

# Comportamiento lineal y no lineal de las deflexiones en vigas de concreto reforzado

## Linear and Nonlinear Behavior of Deflections in Reinforced Concrete Beams

Fecha de recepción: 15 de junio de 2010  
 Fecha de aprobación: 28 de octubre de 2010

W. A. Martínez\*  
 O. J. Gutiérrez\*\*

### Resumen

El objetivo del trabajo que aquí se presenta fue determinar el comportamiento lineal y no lineal de las deflexiones en vigas de concreto reforzado, producidas por la aplicación de una carga puntual en el centro de la luz, y comparar los comportamientos hasta y más allá del estado elástico, con base en modelos experimentales, teóricos y computacionales mediante el programa Xtrac. Esta simulación considera deformaciones y comportamientos en diferentes estados progresivos de carga y determina modelos gráficos de daño y plasticidad del material de concreto y acero.

**Palabras clave:** Comportamiento, concreto, deflexiones, lineal, reforzado, vigas.

### Abstract

This work's objective is to determine the linear and nonlinear behavior of the deflections in reinforced concrete beams, produced by the application of a load in the beam's length center and to compare the behaviors until and beyond the elastic state, based upon experimental, theoretical and computational models, through the Xtrac program. This simulation considers the deformations and behaviors in different load's progressive states and determines the graphical damage and plasticity's models of the concrete and steel's material.

**Key words:** Behavior, concrete, deflection, linear, reinforced, beams.

\* Ingeniero en Transporte y Vías, Especialista en Estructuras (candidato) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Afiliado al Grupo de Investigación en Construcción Antisísmica de la UPTC –GICA– en la línea de investigación, desarrollo científico y tecnológico de la construcción del futuro. [ing\\_wilmermartinez@yahoo.com](mailto:ing_wilmermartinez@yahoo.com)

\*\* Ingeniero Civil, Especialista en Estructuras, Magister en Ingeniería Civil, Estructuras y Sísmica. Docente investigador del Grupo de Investigación en Construcción Antisísmica de la UPTC –GICA–. [javier.gutierrez@uptc.edu.co](mailto:javier.gutierrez@uptc.edu.co)

## I. INTRODUCCIÓN

El concreto es un material semejante a la piedra; se obtiene mediante una mezcla, cuidadosamente proporcionada, de cemento, arena, grava y agua, la cual se endurece teniendo en cuenta unas secciones y formas deseadas; es un material artificial utilizado en el campo de la ingeniería y es casi el único material de construcción que llega en bruto a la obra; esta característica hace que sea muy útil en construcción, ya que puede moldearse de muchas formas. Otras características favorables del concreto son su resistencia, su bajo costo y su larga duración. Si se mezcla con los materiales adecuados, el concreto puede soportar fuerzas de compresión elevadas. Su resistencia a fuerzas de tracción es baja, pero reforzándolo con acero, y a través de un diseño adecuado, se puede hacer que la estructura sea tan resistente a este tipo de fuerzas como a las de compresión.

Varios experimentos se han hecho durante la historia del concreto reforzado con acero, cuyos resultados y análisis han permitido determinar con gran aproximación su comportamiento cuando es sometido a diferentes sollicitaciones. Así, se han desarrollado diferentes procedimientos o métodos de diseño para elementos de concreto reforzado, como

esfuerzos de trabajo o teoría elástica y la teoría por resistencia última o máxima. La experiencia ha dado como resultado diferentes ajustes a estos métodos de diseño, y evidencia que deben aprovecharse las propiedades inelásticas reales tanto del concreto como del acero.

En los últimos años se han utilizado herramientas computacionales para manejar programas de modelación, que han sido de gran ayuda en el desarrollo de las teorías anotadas; estos programas son utilizados para mecanizar, disminuir el trabajo manual y simular el comportamiento de los materiales, aspecto muy necesario dadas las grandes diferencias de estos en cuanto a su composición y propiedades físicas.

Para esta investigación se realizaron ensayos experimentales, en el laboratorio de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Uptc, con especímenes y dimensiones que se muestran en la Tabla 1; inicialmente se buscó obtener las propiedades físicas del concreto utilizado, como resistencia a la compresión [1], módulo de rotura [2], módulo de elasticidad [3], tracción en barras de acero [4] y tensión indirecta [5], y luego se buscó fallar a flexión tres vigas sometidas al mismo tipo de carga, como se muestra en la Fig. 1, para determinar el comportamiento experimental.

Tabla 1. Tipo de los especímenes utilizados en el laboratorio

Tipo de ensayo	Número	Forma	Dimensiones (m)			
			Diámetro	Alto	Ancho	Longitud
$f'_c$	3	Cilíndrica	0.10	0.20	-	-
$f_r$	3	Prismática	-	0.15	0.15	0.50
$E'_c$	3	Cilíndrica	0.10	0.20	-	-
$T$	3	Cilíndrica	0.15	0.30	-	-
$f_y$	2	Cilíndrica	0.0095	-	-	0.40

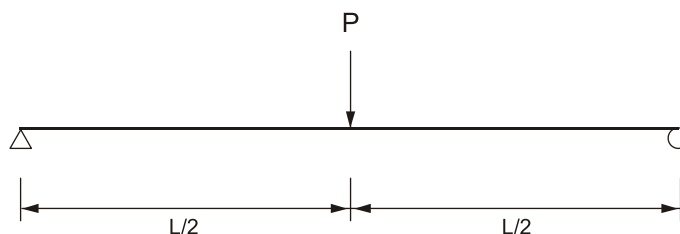


Fig. 1. Esquema de carga aplicada

En la Fig. 2 se observa la geometría de las secciones y el detalle del refuerzo utilizado en las vigas

analizadas, cuya cuantía se estableció arbitrariamente y se figuró de forma similar para las tres vigas.

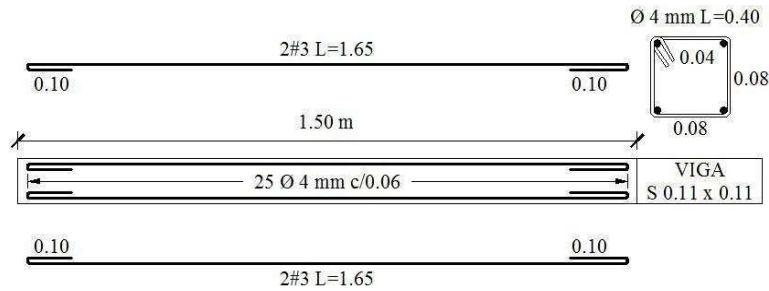


Fig. 2. Geometría de las vigas y detalle del refuerzo utilizado

## II. ANÁLISIS CONCEPTUAL

### A. Fuerzas y momentos actuantes

El análisis de las fuerzas y momentos actuantes que se presentan en la sección transversal a través de la longitud de la viga se realizó según los conceptos básicos de la estática y la mecánica de sólidos; para ello fue necesario establecer previamente criterios como condiciones de apoyo, tipo de carga aplicada y luz de cálculo. En resumen, en la Tabla 2 se muestran las ecuaciones de cálculo obtenidas.

### B. Deflexiones elásticas

Existen diferentes métodos para determinar las deflexiones elásticas. Los más estudiados son el método de la viga conjugada, el método de la carga unitaria, el método de la doble integración y el método del trabajo real. En la Tabla 2 se presentan las ecuaciones de cálculo.

### C. Inercia

La inercia es una propiedad que depende únicamente de la sección transversal del elemento; por tal motivo es difícil de calcular experimentalmente, dado que no se puede medir directamente. A continuación se presentan diferentes opciones de cálculo según el estado del concreto de la sección transversal del elemento.

### 1) Inercia bruta

Es la inercia de la sección aportada por el concreto sin fisurar con respecto al eje que pasa por el centroide, sin tener en cuenta el refuerzo. Se calcula con la siguiente ecuación.

$$I_g = \frac{b * h^3}{12} \quad (1)$$

### 2) Inercia de la sección fisurada transformada

Se presenta en secciones de concreto reforzado y consiste en reemplazar el área de refuerzo longitudinal por un área equivalente de concreto igual a  $nA_s$  para transformar una sección mixta por una sección ficticia conformada únicamente de concreto. Las ecuaciones para determinar la posición del eje neutro y la inercia fisurada se estudian en [6] y describen a continuación.

$$\frac{bx^2}{2} + (2n - 1)As'(x - d') = nAS(d - x) \quad (2)$$

donde  $x$  es la posición del eje neutro, y

$$I_{cr} = \frac{bx^3}{3} + (2n - 1)As'(x - d')^2 + nAS(d - x)^2 \quad (3)$$

### 3) Inercia efectiva

Para calcular las deflexiones inmediatas, el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10 ([7], capítulo C.9.5.2.3) determina que deben hacerse mediante métodos o fórmulas usuales para deflexiones elásticas, tomando en consideración los efectos de la fisuración y del refuerzo en la rigidez del elemento. A continuación se describe el cálculo de la inercia efectiva.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_u}\right)^3 * I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_u}\right)^3\right] * I_{cr} \quad (4)$$

donde

$$M_{cr} = \frac{f_r * I_g}{y_t} \quad \text{y} \quad f_r = 0.62 \quad f'c, \text{ en MPa.} \quad (5)$$

En las Figs. 3, 4 y 5 se describe el comportamiento teórico de las fuerzas cortantes, de los momentos flectores actuantes y de la curva elástica de deflexión y su variación respecto a la longitud de un elemento simplemente apoyado, teniendo en cuenta el tipo de carga aplicada.

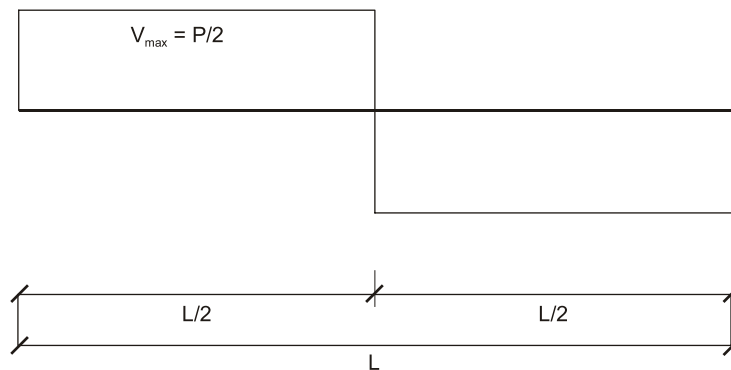


Fig. 3. Comportamiento de la fuerza cortante actuante por carga puntual en el centro de la luz

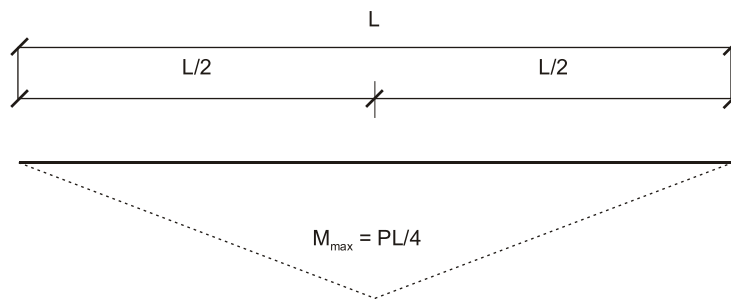


Fig. 4. Comportamiento del momento actuante por carga puntual en el centro de la luz

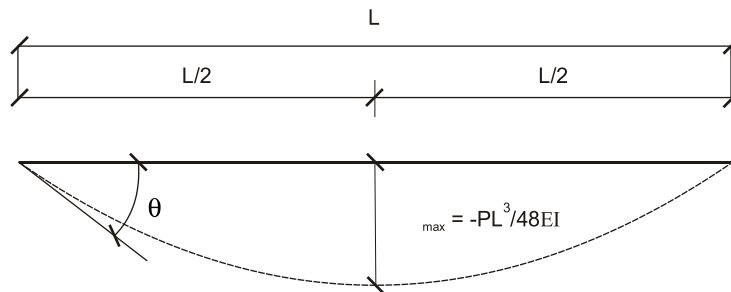


Fig. 5. Comportamiento de las deflexiones elásticas por carga puntual en el centro de la luz

Tabla 2. Ecuaciones de cálculo para el segmento de longitud  $0 \leq x \leq L/2$

Carga	Cortante	Momento	Deflexión elástica	Rotación
Puntual	$V_x = P/2$	$M_x = Px/2$	$\delta_x = -Px(3L^2 - 4x^2)/48EI$	$\theta = PL^2/16EI$

#### D. Curvas esfuerzo-deformación

##### 1) Modelo de Kent y Park

Basados en resultados experimentales, Kent y Park [8] han propuesto un modelo de curva esfuerzo-

deformación para el concreto, en el que se tienen en cuenta los efectos producidos por la presencia del acero de refuerzo transversal utilizado para el confinamiento del concreto, tal como se muestra en la Fig. 6.

