio pie, posteriormente, a la correspondiente a ondas SV , para el caso particular de una cuña de ángulo interno de 120° y una relación de Poisson de 0.25. Estas y otras soluciones analíticas permitieron aclarar físicamente los mecanismos básicos de generación de ondas de superficie y abrieron la puerta para que Sánchez-Sesma *et ál.* [11] pudieran obtener aproximaciones simples a la respuesta de una clase de valles aluviales de forma triangular.

En este trabajo se presentan y discuten algunas soluciones analíticas por *teoría de rayos*, y algunas otras usando el método de *elementos de frontera*, que ayudan a entender el fenómeno de resonancia geométrica. Se presentan y discuten las soluciones de cuñas infinitas sometidas a la incidencia vertical de ondas SV y SH , publicadas inicialmente por Sánchez-Sesma [10]; algunas de estas geometrías ligeramente modificadas se calculan numéricamente con el método de elementos de frontera para capturar los llamados efectos de difracción de ondas. Para terminar, se presenta la respuesta de valles triangulares y semicirculares cilíndricos sometidos a la incidencia de ondas SV a distintos ángulos de incidencia.

II. SOLUCIONES POR TEORÍA DE RAYOS

En lo que sigue se consideran ondas planas, es decir, que el movimiento de las partículas se presenta simultáneamente sobre un plano perpendicular a la trayectoria de propagación del frente de onda, que en adelante se denominará *el rayo*. Se considerará, igualmente, que el medio sobre el cual se propagan estas ondas es homogéneo e isotrópico, razón por la cual el movimiento no sufre ninguna modificación,

ni en su trayectoria, ni en su velocidad de propagación, ni en sus contenidos frecuenciales, ni en sus amplitudes. Algunas de estas características se modificarán solo cuando el frente de onda cambia de medio de propagación. En este trabajo se considerará que el único cambio se presenta en el contacto entre el medio de propagación y la superficie libre, y que la geometría de este contacto es extremadamente simple y está formada sólo de planos que se intersectan.

Para simplificar aún más el problema, en lo que sigue se consideran solo formaciones en las cuales existe una sección transversal que se repite a lo largo de una dimensión; esta sección transversal representará el plano de análisis, y los movimientos de la partícula pueden estar contenidos en este o en la dirección perpendicular a él. Concretamente, este problema se presenta cuando ni las propiedades mecánicas ni la geometría ni la excitación tienen variación alguna respecto a una de las direcciones del espacio. Estos problemas pueden ser tratados entonces como planos, considerando sólo un plano cualquiera perpendicular a la dirección para la que no hay variaciones.

Ya que para poder tratar el problema como plano también la excitación debe ser invariable en la dirección perpendicular al plano de análisis, es claro entonces que la dirección de propagación de la onda, o el rayo, debe estar contenida en el plano de análisis.

Los análisis se harán para dos tipos de movimientos de las partículas. El primero es un movimiento perpendicular al plano de análisis, ondas SH ; la S indica que es un movimiento distorsional del medio, porque ocurre en dirección perpendicular a la dirección de propagación, y la H indica que el movimiento es horizontal, es decir, que es un movimiento de las partículas paralelo a la superficie libre en la dirección perpendicular al plano de análisis. El segundo es un movimiento de las partículas en el plano de análisis, y, obviamente, puede ser *distorsional*, ondas SV , si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación, o *dilatacional*, si el movimiento de las partículas coincide con la dirección de propagación del movimiento, ondas P . Más adelante será evidente

la ventaja de esta descomposición o polarización del movimiento.

Del estudio de la ecuación diferencial que representa el equilibrio dinámico de las partículas del medio se llega a la conclusión de que esta se satisface si el campo de desplazamientos tiene forma de onda, es decir, que se trata de una función cualquiera que viaja en el tiempo, esto es, que depende del parámetro $(x - ct)$, donde x es la variable espacial que indica la posición en la dirección de propagación de la onda, c es la velocidad de propagación de la onda y t es el tiempo. También se concluye de la solución de la ecuación diferencial del problema, que hay dos velocidades de propagación de la onda que dependen exclusivamente de las propiedades mecánicas del medio en el cual se propaga. Una velocidad de propagación de las ondas distorsionales tipo SH o SV , β , y otra velocidad para las ondas dilatacionales tipo P , α , estas velocidades resultan ser iguales a:

$$\beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1)$$

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}} \quad (2)$$

y dependen de las propiedades mecánicas del medio: módulo de cortante (G), módulo de Poisson (ν) y densidad del medio (ρ).

Si en la solución del problema se propone la propagación de ondas planas con velocidades de propagación α y β dependiendo de si se trata de movimientos dilatacionales o distorsionales, respectivamente, entonces es claro que queda satisfecha la ecuación diferencial del dominio y que solo restaría satisfacer las condiciones iniciales y de frontera para encontrar la solución única del problema.

Adicionalmente a la estrategia de usar la superposición de ondas planas, el problema se resolverá en el dominio de la frecuencia, es decir, se hallarán las soluciones para cada frecuencia suponiendo que el campo de desplazamiento

incidente o la excitación es perfectamente armónico en la frecuencia de interés y además tiene amplitud unitaria. En estas condiciones, el campo solución del problema, que también será perfectamente armónico y en la misma frecuencia, se podrá describir en términos de la denominada función de transferencia, que no es otra cosa que la relación entre la amplitud del campo solución en cada punto, y la amplitud del campo incidente, en algún punto estratégico del medio. Esta función de transferencia también deberá traer información acerca de la fase o el retardo del campo solución en cada punto respecto a la fase del campo incidente en el punto estratégico, considerada normalmente como de fase cero. Una forma compacta de tratar este problema en el dominio de la frecuencia es hacerlo en el campo de los complejos; de esta forma, tanto la información del cambio de amplitud como del cambio de fase se describen con una sola función compleja, la función de transferencia.