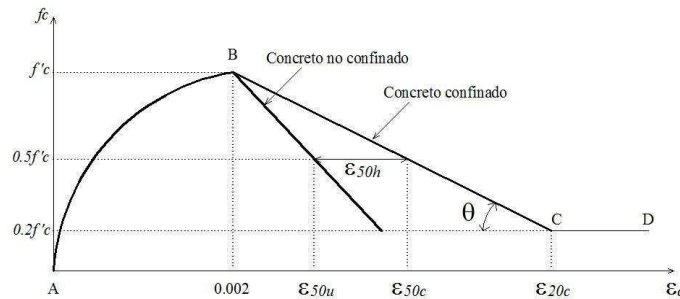


Fig. 6. Curva esfuerzo-deformación propuesta por Kent y Park

La curva esfuerzo-deformación propuesta presenta tres regiones definidas así:

Donde:

Región A – B:  $\epsilon_c \leq 0.002$

$$f_c = f'_c \left[ \frac{2\epsilon_c}{0.002} - \left( \frac{\epsilon_c}{0.002} \right)^2 \right] \quad (6)$$

En este tramo de curva no existe aporte del refuerzo de confinamiento a la resistencia del concreto, por lo tanto, la resistencia del concreto confinado hasta deformaciones unitarias de 0.002 es igual a la del concreto no confinado.

Región B – C:  $0.002 < \epsilon_c \leq \epsilon_{20c}$

$$f_c = f'_c [1 - Z (\epsilon_c - 0.002)] \quad (7)$$

$$Z = \frac{0.5}{\epsilon_{50u} + \epsilon_{50h} - 0.002} = \frac{\tan \theta}{f'_c} \quad (8)$$

$$\epsilon_{50u} = \frac{0.021 + 0.002 f'_c}{f'_c - 7} \text{ en MPa} \quad (9)$$

$$\epsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b'}{s}} \quad (10)$$

$$\epsilon_{20c} = \frac{0.8}{Z} + 0.002 \quad (11)$$

Región C – D:  $\epsilon_c > \epsilon_{20c}$

$$f_c = 0.2 f'_c \quad (12)$$

2) Modelo de J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

Este modelo, realizado posteriormente al modelo de Kent y Park, y presentado en las Jornadas de Ingeniería Estructural de la Sociedad Americana de Ingeniería Civil (ASCE), como se estudia en [9], incluye, a diferencia del anterior, los efectos producidos en la curva esfuerzo-deformación por el

acero de refuerzo longitudinal, la aplicación en secciones circulares y la utilización de estribos suplementarios para el confinamiento. En la Fig. 7 se muestra la curva esfuerzo-deformación para este modelo.

Para una tasa de deformación lenta y carga monotónica, el esfuerzo de compresión longitudinal del concreto  $f_c$  se da por:

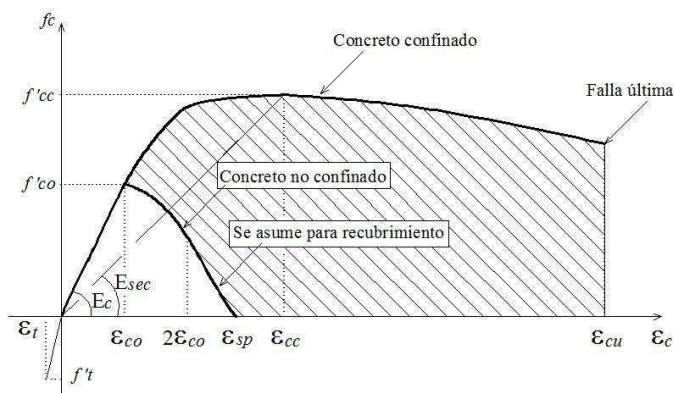


Fig. 7. Curva esfuerzo-deformación propuesta por J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

$$f_c = \frac{f'_{cc} x^r}{r - 1 + x^r} \quad (13)$$

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} \quad (14)$$

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_c \left[ 1 + 5 \left( \frac{f'_{cc}}{f'_{co}} \right) \right] \quad (15)$$

Richard *et al.* (1928) proponen utilizar a  $f'_{co}$  y  $\epsilon_{co}$  como el esfuerzo y la deformación del concreto confinado, respectivamente; generalmente se puede asumir  $\epsilon_{co}$  igual a 0.002.

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (16)$$

Donde  $E_c = 5000 f'_{co}$ , en MPa, y  $E_{sec} = f'_{cc} / \epsilon_{co}$

Para definir el comportamiento esfuerzo-deformación del concreto no confinado o de recubrimiento (fuera

del núcleo de concreto confinado), la parte de la rama descendente en la región, donde  $\epsilon_c > 2\epsilon_{co}$ , es asumida como una línea recta que llega a la deformación del concreto, en donde falla por compresión y no produce ningún esfuerzo ( $\epsilon_{sp}$ ). La resistencia a compresión del concreto confinado depende del esfuerzo efectivo de confinamiento  $f'_l$  y está dado por  $f'_l = f'_i k_e$ , donde  $k_e = A_e / A_{cc}$ , y  $A_{cc} = A_c (1 - \epsilon_{cc})$ .

a) Confinamiento efectivo para secciones rectangulares de concreto confinado por estribos rectangulares con o sin estribos suplementarios

En la Fig. 8 se observa que el confinamiento de la sección presenta un arqueado asumido como una parábola de segundo grado con una pendiente inicial de 45°; este arqueado ocurre verticalmente entre las barras de refuerzo transversal, y horizontalmente, entre las barras de refuerzo longitudinal.

El área efectiva de concreto confinado al nivel del

estribo se obtiene restando el área de las parábolas que contienen el concreto inefectivo. Para cualquier parábola, el área inefectiva es  $(w'_i)^2/6$ , donde  $w'_i$  es la distancia libre entre barras longitudinales adyacentes. Así, el área total de inefectivo confinamiento del núcleo de la sección de concreto al nivel del estribo, cuando tiene  $n$  barras longitudinales, es:

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6} \quad (17)$$

Incorporando la influencia de las áreas inefectivas en la elevación, el área efectiva del núcleo de concreto confinado entre la mitad de los niveles de refuerzo transversal es:

$$A_e = \left( b_c d_c - \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad (18)$$

donde  $b_c$   $d_c$ .

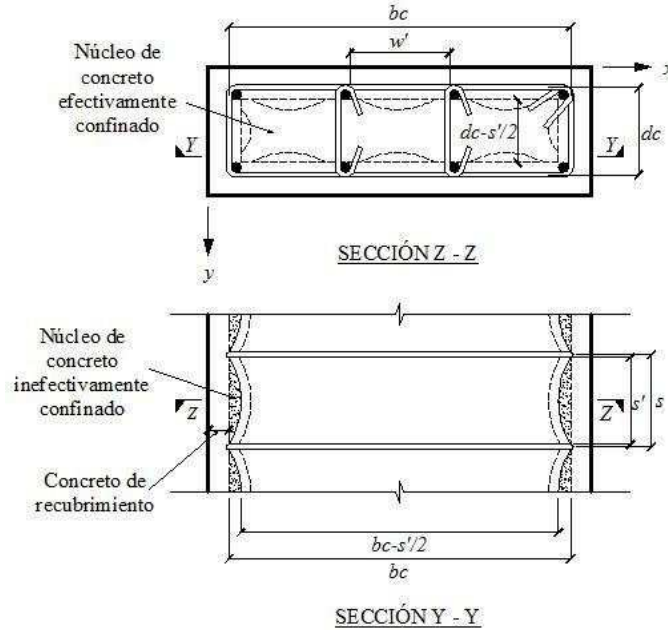


Fig. 8. Confinamiento efectivo del núcleo de concreto para secciones reforzadas con estribos rectangulares propuesto en el modelo de J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

Por tanto, el coeficiente de confinamiento efectivo es:

$$k_e = \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6b_c d_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad (19)$$

Es posible que las secciones rectangulares de concreto reforzado presenten diferentes cantidades de acero transversal de confinamiento en la dirección  $x$  y  $y$ . Estas pueden ser expresadas como  $A_{sx}/s d_c$  y  $A_{sy}/s b_c$ .

El esfuerzo lateral de confinamiento del concreto está dado por  $f'_{lx} = A_{sx} f_y$ , y  $f'_{ly} = A_{sy} f_x$  y el esfuerzo efectivo

lateral de confinamiento es  $f'_{lx} = f'_{lx} k_e$ , y  $f'_{ly} = f'_{ly} k_e$ .

#### b) Resistencia a compresión del concreto confinado

Para determinar la resistencia a compresión del concreto confinado ( $f'_{cc}$ ), Mander, Priestley y Park utilizaron el modelo de superficie de falla multiaxial de "cinco parámetros", desarrollado por William y Warnke (1975), que se expresa en la siguiente ecuación:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left( -1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f'_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f'_l}{f'_{co}} \right) \quad (20)$$

Como una solución práctica, en la Fig. 9 se presenta

un nomograma, basado en el esfuerzo efectivo lateral de confinamiento, para determinar la resistencia a

compresión del concreto confinado de secciones de concreto rectangulares.

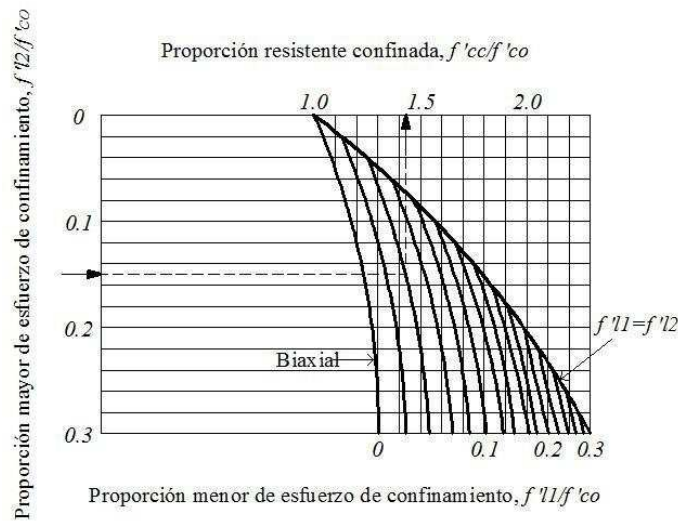


Fig. 9. Nomograma para determinar la resistencia del concreto confinado desde el esfuerzo efectivo de confinamiento lateral para secciones rectangulares, propuesto en el modelo por J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

c) Deformación última del concreto a compresión

Mander, Priestley y Park plantearon un método racional para predecir la deformación longitudinal del concreto a la compresión ( $\epsilon_{cu}$ ) a la primera fractura del estribo basada en un balance de energía aproximada. En esta aproximación, la ductilidad adicional disponible cuando los miembros de concreto son confinados se considera que es debida a la energía almacenada en el refuerzo transversal.