Tratado el problema en el dominio de la frecuencia, se convierte en un problema estático equivalente, pues desaparece la variable tiempo y, por consiguiente, la necesidad de satisfacer las condiciones iniciales del problema.

Para encontrar la solución en el dominio del tiempo se calcula el espectro de Fourier de la señal incidente y se multiplica por la función de transferencia del problema para obtener el espectro de Fourier de la respuesta para cada punto del dominio. A este espectro se le aplica una transformada inversa de Fourier y se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo.

En el tipo de problemas simples que se abordarán con teoría de rayos se usarán fronteras planas entre el medio y la superficie libre, lo que significa que para satisfacer la condición de frontera libre simplemente deberán tenerse en cuenta las características (dirección y amplitud) de los frentes de ondas planas reflejadas, para que entre el frente incidente y los frentes reflejados se satisfaga la condición de frontera libre de esfuerzos.

Este problema de la reflexión de ondas planas en una superficie libre ha sido estudiando exhaustivamente por muchos autores (ver por ejemplo Aki y Richards

[6]); a continuación se resumen los resultados de estos trabajos.

En primer lugar, los ángulos de incidencia y reflexión de frentes de onda del mismo tipo, es decir, que se propagan a la misma velocidad, son iguales, y la relación entre el ángulo de incidencia y el de reflexión de ondas de diferente tipo siguen la ley de Snell (ver Fig. 1):

$$\frac{\text{Sen}(i)}{p} = \frac{\text{Sen}(j)}{p} \quad (3)$$

donde i es el ángulo de incidencia o reflexión de frentes de onda dilatacionales que se propagan a velocidad p , y j es el ángulo de incidencia o reflexión de ondas distorsionales que se propagan a velocidad p .

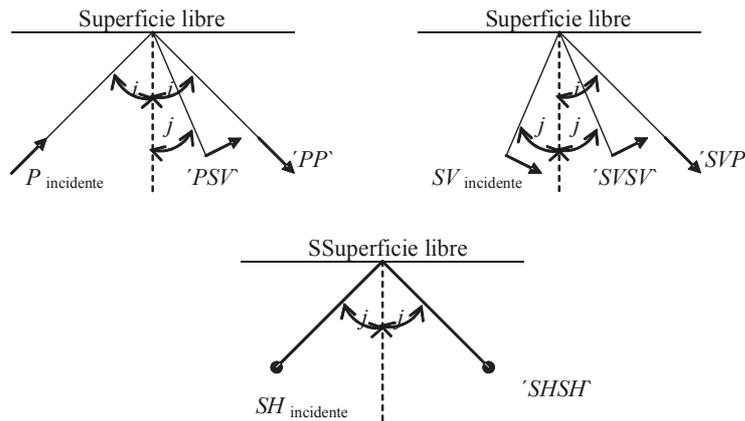


Fig. 1. Reflexión de ondas planas sobre una superficie libre

Las amplitudes de las diferentes ondas reflejadas, considerando que la amplitud de la onda incidente es unitaria, se indican a continuación:

$$PP = \frac{\left(\frac{1}{2} - 2p^2\right)^2 4p^2 \frac{\cos(i)}{\alpha} \frac{\cos(j)}{\beta}}{\left(\frac{1}{2} - 2p^2\right)^2 4p^2 \frac{\cos(i)}{\alpha} \frac{\cos(j)}{\beta}} \quad (4)$$

$$PSV = \frac{4 - p \frac{\cos(i)}{2} - 2p^2}{\frac{1}{2} - 2p^2 - 4p^2 \frac{\cos(i)}{2} \frac{\cos(j)}{2}} \quad (5)$$

$$SVP = \frac{4 - p \frac{\cos(j)}{2} - 2p^2}{\frac{1}{2} - 2p^2 - 4p^2 \frac{\cos(i)}{2} \frac{\cos(j)}{2}} \quad (6)$$

$$SVSV = \frac{\frac{1}{2} - 2p^2 - 4p^2 \frac{\cos(i)}{2} \frac{\cos(j)}{2}}{\frac{1}{2} - 2p^2 - 4p^2 \frac{\cos(i)}{2} \frac{\cos(j)}{2}} \quad (7)$$

Para el caso de las ondas SH, y debido a que solo se refleja una onda del mismo tipo, es claro que la amplitud de la onda reflejada debe ser igual a la amplitud de la onda incidente, de manera que la energía se conserve.

A continuación se presentan algunos resultados analíticos de problemas que admiten solución por teoría de rayos de acuerdo con las propuestas presentadas.

A. Cuña infinita a 30° sometida a onda SH incidiendo verticalmente

En la Fig. 2 se ilustra este caso. En esta cuña la onda SH que se propaga verticalmente hacia arriba es reflejada en las fronteras laterales inclinadas como una onda SH que se propaga hacia el infinito nuevamente y con una trayectoria que es paralela a la superficie opuesta, por lo que no genera

tracciones sobre esa superficie libre. Este último hecho es el que mantiene vigentes y satisfechas las condiciones de frontera libre, considerando los tres rayos que se indican en la figura y que por lo tanto hacen que la solución propuesta sea la solución del problema.