La deformación a la cual falla el concreto confinado, debido a la primera fractura del refuerzo transversal de confinamiento está dada por:

$$110\rho_s = \frac{\epsilon_{cu}}{0} f_c d \epsilon_c + \rho_{cc} \frac{\epsilon_{cu}}{0} f_u d \epsilon_c - 0.017 \sqrt{f'_{co}} \quad (21)$$

donde  $f_c$  está dado por (13).

E. Deformación máxima y ductilidad de miembros sometidos a flexión

El diseño de los elementos de las estructuras de concreto reforzado está sujeto al comportamiento de las deformaciones y deflexiones de dichos miembros con respecto a las cargas que soportan, ya sean por su peso propio (carga distribuida), por cargas generadas por su uso (puntuales o distribuidas) o por fuerzas horizontales generadas por los movimientos sísmicos.



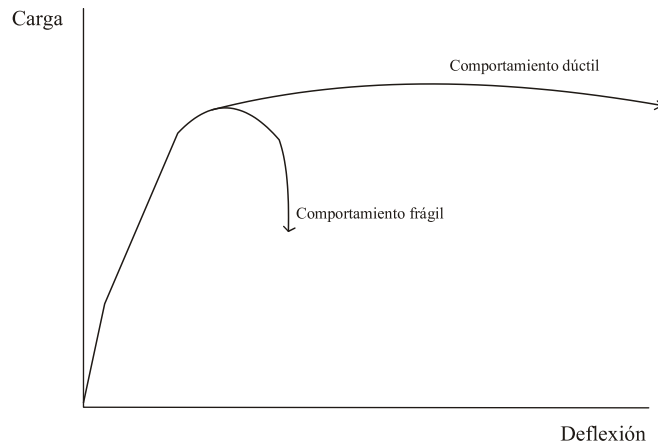


Fig. 10. Comportamiento de la curva carga-deformación de un miembro a flexión (ver [8], capítulo 6.1)

Como se estudia en [8], capítulo 6.1, es importante analizar las características de dichos comportamientos por las siguientes razones: 1. Debe evitarse al máximo las fallas frágiles de los miembros, en caso contrario, estos deben tener la capacidad de desarrollar grandes deformaciones bajo cargas cercanas a la máxima, lo que representaría salvar vidas al advertir las fallas y evitar el desplome total de la estructura. 2. Las distribuciones posibles de los momentos flectores, fuerzas cortantes y fuerzas axiales dependen de la ductilidad de los miembros en las secciones críticas. 3. Permitir en la estructura que los elementos sean capaces de absorber energía y disiparla mediante el desarrollo de grandes deformaciones que se puedan presentar después de la fluencia del acero. En la Fig. 10 se presentan comportamientos de elementos de concreto reforzado.

#### F. Relaciones momento curvatura

En la Fig. 11 se muestra un elemento inicialmente recto de un miembro de concreto reforzado con

momentos extremos y fuerzas axiales iguales, como se estudia en [8], capítulo 6.2.1.

El radio de curvatura  $R$  se mide hasta el eje neutro. El radio de curvatura  $R$ , la profundidad del eje neutro  $kd$ , la deformación del concreto en la fibra extrema de compresión  $\epsilon_c$  y la deformación del acero a tensión  $\epsilon_s$  varían a lo largo del miembro debido a que entre las grietas del concreto toma cierta tensión. Considerando un pequeño elemento  $dx$  del miembro y utilizando la notación de la Fig. 11, las siguientes relaciones proporcionan la rotación entre los extremos del elemento.

$$\frac{dx}{R} = \frac{\epsilon_c dx}{kd} = \frac{\epsilon_s dx}{d(1-k)} \quad (22)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} \quad (23)$$

Entonces  $1/R$  es la curvatura en el elemento (la rotación por longitud unitaria del miembro) y está dada por el símbolo  $\kappa$ . Por lo tanto se tiene:

$$\frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} = \frac{\kappa}{d} \quad (24)$$

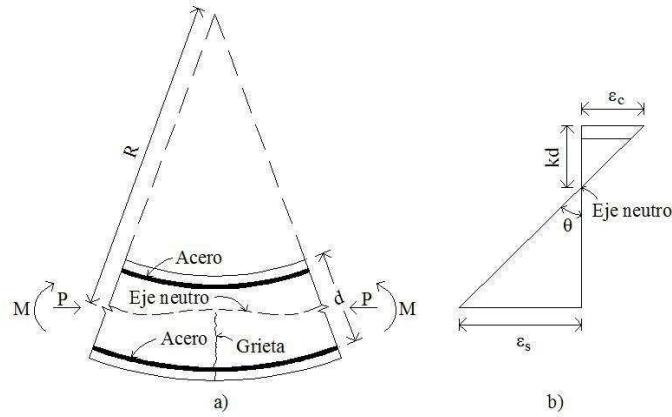


Fig. 11. Deformación de un miembro a flexión –ver [8], capítulo 6.2.1–.

*G. Ductilidad de secciones de viga de concreto no confinado, [8], capítulo 6.3.1.*

En el diseño de los elementos hasta el máximo de su capacidad y principalmente el diseño sísmico, la ductilidad se define como la relación de la deformación última y la deformación a la primera cedencia. La curva esfuerzo-deformación para el concreto es aproximadamente lineal hasta  $0.7f'_c$ , en consecuencia, si el esfuerzo en el concreto no excede este valor cuando el acero alcanza la primera cedencia, se puede calcular la profundidad del eje neutro utilizando la fórmula de la teoría elástica (línea recta o bloque de esfuerzos a compresión en el concreto triangulares), de la siguiente manera:

$$k = \left[ (\rho + \rho')n^2 + 2 \left( \rho + \frac{\rho' d'}{d} \right) n \right]^{\frac{1}{2}} - (\rho + \rho')n \quad (25)$$

$$M_y = A_s * f_y * jd \quad (26)$$

$$\phi_y = \frac{f_y / E_s}{d(1 - k)} \quad (27)$$

Basados en la experimentación se puede afirmar, respecto a los efectos de las propiedades de la sección, con relación a  $u/y$  y manteniendo constantes otras variables, que se cumple lo siguiente:

- Un aumento en la cuantía del acero a tensión disminuye la ductilidad.
- Un aumento en la cuantía del acero a compresión aumenta la ductilidad.
- Un aumento en la resistencia a la cedencia del acero disminuye la ductilidad.
- Un aumento en la resistencia del concreto aumenta la ductilidad.
- Un aumento en la deformación de la fibra extrema del concreto en el momento último aumenta la ductilidad.

*H. Determinación teórica de la relación momento-curvatura*

Se pueden determinar curvas teóricas momento-curvatura, como se estudia en [8], capítulo 6.2.2, teniendo en cuenta suposiciones semejantes a las establecidas para el análisis de los elementos a flexión. La Fig. 12 muestra una sección de concreto reforzado con carga axial y flexión.

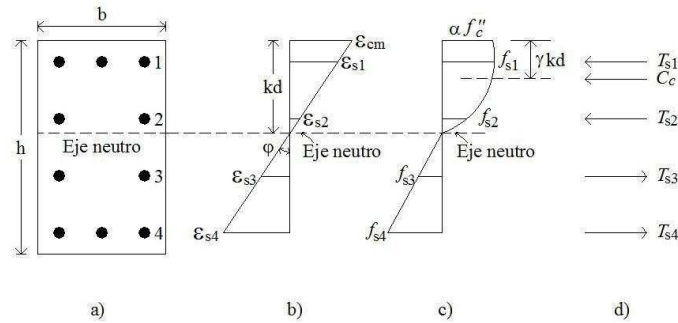


Fig. 12. Determinación teórica momento-curvatura, ver [8], capítulo 6.2.2.  
a) Sección transversal; b) Deformación unitaria; c) Esfuerzo; d) Fuerzas internas

Para determinada deformación del concreto en la fibra extrema a compresión  $\epsilon_{cm}$  y para una profundidad  $kd$  del eje neutro, se pueden determinar las deformaciones del acero  $\epsilon_{s1}, \epsilon_{s2}, \dots$ , por compatibilidad de deformaciones, en donde

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{cm} \frac{kd - d_i}{kd} \quad (28)$$

A partir de la curva esfuerzo-deformación del acero se pueden encontrar los esfuerzos  $f_{s1}, f_{s2}, \dots$ , correspondientes a las deformaciones  $\epsilon_{s1}, \epsilon_{s2}, \dots$ , y, finalmente, las fuerzas en el acero para cada varilla  $T_{si} = f_{si} A_{si}$ .

Se puede encontrar la distribución del esfuerzo del concreto en la parte de compresión a partir de la curva esfuerzo-deformación del concreto, y de la misma forma, la fuerza de compresión correspondiente a esa distribución de esfuerzos ( $C_c$ ) y su posición en términos de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , en donde  $C_c = f'_c bkd$ , que actúa a la distancia  $kd$  de la fibra extrema a compresión.

Los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  corresponden al esfuerzo medio y al centroide del bloque de esfuerzos, respectivamente, para cualquier deformación  $\epsilon_{cm}$  en la fibra extrema de compresión, para secciones rectangulares, y se pueden determinar de manera general con las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} f'_c d\epsilon_c}{f'_c \epsilon_{cm}} \quad (29)$$

$$\gamma = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} \epsilon_c f'_c d\epsilon_c}{\epsilon_{cm} \int_0^{\epsilon_{cm}} f'_c d\epsilon_c} \quad (30)$$

Alternativamente, las ecuaciones (31)-(36) presentan los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , en función de  $\epsilon_{cm}, \epsilon_o$  y  $Z$  (ver Fig. 6), y su comportamiento se presenta en las Figs. 13 y 14, respectivamente.

Región A – B:  $\epsilon_{cm} < \epsilon_o$

$$\alpha = \frac{\epsilon_{cm}}{\epsilon_o} \left( 1 - \frac{\epsilon_{cm}}{3\epsilon_o} \right) \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon_o}{4(\epsilon_{cm} - 3\epsilon_o)} \quad (32)$$

Donde  $\epsilon_o = 0.002$

Región B – C:  $\epsilon_o < \epsilon_{cm} < 20\epsilon_o$

$$\alpha = 1 - \frac{\epsilon_o}{3\epsilon_{cm}} - \left( \epsilon_{cm} - 2\epsilon_o + \frac{\epsilon_o^2}{\epsilon_{cm}} \right) \frac{Z}{2} \quad (33)$$

$$\gamma = \frac{(2\epsilon_{cm}^3 Z) - [6\epsilon_{cm}^2(\epsilon_o Z + 1)] + [2\epsilon_o \epsilon_{cm}(3\epsilon_o Z + 2)] - [\epsilon_o^2(2\epsilon_o Z + 1)]}{2\epsilon_{cm}[3\epsilon_{cm}^2 Z - 6\epsilon_{cm}(\epsilon_o Z + 1) + \epsilon_o(3\epsilon_o Z + 2)]} \quad (34)$$

Donde  $Z$  es de la ecuación (8)

Región C – D:  $\epsilon_{cm} > 20\epsilon_o$

$$\alpha = \frac{15\epsilon_{cm} Z + 35\epsilon_o Z + 24}{75\epsilon_{cm} Z} \quad (35)$$

$$\gamma = \frac{(150 \epsilon_{cm}^2 Z^2) + [20 \epsilon_{cm} Z (35 \epsilon_{cm} Z + 24)] - (475 \epsilon_{cm}^2 Z^2) - [32(15 \epsilon_{cm} Z + 4)]}{20 \epsilon_{cm} Z (15 \epsilon_{cm} Z + 35 \epsilon_{cm} Z + 24)} \quad (36)$$

$$M = f''_c bkd \left( \frac{h}{2} - \gamma kd \right) + \sum_{i=1}^n f_{sr} A_{si} \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \quad (38)$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son:

$$P = \alpha f''_c bkd + \sum_{i=1}^n f_{sr} A_{si} \quad (37)$$

Y la curvatura es:

$$\phi = \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad (39)$$

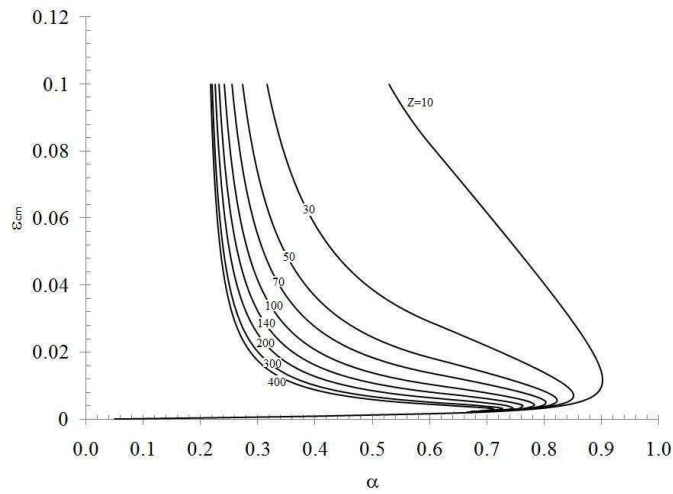


Fig. 13. Comportamiento del parámetro  $\epsilon_{cm}$  versus  $\alpha$

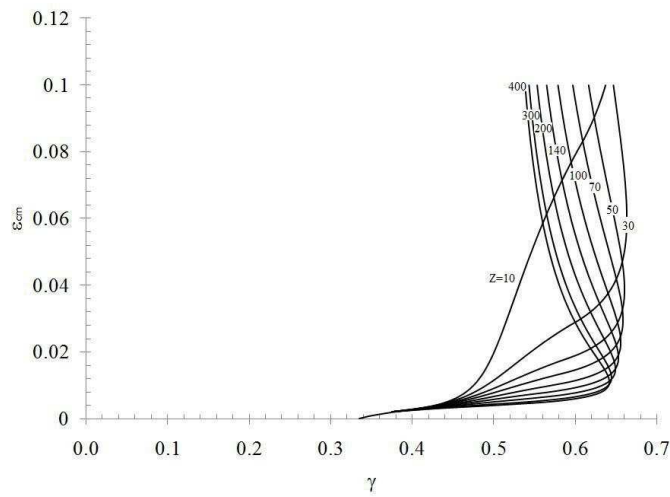


Fig. 14. Comportamiento del parámetro  $\epsilon_{cm}$  versus  $\gamma$

*I. Parámetros del bloque de esfuerzos de compresión para el concreto confinado mediante estribos*

Teniendo en cuenta que cuando la fibra extrema a compresión alcanza un esfuerzo aproximado de  $0.45f'_c$  la distribución de esfuerzos del bloque de compresión presenta una forma triangular, y que, se puede suponer, cuando la fibra extrema a compresión alcanza un esfuerzo aproximado de  $0.85f'_c$  el bloque de compresiones presenta una forma rectangular, los cálculos y diseño de elementos de concreto reforzado sometidos a flexión son cómodos y acertados, al utilizar las ecuaciones básicas del diseño a la flexión. Pero si, alternativamente, se requiere determinar un punto en la curva momento-curvatura posterior a la fluencia del acero o, más exactamente, cuando se

presenta la fluencia del acero, las características del bloque de esfuerzos de compresión varían y presentan formas alternas a las anteriormente mencionadas. Por tal motivo, es posible determinar con gran aproximación la distribución de los esfuerzos en la zona de compresión para un elemento de sección rectangular con concreto confinado, utilizando la curva obtenida en II-D-1 (Modelo de Kent y Park), donde se pueden suponer tres perfiles posibles para el bloque de esfuerzos de compresión vistos en [8], capítulo 6.5.2 y mostrados en la Fig. 15.

De la misma forma, en [8], capítulo 6.5.2, se presentan parámetros de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , calculados con las ecuaciones (29) y (30) para diferentes valores de  $Z$  de la ecuación (8) y de  $\epsilon_{cm}$  entre 0.002 y 0.015.

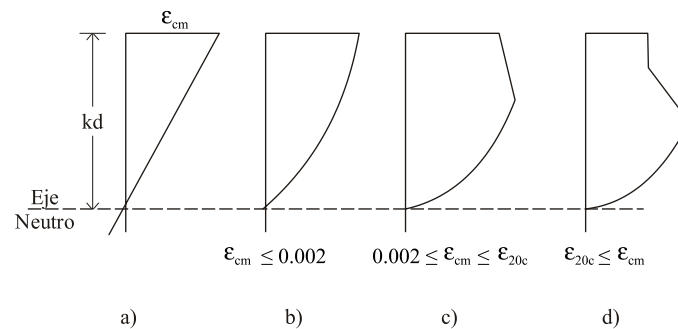


Fig. 15. Posibles formas de bloques de esfuerzos a compresión, ver [8], capítulo 6.5.2. a) Deformación unitaria; b) Bloque 1; c) Bloque 2; d) Bloque 3

*J) Deflexiones por flexión en elementos de concreto reforzado, [8], capítulo 6.6*

*1) Deflexiones a partir de curvaturas*

Es posible calcular la rotación y la deflexión de un miembro integrando las curvaturas a lo largo de su longitud. La rotación entre dos puntos de un elemento se define por:

$$\theta_{0-L} = \int_0^L \phi \, dx \quad (40)$$

Por otra parte, la deflexión transversal de un elemento, debida a la curvatura a lo largo de toda la longitud del

elemento entre dos puntos, está dada por:

$$\Delta_{0-L} = \int_0^L x \phi \, dx \quad (41)$$

Las ecuaciones (40) y (41) generalizan los teoremas del área de momento y se pueden aplicar si están involucradas las curvaturas elásticas y plásticas y si, además, se conocen las relaciones momento-curvatura y la distribución del momento flexionante. Este enfoque ignora el aumento de rigidez de los elementos, debido a la tensión que transmite el concreto entre las grietas y a las deformaciones adicionales provocadas por las grietas a tensión diagonal, debidas al cortante y por el deslizamiento de adherencia del refuerzo.

### III. METODOLOGÍA

#### A. Materiales y elaboración de especímenes

Para elaborar los especímenes se utilizó cemento portland tipo I, agregados producto de la trituración y acero de refuerzo corrugado; este proceso se realizó en una sola fundida de los materiales, con un diseño de mezcla en proporciones en volumen de una de cemento, dos de arena y tres de agregados, suficiente para verter en los moldes de las vigas y en los moldes para la caracterización de las propiedades físicas del

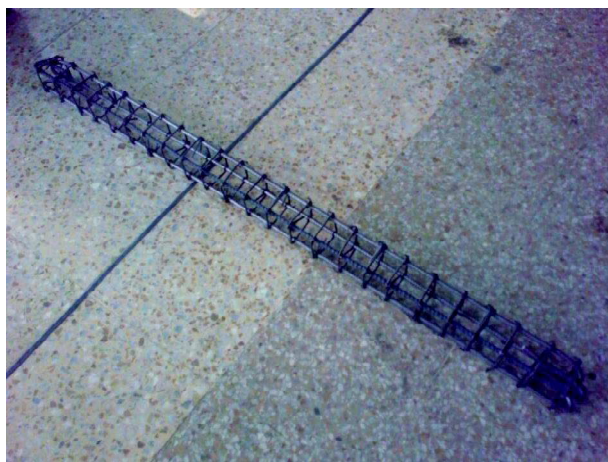


Fig. 16. Acero de refuerzo

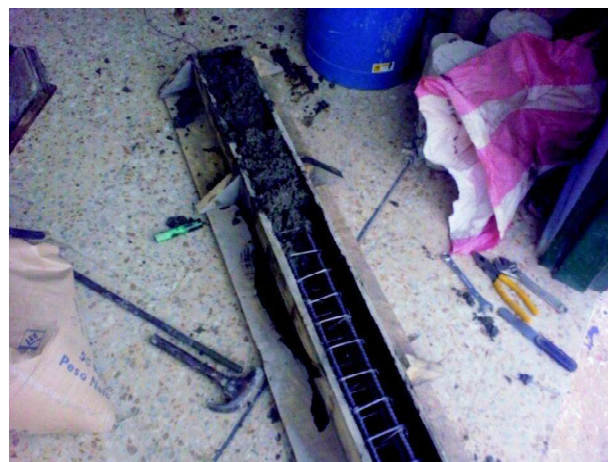


Fig. 17. Fundida de vigas en el laboratorio



Fig. 18. Fraguado de vigas de concreto



Fig. 19. Viguetas para módulo de rotura

concreto. En las Figs. 16-21 se muestra el procedimiento realizado.

#### B. Determinación de las propiedades físicas del concreto

Con las dimensiones de las secciones de los especímenes y los resultados obtenidos en el laboratorio, se determinaron las propiedades físicas del concreto y del acero, como se observa en las Figs. 22-26. Se utilizaron tres especímenes por cada uno de los ensayos realizados, y el resumen de los resultados se describe en las Tablas 3 y 4.



Fig. 20. Cilindros de concreto para resistencia a la compresión, relación de poisson y módulo de elasticidad

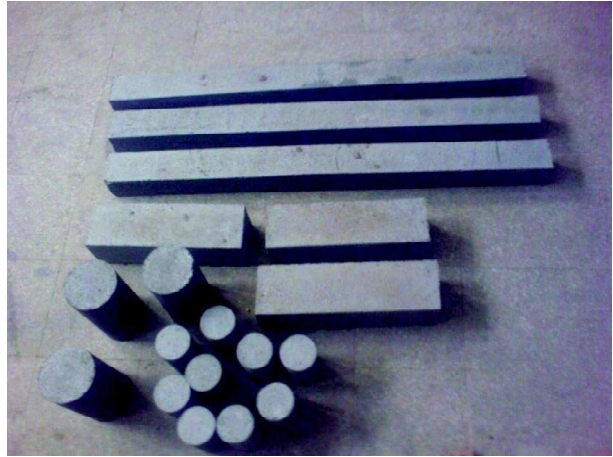


Fig. 21. Especímenes para la falla

Tabla 3. Resultados de los ensayos de laboratorio realizados al concreto

<i>Espécimen</i>	$f'_c$ (MPa)	$f_r$ (MPa)	$E_c$ (MPa)	$T$ (MPa)
1	10.2	2.2	15,277	1.1
2	9.1	2.3	15,277	1.2
3	10.3	2.3	12,991	1.1
<i>Promedio</i>	9.8	2.26	14,515	1.13

Tabla 4. Resultados de los ensayos de laboratorio realizados al acero

<i>Espécimen</i>	$\phi$	$E_s$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)
1	3/8"	199,709	417.1	647.1
2	3/8"	226,450	432.1	659.9
<i>Promedio</i>		213,080	424.6	653.5

Según la NSR-10, el Módulo de Elasticidad teórico del concreto de densidad normal ( $E_c$ ) (ver [7], capítulo C.8.5.1) puede tomarse como  $E_c = 4700 f'_c$  en MPa, pero como valor medio, sin distinguir el tipo de agregado, es  $E_c = 3900 f'_c$  en MPa, por tanto  $E_c = 12,209$  MPa, y el Módulo de Rotura teórico de la

ecuación (5) es igual a  $f_r = 1.94$  MPa, lo que indica que son menores a los obtenidos por experimentación ( $E_c = 14,515$  MPa y  $f_r = 2.26$  MPa) en un 16% y 14%, respectivamente, siendo los teóricos resultados conservadores. Para el presente análisis se utilizarán los valores experimentales.