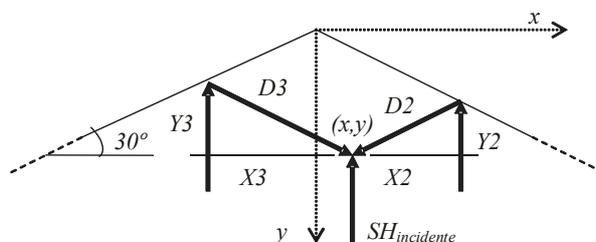


Fig. 2. Incidencia vertical de un frente plano SH sobre una cuña infinita de 30°

Para estimar la respuesta estacionaria de una onda incidente SH de propagación vertical, frecuencia y amplitud unitaria, simplemente habrá que sumar con su amplitud y fase los tres rayos que pasan por cualquier punto de coordenadas (x, y) . El desplazamiento w , perpendicular al plano, de la onda incidente, que sería el primer rayo, se puede representar como:

$$w(x, y, t;) = \exp(i (y - t)) \quad (8)$$

donde,

$$\kappa = \frac{\omega}{\beta} \quad (9)$$

y se denomina el número de onda.

Los rayos dos y tres, productos de las reflexiones del primer rayo sobre las superficies libres inclinadas, se pueden representar como el primero y el segundo sumandos de (10):

$$w(x, y, t;) = \exp(i (y - Y_2 - D_2 - t)) + \exp(i (y - Y_3 - D_3 - t)) \quad (10)$$

donde,

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{2} \frac{y}{\tan(30^\circ)} & X_3 &= \frac{1}{2} \frac{y}{\tan(30^\circ)} \\ Y_2 &= X_2 \tan(30^\circ) & Y_3 &= X_3 \tan(30^\circ) \\ D_2 &= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} & D_3 &= \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Y_2, Y_3, D_2 y D_3 representan las distancias verticales e inclinadas, respectivamente, que deben recorrer estos rayos después de haber pasado inicialmente por el punto de coordenadas (x, y) para volver a pasar por el mismo punto (ver Fig. 2).

En definitiva, la función de transferencia entre la señal incidente en el punto de coordenadas $(0,0)$ y la señal registrada en cualquier punto del medio se escribe como:

$$FT(x, y,) = e^{i y} + e^{i (y - Y_2 - D_2)} + e^{i (y - Y_3 - D_3)} \quad (12)$$

Esta función evaluada en el punto de coordenadas $(0,0)$ resulta igual a 3.0, independientemente de la frecuencia de excitación, lo que significa que en el ápice de la cuña se registra una señal amplificada tres veces respecto a la amplitud de la onda incidente. Para cualquier otro punto del medio se pueden registrar amplificaciones hasta de este mismo orden, pero esta vez en función de la frecuencia, de tal manera que resulte un número de onda, κ , que haga que los tres rayos que llegan a cualquier punto se construyan positivamente, pero que además la duración de la excitación sea tal que permita que en el tiempo sí se dé la construcción de las ondas. Sobre las superficies inclinadas donde coinciden las fases del rayo

incidente y del reflejado, y sobre el eje y , donde coinciden las fases de los rayos reflejados 2 y 3, al menos una amplificación igual a 2.0 se dará siempre, independientemente de la frecuencia y la duración de la excitación.

Para poder apreciar la solución de este problema en el dominio del tiempo se considera que la señal

incidente tiene la forma de un pulso de Ricker (ver Fig. 3). La frecuencia característica del pulso usado es de 2.0 Hz y la velocidad de propagación de las ondas en el medio es de 1.0 km/s.

En la Fig. 4 se aprecia una secuencia de fotos tomadas de la película que muestra la propagación de la perturbación descrita.