*Fig. 22.* Montaje del ensayo de resistencia a la compresión



*Fig. 23.* Montaje del ensayo de módulo de rotura del concreto



*Fig. 24.* Montaje del ensayo de tensión indirecta del concreto



*Fig. 25.* Montaje del ensayo de módulo de elasticidad



*Fig. 26.* Montaje del ensayo de tracción en barras de acero



Otro parámetro para destacar es la resistencia a la tensión obtenida del concreto por el ensayo de tracción indirecta (1.13 MPa), algo más que del 10% de la resistencia a la compresión.

### C. Falla de vigas de concreto

La falla de las vigas de concreto se realizó colocando apoyos simples en los extremos a una distancia de 1.40 metros entre ellos, y aplicando una carga puntual vertical en el centro de la luz, es decir, a 0.70 metros

del apoyo, aumentándola gradualmente a una velocidad constante, como se observa en las Figs. 27-29.

### D. Análisis teórico de deflexión

En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos utilizando el procedimiento descrito en II-C-3. Las Figs. 31-33 muestran el comportamiento teórico de las deflexiones.



Fig. 27. Montaje del ensayo vigas reforzadas

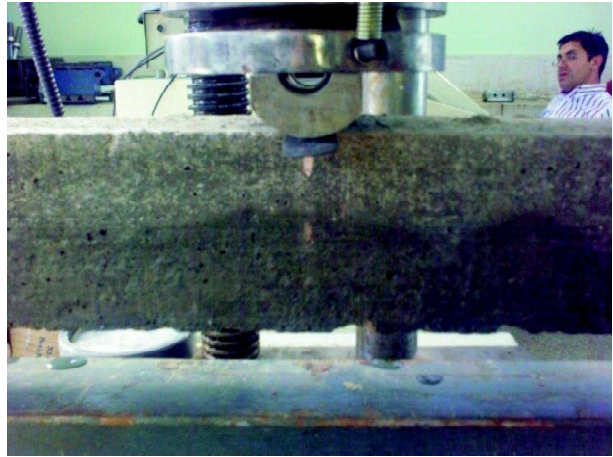


Fig. 28. Detalle de aplicación de la carga



Fig. 29. Detalle del apoyo de la viga

Tabla 5. Deflexiones teóricas elásticas según NSR-10

$P$ (KN)	$M_a$ (KN*m)	$I_e$ (mm <sup>4</sup> )	(mm)	$M_a/M_{cr}$
0	0	17,888,300.72	0	0
1	0.35	17,888,300.72	0.22	0.66
2	0.7	12,043,973.00	0.65	1.32
3	1.05	8,889,876.00	1.33	1.98
4	1.4	8,122,102.00	1.94	2.64
5	1.75	7,848,692.00	2.51	3.30
6	2.1	7,727,840.00	3.06	3.96
7	2.45	7,666,375.00	3.60	4.62
8	2.8	7,631,868.00	4.13	5.28
9	3.15	7,611,022.00	4.66	5.94
10	3.5	7,597,692.00	5.18	6.60
11	3.85	7,588,775.00	5.71	7.26
12	4.2	7,582,586.00	6.23	7.92
13	4.55	7,578,156.00	6.76	8.58
14	4.90	7,574,902.00	7.28	9.25

Según los datos mostrados en la Tabla 5, al comparar los resultados teóricos utilizando la relación propuesta en la Norma Sismo Resistente respecto a los experimentales, se encontró una diferencia significativa en la deformación máxima presentada en el centro de la luz correspondiente al rango elástico.

La Fig. 30 presenta la variación de la inercia efectiva respecto al momento aplicado, y muestra que para momentos flectores cercanos o iguales al momento de fisuración de la ecuación (5) ( $M_{cr}=0.53$  KN\*m), la inercia efectiva es igual a la inercia bruta de la sección, lo que significa que sólo el concreto puede resistir los esfuerzos de tensión.

Cuando el momento máximo excede considerablemente el momento de fisuración, indica que el efecto producido en la rigidez del concreto entre las grietas es insignificante, y tomar la inercia fisurada puede representar poco error.

Las curvas de capacidad muestran un comportamiento lineal y proporcional entre el momento aplicado y la deflexión presentada en el elemento; este comportamiento subestima la capacidad real de los materiales que pueden ofrecer más allá del comportamiento elástico, como se puede observar en las curvas de capacidad por experimentación.

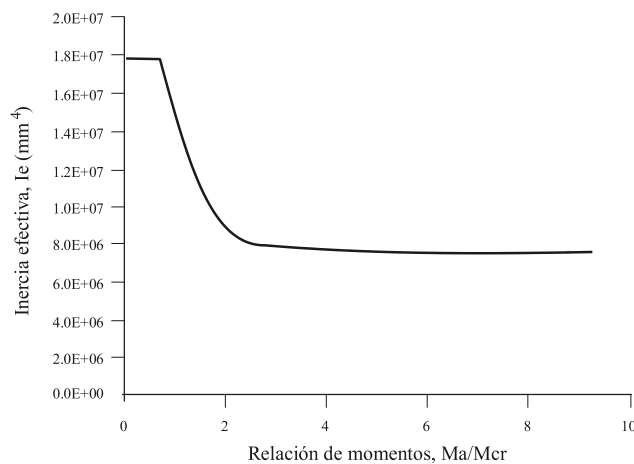


Fig. 30. Variación de la inercia efectiva

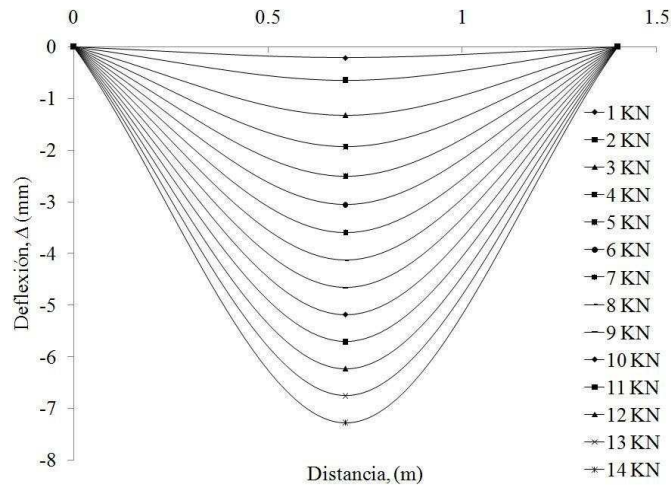


Fig. 31. Deflexiones teóricas según la NSR-10

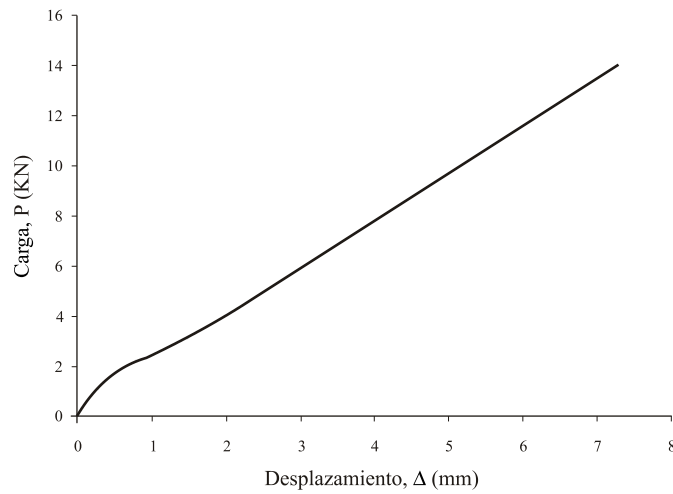


Fig. 32. Curva de capacidad teórica por carga

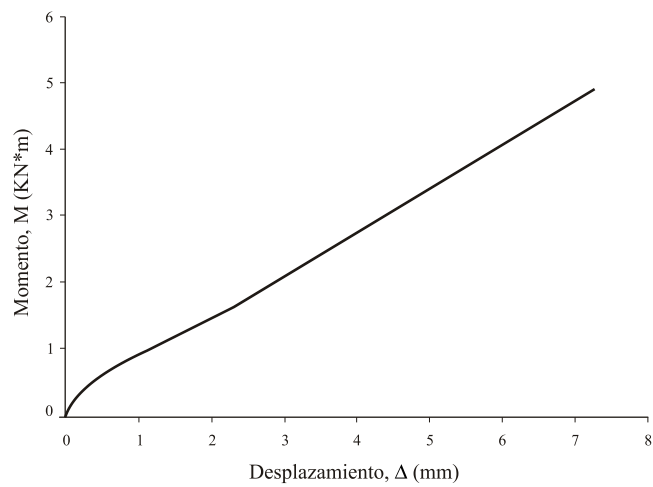


Fig. 33. Curva de capacidad teórica por momento

#### IV. RESULTADOS

Como resultados de los ensayos de las tres vigas, se obtuvieron deflexiones para los diferentes valores de carga aplicados en el mismo punto, en donde los esfuerzos de tensión causaron fisuras en las fibras a tensión (cara inferior de las vigas) y los esfuerzos de compresión hicieron fallar al concreto por resquebrajamiento o descascaramiento (cara superior de las vigas). El fenómeno se observa en las Figs. 34-36.



Fig. 34. Fisuras del concreto por esfuerzos de tensión



Fig. 35. Falla del concreto por esfuerzos de compresión



Fig. 36. Resquebrajamiento o descascaramiento del concreto por falla a compresión

#### A. Deflexiones de las vigas obtenidas en el laboratorio

En las Figs. 37-39 se muestran las curvas de las deflexiones experimentales de las vigas analizadas; se observa un aumento gradual de la deflexión a medida que se aumenta la carga aplicada hasta un valor de 11 KN; a partir de este punto se pierde la proporcionalidad y las deflexiones se incrementan considerablemente para valores adicionales pequeños de carga.