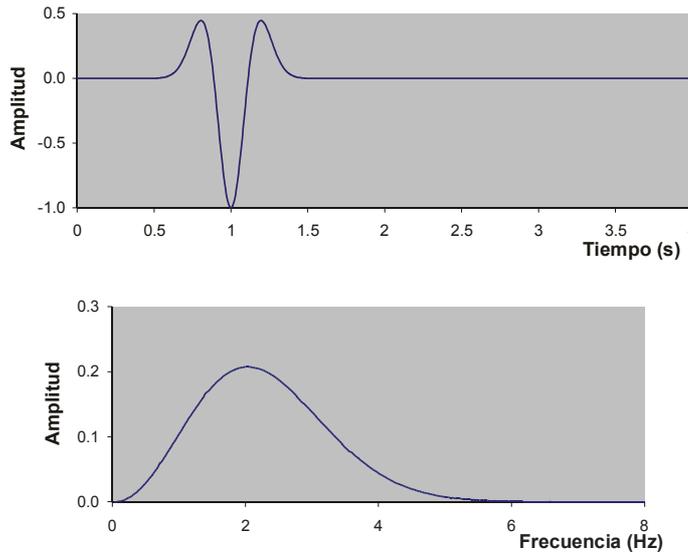


Fig. 3. Pulso de Ricker y su espectro de amplitudes de Fourier

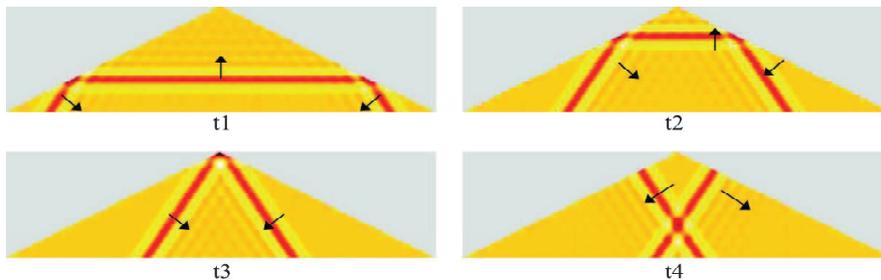


Fig. 4. Secuencia de la propagación vertical de un pulso de Ricker SH en una cuña infinita de 30°

B. Cuña infinita a 45° sometida a una onda SH incidiendo verticalmente

En la Fig. 5 se ilustra este caso. En esta cuña, la onda SH que se propaga verticalmente hacia arriba es reflejada en las fronteras laterales inclinadas como una onda SH que se propaga horizontalmente, y que al pegar nuevamente sobre la superficie inclinada

opuesta se refleja como onda SH que se propaga nuevamente verticalmente, pero esta vez hacia abajo. Es importante destacar de este problema el hecho de que la onda que finalmente regresa hacia el espacio infinito, reflejada por segunda vez en las superficies libres inclinadas, es una sola, es decir, es la misma para las dos superficies, lo que significa que no genera ningún desequilibrio sobre la superficie opuesta.

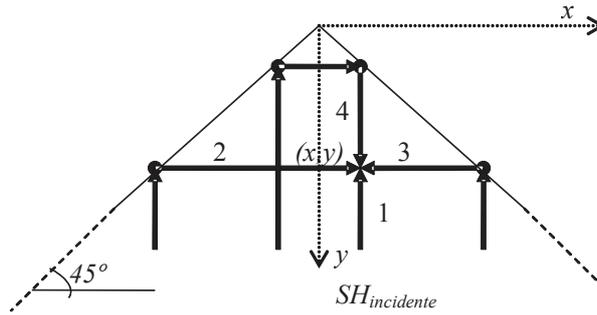


Fig. 5. Incidencia vertical de frente plano SH sobre una cuña infinita de 45°

La función de transferencia entre la señal incidente en el punto de coordenadas $(0,0)$ y la señal registrada en cualquier punto del medio se escribe como:

$$\begin{aligned}
 FT(x,y,) &= e^{i y} e^{i (y-y-x)} e^{i (y-y+x)} e^{i (x-2x-(y-x))} \\
 &= e^{i y} e^{-i x} e^{i x} e^{-i y} \\
 &= 2(\cos(x) \cos(y))
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

una señal amplificada cuatro veces respecto a la amplitud de la onda incidente. Igual que en el caso anterior, para cualquier otro punto del medio se pueden registrar amplificaciones hasta de este mismo orden, pero esta vez en función de la frecuencia: sobre las superficies inclinadas, donde coinciden las fases del rayo incidente y del reflejado, y sobre el eje y , donde coinciden las fases de los rayos reflejados 2 y 3, al menos una amplificación igual a 2.0 se dará siempre.

Esta función de transferencia evaluada en el punto de coordenadas $(0,0)$ resulta igual a 4.0, independientemente de la frecuencia de excitación, lo que significa que en el ápice de la cuña se registra

En la Fig. 6 se ilustran varias etapas de la propagación de un pulso de Ricker de ondas SH incidiendo verticalmente sobre una cuña infinita a 45° y en un medio como el descrito para el caso anterior.

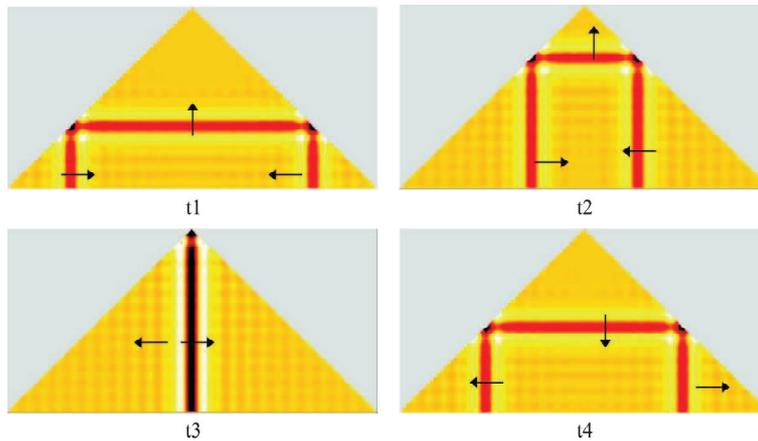


Fig. 6. Secuencia de propagación vertical de un pulso de Ricker SH en una cuña infinita de 45°

C. Cuñas infinitas sometidas a ondas SH incidiendo verticalmente

De los dos casos analizados en los incisos anteriores se pueden generalizar las soluciones exactas por teoría de rayos para cuñas infinitas sometidas a la incidencia vertical de ondas *SH*.