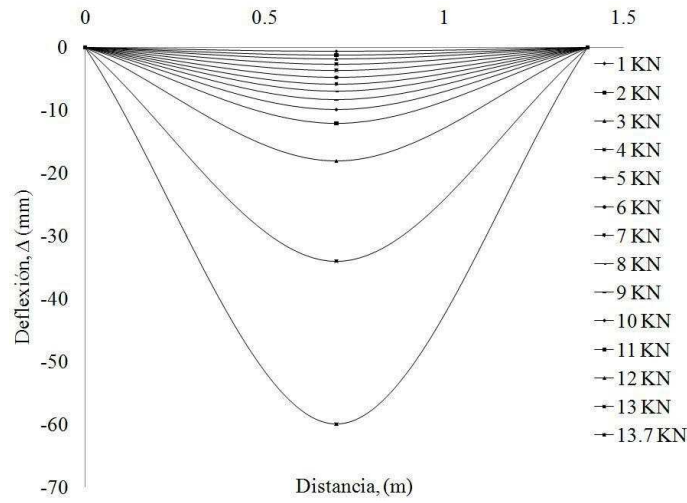


Fig. 37. Deflexiones de viga 1

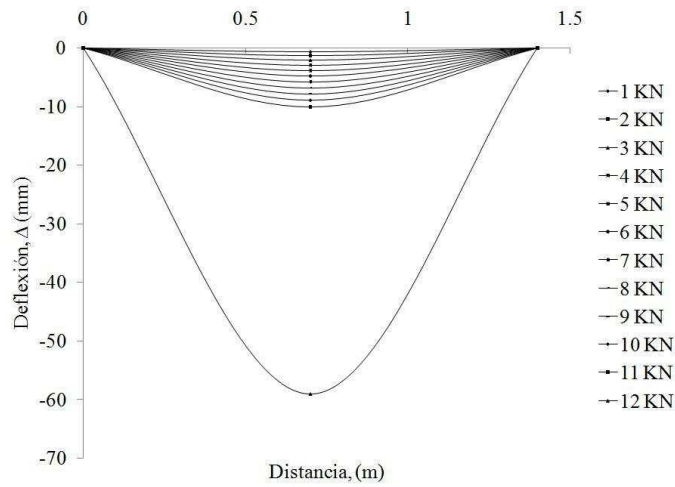


Fig. 38. Deflexiones de viga 2

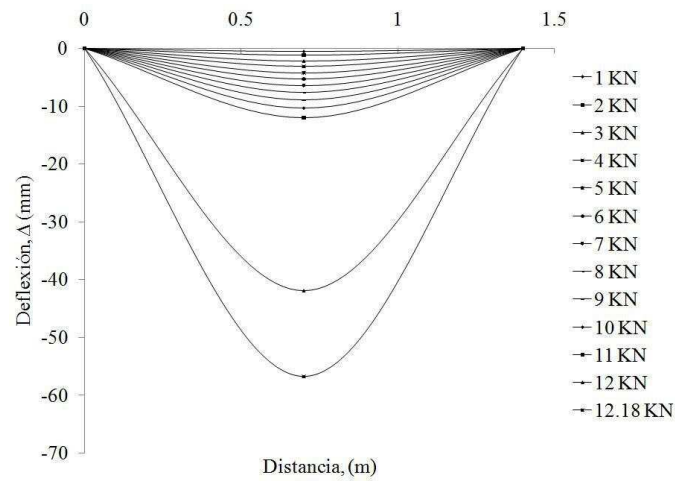


Fig. 39. Deflexiones de viga 3

### B. Capacidad de las vigas por experimentación

En las Figs. 40-47 se presentan las curvas de capacidad de las vigas analizadas.

#### 1) Capacidad por la carga aplicada

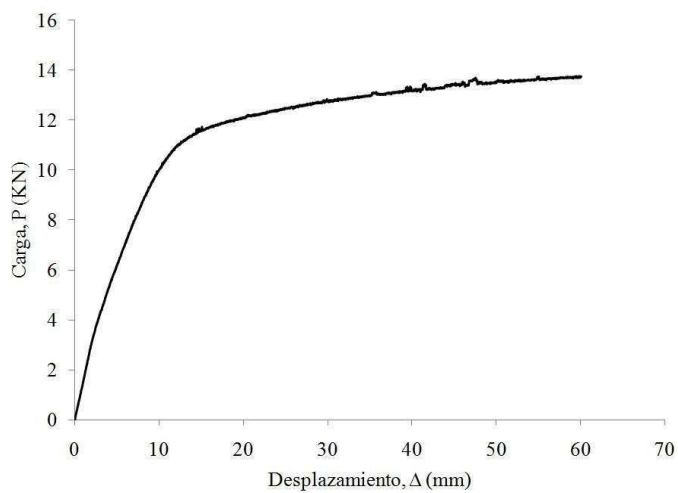


Fig. 40. Capacidad de la viga 1 por la carga (P) aplicada en L/2

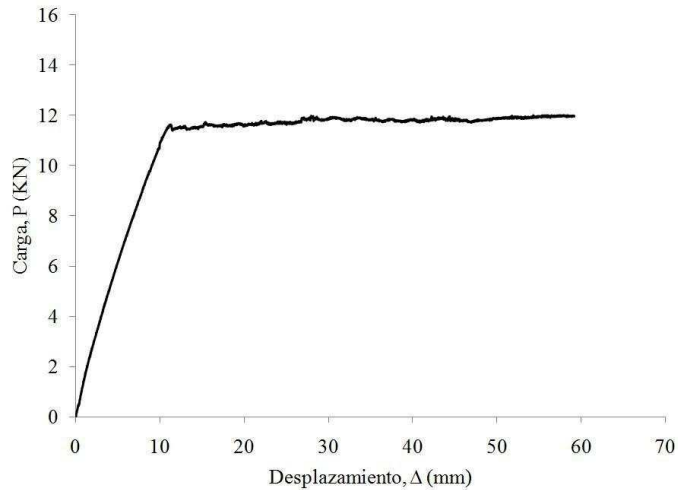


Fig. 41. Capacidad de la viga 2 por la carga (P) aplicada en L/2

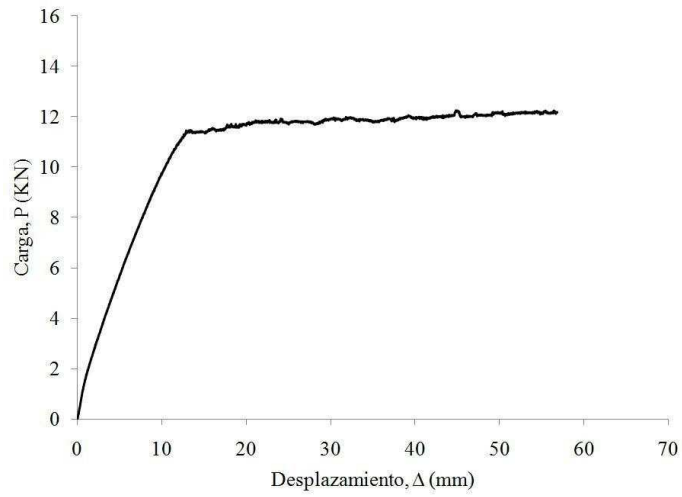


Fig. 42. Capacidad de la viga 3 por la carga (P) aplicada en L/2

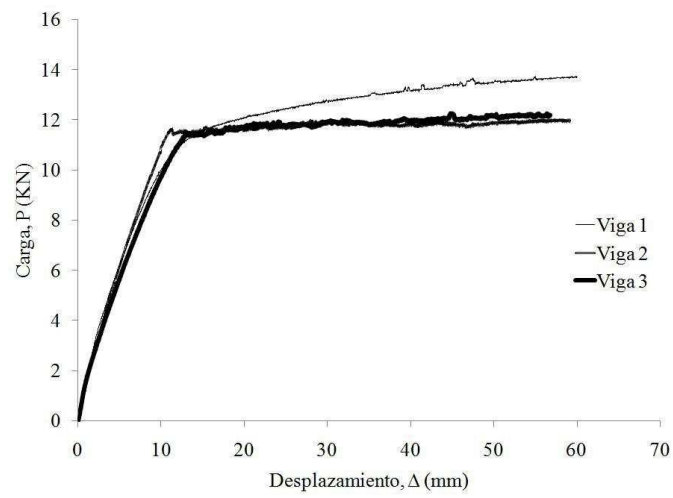


Fig. 43. Relación de la capacidad de las vigas por carga en L/2

2) Capacidad por momentos flectores

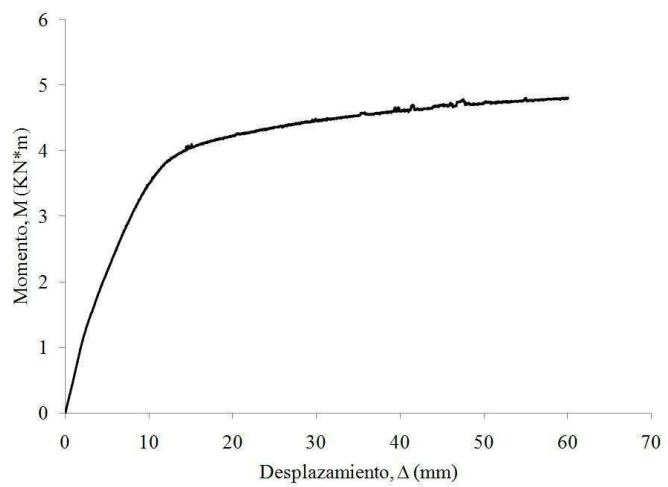


Fig. 44. Capacidad de la viga 1 por momento

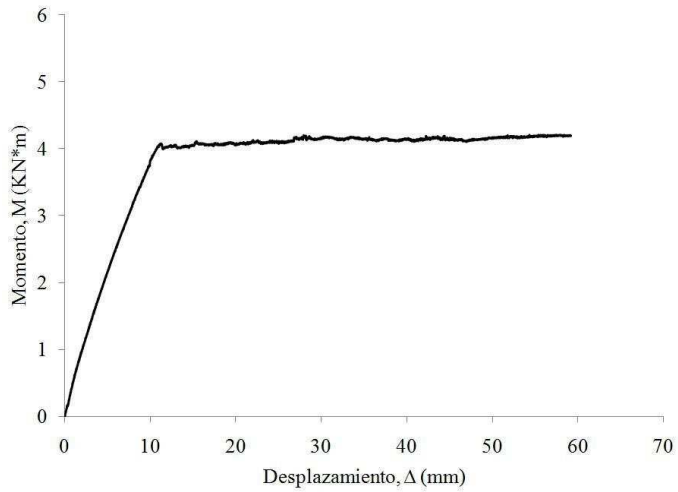


Fig. 45. Capacidad de la viga 2 por momento

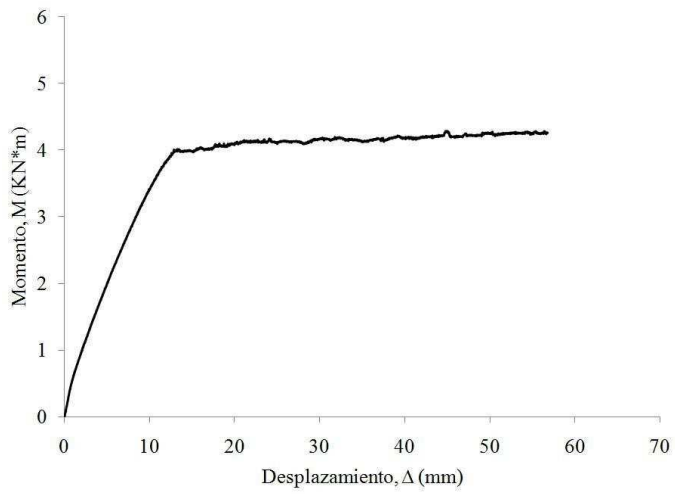


Fig. 46. Capacidad de la viga 3 por momento

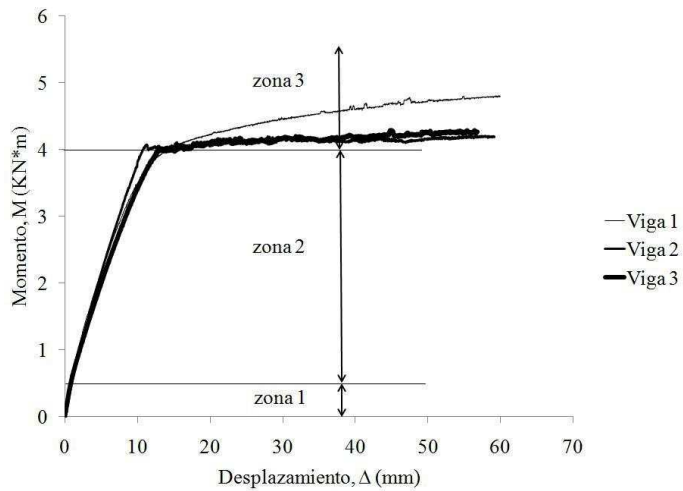


Fig. 47. Relación de la capacidad de las vigas por momento



### 3) Estados de comportamiento

En la Fig. 47 se puede observar la presencia de tres zonas o estados de comportamiento del concreto reforzado.