Los desequilibrios internos se presentan cuando el último rayo reflejado que se dirige al semiespacio no es ni vertical ni paralelo a los lados de la cuña; en estos dos casos la solución es exacta, pero, además, se puede concluir que el número de rayos que pasan por un punto es: par, cuando el último rayo se dirige sobre la vertical hacia el semiespacio, e impar, cuando los dos últimos rayos se dirigen hacia el semiespacio con trayectorias paralelas a cada una de las superficies libres.

A medida que el ángulo de los lados de la cuña

respecto a la horizontal se hacen mayores, más reflexiones internas de rayos se presentarán antes de dirigirse definitivamente hacia el semiespacio, lo que resulta entonces en amplificaciones enteras desde 2.0 para la frontera libre plana o de ángulo igual a 0°, hasta amplificaciones infinitas para un ángulo igual a 90°.

Siguiendo la geometría de estas reflexiones internas, se puede demostrar que la relación entre la amplificación, *A*, en el ápice de la cuña, que ya se mencionó, es igual al número de rayos que forman la solución, y el ángulo interno entre la horizontal y las superficies libres inclinadas, θ , está dado por:

$$\theta = \frac{(A - 2)\pi}{2A} \quad (14)$$

En la Tabla 1 se indican los ángulos y las amplificaciones para algunos casos ilustrativos.

Tabla 1. Ángulos y amplificaciones en el ápice de cuñas infinitas sometidas a la incidencia vertical de ondas SH

Ángulo (°)	Amplificación
0	2.0
30	3.0
45	4.0
54	5.0
60	6.0

D. Cuña infinita a 30° sometida a una onda SV incidendo verticalmente

En la Fig. 7 se ilustra este caso. En esta ocasión, a diferencia de las anteriores, la solución analítica por rayos existe si el medio de propagación tiene un módulo de Poisson igual a 0.25. En esta cuña, la onda *SV* que se propaga verticalmente hacia arriba es reflejada en las fronteras laterales inclinadas exclusivamente como una onda *P* que se propaga horizontalmente. De las ecuaciones 6 y 7 es posible ver que para el ángulo de incidencia y el módulo de Poisson del medio de propagación seleccionado, los coeficientes de reflexión de la onda *SV* son iguales a 0.0 para '*SVSV*', e igual a 1.0 para '*SVPP*', confirmando el hecho de que solo se refleja una onda

P que viaja horizontalmente. Este mismo fenómeno ocurre cuando esta onda *P* se refleja nuevamente sobre la frontera libre opuesta: solo se refleja una onda *SV* que viaja verticalmente hacia abajo. Igual que en el caso anterior, esta cuña acepta solución por teoría de rayos simple, porque la onda que finalmente se dirige hacia el espacio infinito es una sola y no dos, como ocurre para otros ángulos, generando cada una de ellas un desequilibrio en la frontera libre opuesta.

En este caso sólo se presentan movimientos horizontales de las partículas en la dirección del eje *x*, tanto debido a las ondas *SV* que se propagan verticalmente, como a las *P* que se propagan horizontalmente.

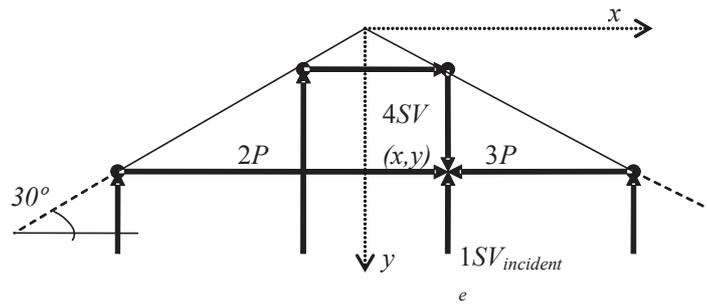


Fig. 7. Incidencia vertical de frente plano SV sobre una cuña infinita de 30°

Para estimar la respuesta estacionaria de una onda incidente SV de propagación vertical, simplemente habrá que sumar con su amplitud y fase los cuatro rayos que pasan por cualquier punto de coordenadas (x,y) , esta vez teniendo cuidado de que dos rayos viajan con velocidad v_p , el $1SV$ y el $4SV$, y dos viajan con velocidad v_s , el $2P$ y el $3P$. La función de transferencia entre la señal incidente en el punto de coordenadas $(0,0)$ y la señal registrada en cualquier punto del medio se escribe como:

$$(15)$$

$$\begin{aligned}
 FT(x,y,\omega) = & \exp(i\kappa_\beta y) \\
 & + \exp\left(i\left(\kappa_\beta y - \kappa_\alpha \left(\frac{y}{\tan(\pi/6)} + x\right)\right)\right) \\
 & + \exp\left(i\left(\kappa_\beta y - \kappa_\alpha \left(\frac{y}{\tan(\pi/6)} - x\right)\right)\right) \\
 & + \exp\left(i\left(2\kappa_\beta |x| \tan(\pi/6) - \kappa_\beta y - 2\kappa_\alpha |x|\right)\right)
 \end{aligned}$$

Esta función de transferencia evaluada en el punto de coordenadas $(0,0)$ resulta igual a 4.0, lo que significa que en el ápice de la cuña nuevamente se registra una señal amplificada cuatro veces respecto a la amplitud de la onda incidente.

En la Fig. 8 se ilustran varias etapas de la propagación de un pulso de Ricker de ondas SV incidiendo verticalmente sobre una cuña infinita a 30° y en un medio como el descrito para este caso.

En la Fig. 8 se puede apreciar que la longitud del pulso de Ricker es mayor para las ondas P que se propagan horizontalmente, que para las ondas SV que se propagan verticalmente; esto se debe a las diferencias de velocidades de propagación de esas ondas; a mayor velocidad, mayor longitud de onda.

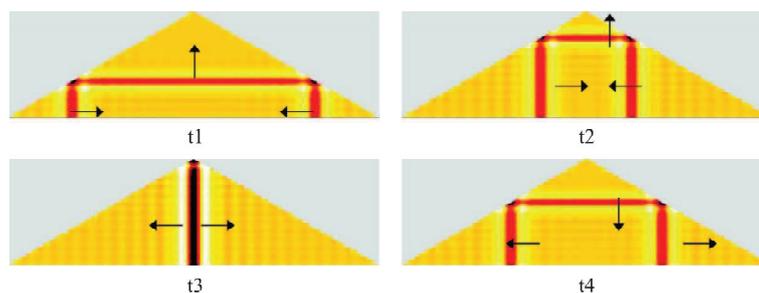


Fig. 8. Secuencia de propagación vertical de un pulso de Ricker SV en una cuña infinita de 30°

III. SOLUCIONES POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERA

Aunque las soluciones por teoría simple de rayos son tremendamente ilustrativas de lo que cabe esperar del fenómeno de resonancia geométrica, es necesario formular métodos más elaborados que permitan soluciones, así sea numéricas, de aquellos casos que no se pueden resolver analíticamente. Estos métodos permiten cuantificar e ilustran sobre lo que le hace falta a estas soluciones simples por teoría de rayos, para llegar a ser las soluciones exactas del problema.

El método que se usa en este trabajo es el denominado de elementos de frontera, que puede definirse, de manera simple, como una formulación integral de las ecuaciones de la elastodinámica. El fundamento de este método es el teorema de representación (ecuación 16), que permite encontrar el campo de desplazamientos, $u_j(\mathbf{x}; \omega)$, de cualquier punto dentro de un medio continuo sometido a perturbaciones dinámicas, en función de los desplazamientos, u_p , y las tracciones, t_p , sobre cualquier frontera, S , que encierre el punto.

$$u_j(\xi; \omega) = \int_S G_{ij}^{HS}(\mathbf{x}, \xi; \omega) t_i(\mathbf{x}; \omega) d\mathbf{x} - \int_S H_{ij}^{HS}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}; \omega) u_i(\mathbf{x}; \omega) dx \quad (16)$$

En la ecuación 16 las funciones G_{ij}^{HS} y H_{ij}^{HS} representan los desplazamientos y tracciones en la dirección i sobre el punto \mathbf{x} , debidos a una carga unitaria en la dirección j ubicada en el punto ξ . A estas funciones se les denomina soluciones fundamentales de la elastodinámica o funciones de Green. Cuando el punto de aplicación de la carga de las funciones de Green está sobre la frontera, S , este teorema de representación se convierte en una ecuación integral sobre los desplazamientos en la frontera, que puede ser resuelta numéricamente. Una vez encontrados los desplazamientos en la frontera, se hallan los desplazamientos de cualquier punto sobre el medio, utilizando el teorema de representación como está formulado en la ecuación 16.

Este método tiene ventajas enormes, particularmente en el caso que nos ocupa, respecto a otros métodos de

solución de las ecuaciones de la elastodinámica, como el de los elementos finitos o las diferencias finitas. Como ventaja fundamental está el hecho de que el método de los elementos de frontera permite satisfacer de manera analítica y precisa la condición de radiación, que en estos problemas de propagación de ondas tienen una gran influencia; en segundo lugar está el hecho de que el sistema de ecuaciones que resulta se plantea sólo sobre los desplazamientos en la frontera, y una vez resueltos estos, el cálculo de los desplazamientos sobre el dominio es independiente para cada punto, pudiéndose calcular miles de puntos sin necesidad de resolver sistemas de ecuaciones. Por último, es importante mencionar que la discretización del problema, como se hace sobre la frontera, tiene una dimensión menos que en los métodos en donde se discretiza el dominio; para problemas de deformación plana, como los que nos ocupan, aunque el dominio es bidimensional, la frontera es unidimensional.

A continuación se aplica este método para hallar la solución a algunos problemas muy cercanos a los ya resueltos con teoría de rayos, pero que por pequeñas diferencias en su configuración geométrica o ángulo de propagación de la onda incidente no permiten solución analítica por teoría simple de rayos.

A. Cuña finita a 30° sometida a una onda SV incidiendo verticalmente

La única diferencia entre el problema que se resuelve en este inciso y el que se resolvió en el inciso 2.3 es el hecho de que en este caso la cuña está apoyada en un espacio semiinfinito y no se trata de una cuña infinita (ver Fig. 9). El hecho de estar la cuña asentada en el semiespacio hace que se generen discontinuidades en los arranques de la cuña, que hacen que igualmente se presenten discontinuidades entre las soluciones por rayos a ambos lados de la discontinuidad y arriba y abajo de ella. En otras palabras, por teoría de rayos se generan soluciones independientes y diferentes a cada lado de las discontinuidades, que de alguna manera deben ser compatibilizadas o suavizadas en el contacto entre las diferentes soluciones. A este problema se le denomina difracción, en el argot de la teoría de propagación de ondas, y se presenta en discontinuidades como las que se ilustran en este caso.