#### a) Estado de comportamiento inicial (zona 1)

Se produce desde el inicio de la aplicación de la carga, de modo gradual, hasta el punto tal en que el esfuerzo de tensión por flexión producido en el concreto es menor que el módulo de rotura de la ecuación (5); por esta razón, la resistencia del concreto es suficiente para soportar los esfuerzos de compresión como de tensión. Por otra parte, el refuerzo se deforma en la misma proporción que el concreto adyacente, y la resistencia del acero es de la misma magnitud que la del concreto.

En esta etapa, todos los esfuerzos en el concreto son producidos por cargas bajas, por tanto, son de baja magnitud y proporcionales a las deformaciones, considerándose elásticos.

Con base en los resultados obtenidos en III-B y la ecuación (5), se determinó que el Momento de Fisuración teórico ( $M_{cr}$ ) es de 0.53 KN\*m, lo que indica que, experimentalmente, el momento de fisuración es aproximadamente igual con respecto al valor límite de la zona 1, (0.5 KN\*m), como se observa en la Fig. 47.

#### b) Estado de comportamiento intermedio (zona 2)

Una vez se incrementa la carga, se alcanza la resistencia a tensión del concreto, en la cual ya se desarrollan grietas producidas por estos esfuerzos; estas tienen una ligera dirección de propagación perpendicular al eje neutro de la sección transversal, y este, a su vez, se desplaza hacia arriba con el agrietamiento progresivo a causa del aumento de la carga aplicada. La forma y la distribución de las grietas se muestran en la Fig. 34. Estas grietas presentaron anchos entre 3 y 5 milímetros, teniendo en cuenta que la resistencia de las vigas a la tensión por flexión se lleva hasta la fluencia del acero. En condiciones reales de servicio, la amplitud de estas grietas es muy pequeña, por lo que serían imperceptibles a la vista,

claro está, que dispongan de un adecuado diseño a flexión.

En esta zona de comportamiento, también llamada “Sección Fisurada”, el concreto no ofrece ninguna resistencia a los esfuerzos de tensión; toda la responsabilidad la asume el acero de refuerzo, y es evidente que aunque el concreto se limita a resistir los esfuerzos de compresión generados en el bloque superior al eje neutro, se sigue presentando una proporcionalidad entre las deformaciones producidas en el concreto y el acero; este efecto se muestra en la Fig. 47, donde el segmento de la curva de capacidad de la zona 2 presenta una mayor inclinación.

#### c) Estado de comportamiento final (zona 3)

Esta etapa se presenta cuando se sigue aumentando la carga aplicada; los esfuerzos y deformaciones aumentan, pero pierden la proporcionalidad, fenómeno que se conoce como “Relación No Lineal”. La causa principal del desarrollo de esta etapa es el proceso de fluencia del acero de refuerzo, originando un incremento excesivo de las deflexiones, aproximadamente desde 10 mm hasta 60 mm, aumentándose un 80%, con un bajo incremento de carga desde 11.4 KN hasta 13.7 KN para la viga 1, y hasta 12.3 KN para las vigas 2 y 3, es decir, aproximadamente 15%, como se observa en la Fig. 43.

### C. Relación del concreto confinado y no confinado

Tomando el modelo estudiado por Kent y Park, visto en II-D-1, se muestra en la Fig. 48 la curva esfuerzo-deformación para el concreto. Este modelo asume que el refuerzo transversal utilizado no altera las deformaciones hasta 0.002, en donde el concreto alcanza la máxima resistencia a la compresión y toda la sección trabaja como un solo bloque. A partir de la deformación de 0.002, el comportamiento de la sección de concreto se fracciona y, por ende, las deformaciones unitarias varían con la misma aplicación de carga, hasta tal punto que el acero de refuerzo permite aumentar las deformaciones del concreto confinado desde 0.022 hasta 0.0379, es decir, aproximadamente un 70% más.

Así mismo, el acero de refuerzo mejora la ductilidad

del concreto, y cuando los esfuerzos en el concreto descienden hasta  $0.50f'_c$  (4.9 MPa), las deformaciones aumentan en 0.009958, aproximadamente tres veces más que la deformación unitaria última teórica del concreto (0.003).

Finalmente, el concreto confinado se comporta con la capacidad de resistir esfuerzos para grandes deformaciones mayores a 0.0379. En resumen, en la Tabla 6 se pueden ver los parámetros calculados.

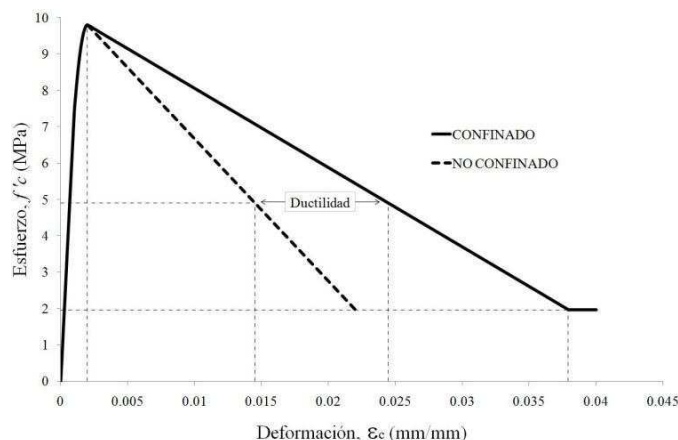


Fig. 48. Curva esfuerzo-deformación propuesta por Kent y Park

Tabla 6. Parámetros del concreto confinado y no confinado obtenidos por el método de Kent y Park

Ítem	Descripción	Unidad	Concreto confinado	Concreto no confinado
$f'_c$	Esfuerzo máximo del concreto	MPa	9.80	9.80
$E_c$	Módulo de elasticidad del concreto	MPa	14515	14515
$\epsilon_c$	Deformación al esfuerzo máximo del concreto	mm/mm	0.002	0.002
$\nu$	Cuantía de refuerzo transversal	mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup>	0.00207	-
$\nu_l$	Cuantía de refuerzo longitudinal inferior	mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup>	0.01174	-
$\nu_l'$	Cuantía de refuerzo longitudinal superior	mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup>	0.01174	-
$\epsilon_{cu}$	Deformación última del concreto	mm/mm	0.022	0.038
$f_y$	Esfuerzo de fluencia del acero	MPa	435.6	-
$f_u$	Esfuerzo de rotura del acero	MPa	568.6	-

Otro método desarrollado para el análisis del comportamiento del concreto confinado y no confinado es el propuesto por J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park, visto en II-D-2, el cual utiliza nuevas variables de cálculo, en las que se incluyen la colocación de estribos suplementarios, modelos para secciones de concreto circulares reforzadas por estribos circulares o espirales, el análisis del esfuerzo efectivo en el refuerzo de confinamiento, etc.

En la Fig. 49 se presenta el comportamiento de la curva esfuerzo-deformación, y los resultados obtenidos por medio de este análisis se definen en la Tabla 7.

Como se puede observar, este método aumenta la resistencia del núcleo confinado casi un 50% de la resistencia del concreto a la compresión (9.8 MPa a 14.52 MPa); aumento causado por la resistencia que ofrece el refuerzo de confinamiento a las deformaciones transversales internas del concreto.

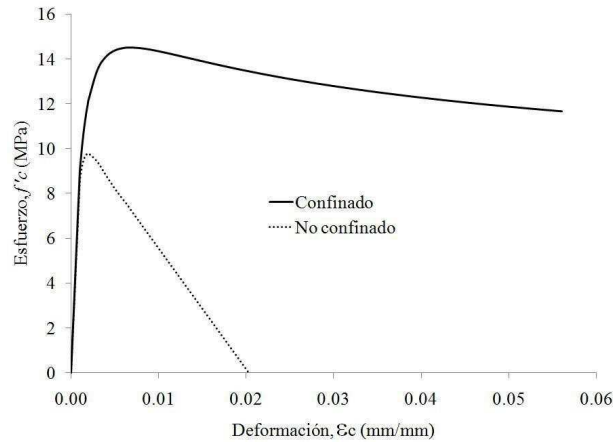


Fig. 49. Curva esfuerzo-deformación propuesta por J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

Tabla 7. Parámetros del concreto confinado y no confinado obtenidos por el método de J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park

Ítem	Descripción	Unidad	Concreto confinado	Concreto no confinado
$f'_{co}$	Esfuerzo máximo del concreto no confinado	MPa	9.80	9.80
$E_c$	Módulo de elasticidad del concreto	MPa	14515	14515
$\epsilon_c$	Deformación al esfuerzo pico del concreto	mm/mm	-	0.002
$\rho_x$	Cuantía de refuerzo transversal en sentido X	mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup>	0.005512	-
$\rho_y$	Cuantía de refuerzo transversal en sentido Y	mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup>	0.005512	-
$f'_l$	Esfuerzo efectivo de confinamiento	MPa	0.81	-
$f'_{cc}$	Esfuerzo del concreto confinado	MPa	14.52	9.80
$\epsilon_{cc}$	Deformación al esfuerzo del concreto confinado	mm/mm	0.006815	0.002
$E_{sec}$	Módulo secante del concreto	MPa	2130	4900
$\epsilon_{sp}$	Deformación del concreto de recubrimiento a la falla por compresión y no produce algún tipo de esfuerzo	mm/mm	-	0.020275
$\epsilon_{cu}$	Deformación última del concreto	mm/mm	0.056113	0.006421
$f_y$	Esfuerzo de fluencia del acero	MPa	424.6	424.6
$f_u$	Esfuerzo de rotura del acero	MPa	653.5	653.5

La deformación última, producida por la fractura del concreto confinado, aumenta hasta 0.0561, es decir, que el confinamiento hace que se mejoren las características esfuerzo-deformación del concreto, modificando un comportamiento frágil por uno más dúctil.

Este método permite factores de aumento del esfuerzo en el concreto confinado hasta de 2.3 (ver Fig. 9), dependiendo del esfuerzo efectivo de confinamiento.

#### D. Análisis del comportamiento inelástico

Para determinar el comportamiento de las deflexiones en el rango inelástico es necesario establecer con exactitud la forma del bloque de esfuerzos y las deformaciones del punto justo cuando se presenta la fluencia del acero, es decir, cuando inicia la zona dúctil y un punto antes de la falla (ver Fig. 47).

La Fig. 50 muestra la sección transversal comprimida y especifica las profundidades del eje neutro según

el tipo concreto. En el análisis realizado se tiene en cuenta el espesor del concreto desconchado, debido a que la sección analizada es muy pequeña y es un volumen considerable de la sección total; pero para secciones reales, este volumen puede ser despreciado y se obtienen resultados con poco error.

Las fuerzas internas presentes son tensión y compresión; la fuerza de tensión es producida por el refuerzo, y la fuerza de compresión es la sumatoria de las fuerzas producidas por el concreto dentro de los estribos, el concreto fuera de los estribos y por el acero a compresión.

### 1) Bloque de esfuerzos en la fluencia del acero

Es necesario recurrir al proceso de iteración para determinar el punto en el cual se presenta la fluencia del acero.

Utilizando el procedimiento descrito en II-H, en la Fig. 51 se muestra el perfil del bloque de compresiones para el punto analizado. Este bloque de esfuerzos presenta las mismas características del bloque 2, presentado en la Fig. 15c, ya que la deformación unitaria  $\epsilon_{cm}$  a la cual se cumple el equilibrio de fuerzas es de 0.00222, mayor que 0.002. En la Tabla 8 se presentan los parámetros del bloque de compresión.