En la Fig. 10 se muestra una secuencia de imágenes del desplazamiento horizontal de las partículas cuando la onda incidente SV tiene la forma de un pulso de Ricker exactamente igual al utilizado en el caso del problema del inciso 2.3.

De la Fig. 10 es claro que, aunque se mantiene buena parte de la solución por rayos para la cuña infinita, en las discontinuidades donde arranca la cuña se generan ondas semicilíndricas que hacen las veces

de suavizadores justamente en el sector donde se presenta la falta de continuidad de las soluciones por rayos. Es importante notar que esta difracción se atenúa geoméricamente con la distancia al foco que la genera, de manera que lejos de la perturbación la solución tiende a la solución por teoría de rayos. De la Fig. 11 es claro que la componente vertical del movimiento, debida exclusivamente a la difracción, aparece como ondas semicilíndricas partiendo de las discontinuidades.

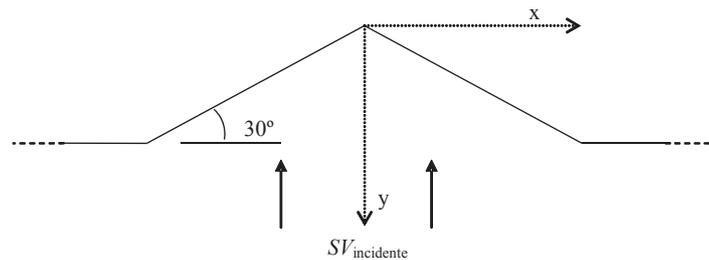


Fig. 9. Cuña finita a 30° sometida a una onda SV incidiendo verticalmente

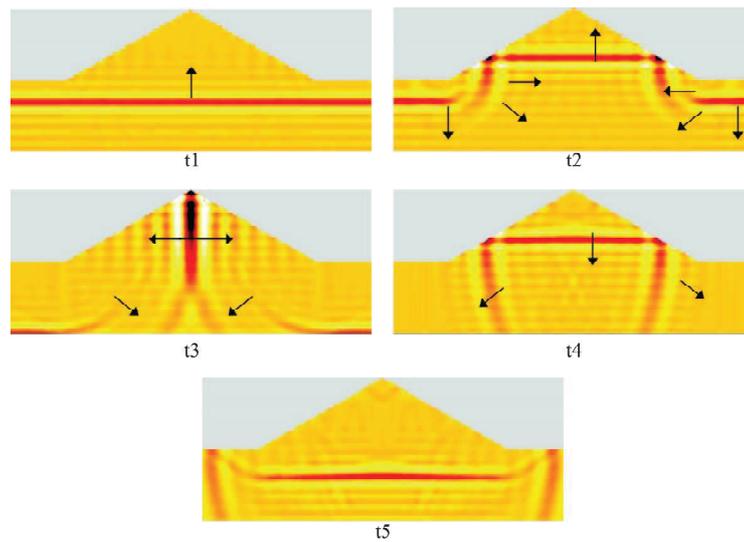


Fig. 10. Secuencia de propagación del movimiento horizontal debido a la incidencia vertical de un pulso de Ricker SV en una cuña finita de 30°

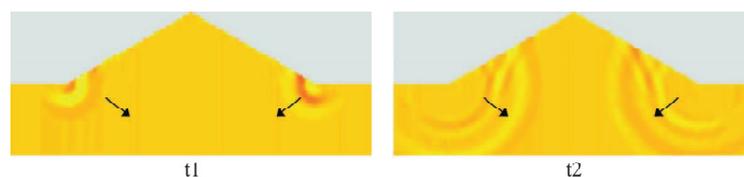


Fig. 11. Secuencia de propagación de la componente vertical del movimiento debido a la incidencia vertical de un pulso de Ricker SV en una cuña finita de 30°

B. Depresión en un semiespacio en forma de cuña a 30°

En este caso se ilustra el efecto de la incidencia vertical de una onda SV sobre un valle de forma triangular en el que sus lados forman un ángulo de 30° con la horizontal; este caso es semejante al estudiado en el inciso 2.4: la teoría de rayos indica que la onda SV incidente se refleja en las laderas inclinadas del valle, produciendo exclusivamente una onda P que se propaga horizontalmente alejándose del valle. Hasta aquí todo se ve bien, pero esta solución genera discontinuidades en los desplazamientos a cada lado

de una línea horizontal imaginaria que pasa por el fondo del valle: por encima de esta línea hay onda P reflejada, y por debajo ya no hay onda P ; esta incompatibilidad debe resolverse a través de la difracción de las ondas en el vértice del valle. Una discontinuidad semejante se presenta sobre líneas imaginarias verticales que parten de las partes altas del valle, y que igualmente debe resolverse a través de difracción de las ondas en estos vértices.

En la Fig. 13 se muestra la secuencia de la propagación vertical de un pulso de Ricker SV sobre un valle como el descrito.

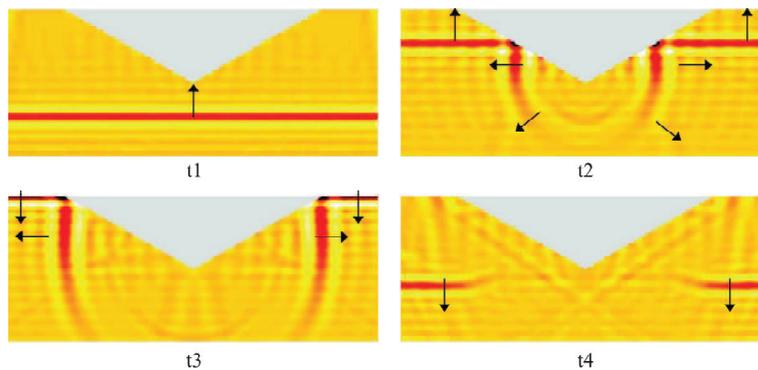


Fig. 13. Secuencia de propagación de la componente horizontal del movimiento debido a la incidencia vertical de un pulso de Ricker SV en un valle triangular

IV. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Aunque todas las soluciones presentadas ya habían sido publicadas, la intención del trabajo fue la reinterpretación de ellas, con la intención de conceptualizar acerca de la fenomenología del problema y abrir el camino a procedimientos simples y de primera mano, probablemente a partir de superposición de casos fundamentales que, aunque aproximados, permitan identificar las variables que controlan las amplificaciones o atenuaciones de las ondas sísmicas cuando se acercan a una superficie libre con geometrías diferentes a la plana. Fue también la intención de este trabajo cuantificar, con un grado de aproximación razonable para la ingeniería, el tamaño de estas amplificaciones o atenuaciones, para con base en estas medidas tomar decisiones acerca de lo pertinente o no de

exploraciones más finas y, por lo tanto, más costosas, en los casos que así lo ameriten.

Se concluye de este trabajo que la teoría de propagación, reflexión y refracción de ondas planas, conocida como *teoría de rayos*, permite un primer estimativo de las amplificaciones o atenuaciones por efectos geométricos de la superficie libre. Es importante destacar que siempre es posible identificar cuándo una solución por rayos es exacta o requiere de correcciones por los llamados efectos de difracción de ondas; efectos que ameritan estudios más detallados que los aquí presentados, los cuales se concentran en las irregularidades geométricas y tienen como función suavizar o ajustar las discontinuidades en el campo de desplazamientos, o satisfacer los desequilibrios en las fronteras, que surgen de la teoría de rayos.

Los efectos de la difracción, por tratarse de correcciones puntuales al desequilibrio en las fronteras o a las incompatibilidades en el campo de desplazamientos en algunas superficies internas del medio, se atenúan geoméricamente en dirección perpendicular a la superficie que requiere la corrección. Esta afirmación permite, de alguna manera, delimitar la validez de la teoría de rayos y circunscribir las zonas que requieren soluciones más complejas, dominadas seguramente por los efectos de la difracción.

REFERENCIAS

- [1] W. T. Thomson, "Transmission of elastic waves through a stratified solid medium". *Journal of Applied Physics*, 21, 89-93, 1950.
- [2] N. A. Haskell, "The dispersion of surface waves on multilayered media". *Bulletin of Seismological Society of America*, 43, 17-34, 1953.
- [3] N. A. Haskell, "Crustal reflection of SH waves". *Journal of Geophysical Research*, 65, 4147-4150, 1960.
- [4] N. A. Haskell, "Crustal reflection of plane P and SV waves", *Journal of Geophysical Research*, 67, 4751-4767, 1962.
- [5] Ewing, M., Jardetzky, W., and Press, F., *Elastic waves in layered media*. Mc-Graw Hill Book Co., New York, 1957.
- [6] K. Aki and P. G. Richards, *Quantitative Seismology*. W. H. Freeman, San Francisco, California, 1980.
- [7] M. D. Trifunac, "Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves", *Bulletin of Seismological Society of America*, 61, 1755-1770, 1971.
- [8] H. L. Wong and M. D. Trifunac, "Scattering of plane SH wave by a semi-elliptical canyon". *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, 3, 157-169, 1974.
- [9] V. W. Lee, "Three dimensional diffraction of plane P, SV and SH waves by a hemispherical alluvial valley". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 3, 133-144, 1984.
- [10] F. J. Sánchez-Sesma, "Diffraction of elastic SH waves by wedges", *Bulletin of Seismological Society of America*, 75, 1435-1446, 1985.
- [11] F. J. Sánchez-Sesma, F. J. Chávez-García and M. A. Bravo, "Seismic response of a class of alluvial valleys for incident SH waves", *Bulletin of Seismological Society of America*, 78, 83-95, 1988.
- [12] M. I. Todorovska and V. W. Lee, "A note on response of shallow circular valleys to Rayleigh waves-analytical approach". *Earthquake Engineering Vibration*, 10, 21-34, 1990.
- [13] M. I. Todorovska and V. W. Lee, "Surface motion of circular alluvial valleys of variable depth for incident plane SH waves", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 10, 192-200, 1991.
- [14] P. Y. Bard, M. Campillo, F. J. Chávez-García and F. Sánchez-Sesma, "The Mexico Earthquake of September 19, 1985-A Theoretical Investigation of Large- and Small-scale Amplification Effects in the Mexico City Valley", *Earthquake Spectra*, Vol. 4, No. 3, 609-633, 1988.
- [15] M. Campillo, P. Y. Bard, F. Nicollin and F. Sánchez-Sesma, "The Mexico Earthquake of September 19, 1985-The Incident Wavefield in Mexico City during the Great Michoacán Earthquake and Its Interaction with the Deep Basin", *Earthquake Spectra*, Vol. 4, No. 3, 591-607, 1988.