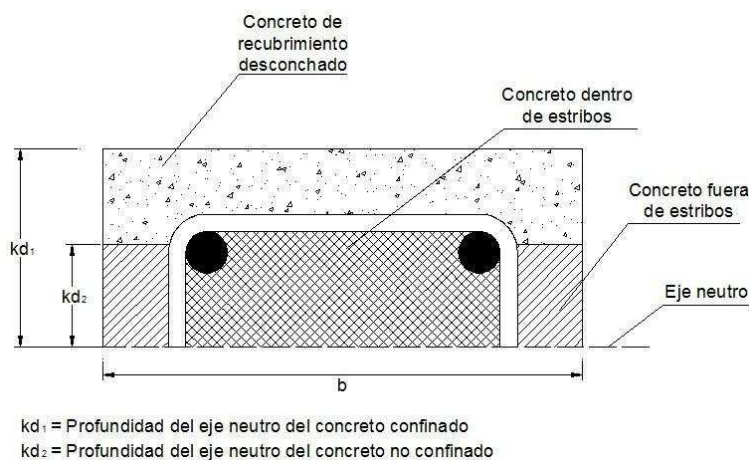


Fig. 50. Sección transversal comprimida

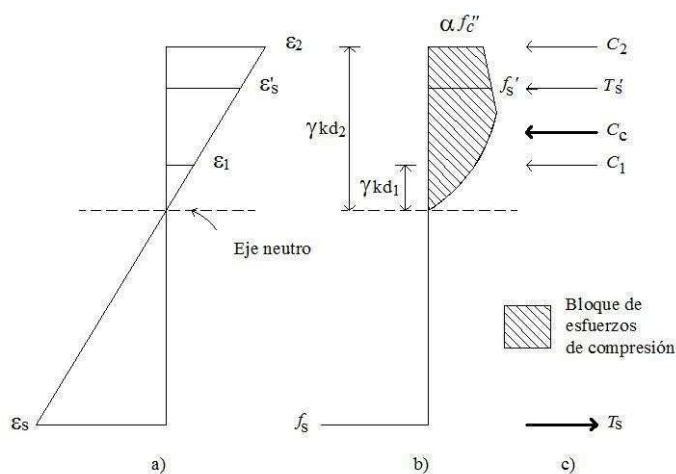


Fig. 51. Bloque de esfuerzos en el punto de fluencia. a) Deformaciones; b) Esfuerzos; c) Fuerzas internas

Tabla 8. Parámetros del bloque de esfuerzos de compresión para el punto de fluencia

	$\epsilon_m$	$kd$ (mm)			$T$ (KN)	$C$ (KN)
Concreto dentro de estribos	0.00222	45.45	0.699	0.382	-	24.9
Concreto fuera de estribos	0.00115	23.54	0.465	0.353	-	3.2
Acero de compresión	0.00106	21.70	-	-	-32.1	-
Acero de tensión	0.001993	40.80	-	-	60.2	-
Total					28.1	28.1

## 2) Bloque de esfuerzos en un punto antes de la falla

Utilizando el procedimiento anterior y con ayuda de la curva esfuerzo-deformación de la Fig. 48, para una deformación unitaria correspondiente al 50% de la resistencia a la compresión (4.9 MPa),  $\epsilon_m = 0.025$ , mayor que la máxima permitida por el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10 ([7], capítulo C.10.2.3), se muestra en la Fig. 52 el bloque de esfuerzos, y en la Tabla 9, los parámetros correspondientes al punto analizado. De la misma

forma, este bloque de esfuerzos corresponde al bloque tipo 2 de la Fig. 15c, teniendo en cuenta la deformación unitaria  $0.002 \leq \epsilon_m \leq 0.038$  (deformación unitaria última a la falla del concreto  $\epsilon_{cu}$  para el concreto confinado de la Tabla 6).

## 3) Curva teórica momento curvatura

La Fig. 53 muestra el comportamiento del momento flexionante con relación a la curvatura presentada en las vigas analizadas, obtenidas mediante el análisis inelástico.

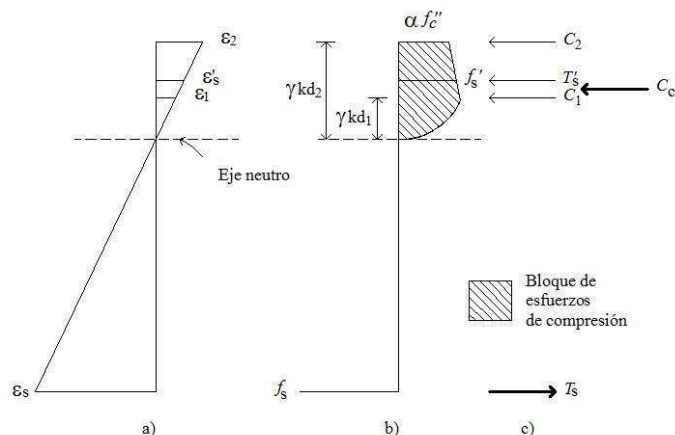


Fig. 52. Bloque de esfuerzos en un punto antes de la falla. a) Deformaciones; b) Esfuerzos; c) Fuerzas internas

Tabla 9. Parámetros del bloque de esfuerzos de compresión para el punto antes de la falla

	$\epsilon_m$	$kd$ (mm)			$T$ (KN)	$C$ (KN)
Concreto dentro de estribos	0.025	25.15	0.738	0.544	-	14.5
Concreto fuera de estribos	0.015	15.09	0.830	0.507	-	3.6
Acero de compresión	0.001392	1.40	-	-	-42.1	-
Acero de tensión	0.001993	61.10	-	-	60.2	-
Total					18.1	18.1

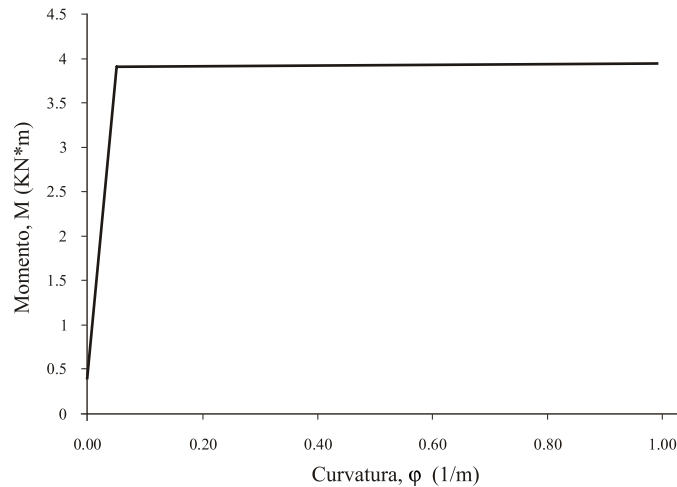


Fig. 53. Curva teórica momento-curvatura

El análisis de la Fig. 53 presenta, de manera similar al comportamiento experimental, tres zonas de comportamiento. La zona 1 se presenta cuando el momento flexionante tiene un valor de 0.53 KN\*m sin valores representativos de curvatura, es decir, que la carga no es suficientemente relevante para la sección. La zona 2 comprende los momentos flectores desde 0.53 KN\*m hasta 3.90 KN\*m; en esta etapa la sección pierde rigidez debido al agrietamiento del concreto, y las curvaturas empiezan a tomar un papel importante en la resistencia. En la zona 3 la ocurrencia de una articulación plástica es evidente, generada por la fluencia del acero a tensión, donde la sección permite el giro libremente, soportando un momento casi constante (hasta 3.94 KN\*m).

#### 4) Deflexiones a partir de las curvaturas

Como se estudia en II-J-1, es posible obtener las deflexiones y rotaciones a partir de la distribución

de curvatura a través de los estados elásticos y plásticos. En el presente análisis se idealiza una distribución de curvatura bilineal a través de la longitud del elemento, teniendo en cuenta que no se aceptaron las fluctuaciones por cambio de rigidez de la sección, causadas por las grietas. La Fig. 54 muestra la distribución de la curvatura a lo largo de la viga bajo momento último y la Tabla 10 muestra el resumen de los resultados obtenidos.

De la Fig. 54 se puede afirmar que las curvaturas tienen un comportamiento elástico hasta el punto en el que se presenta el momento que hace fluir el acero de refuerzo, y la importancia de la inercia sin fisurar no es relevante con respecto a la inercia fisurada. De la misma forma, la longitud de plastificación es directamente proporcional a la variación del momento desde el punto de fluencia hasta un punto antes de la falla, es decir, a mayor variación del momento, mayor longitud de plastificación.

Tabla 10. Deflexiones y rotaciones a partir de las curvaturas

<i>Punto</i>	<i>x</i> (m)	<i>M</i> (KN*m)	<i>(1/m)</i>	<i>(rad)</i>	<i>(mm)</i>
Fisuración	0.094	0.53	0.002060	0.000097	2.10
Fluencia	0.599	3.90	0.048845	0.015241	10.26
Antes de la falla	0.007	3.94	0.994036	0.006975	0.03
Total	0.700	-	-	0.022313	12.39

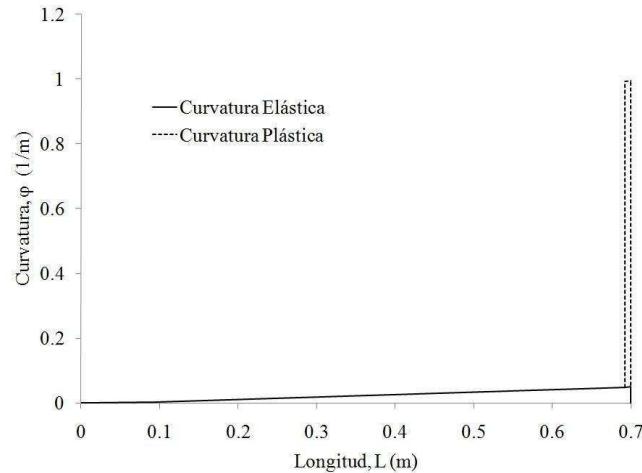


Fig. 54. Distribución de la curvatura a lo largo de la viga bajo momento último

### E. Modelación con el programa Xtract

Es posible predecir la capacidad de elementos estructurales ante diferentes estados de esfuerzo por medio de la utilización de programas computacionales como el Xtract [10]. Xtract fue creado como UCFyber, en la Universidad de California, en Berkeley, por el Dr. Charles Chadwell (profesor auxiliar en la Universidad Politécnica de California, en San Luis Obispo, CA). En 2001, Imbsen Software Systems adquirieron UCFyber y fue retitulado Xtract.

Xtract es un software de análisis representativo para el análisis de cualquier forma y material de una sección sujeta a algún tipo de carga o fuerza. Los tipos de análisis son: 1) Análisis de momento-curvatura, 2) Análisis de interacción de carga axial-momento y 3) Análisis de interacción momento-momento (Capacity Orbit). Este software permite la entrada de modelos de materiales no lineales, la generación de una sección transversal y la colocación de acero de refuerzo dentro de la sección. Se pueden entrar secciones transversales típicas manualmente o generarlas gráficamente.

#### 1) Análisis momento-curvatura

El análisis momento-curvatura es un proceso por el cual el comportamiento no lineal de una sección transversal puede ser establecido. Para secciones

elásticas, los momentos y curvaturas son relacionados con la rigidez a flexión ( $E_c$  y  $I_g$ ). Los materiales sometidos a incrementos de carga a compresión o tensión presentan deformaciones que comienzan a entrar en el rango no lineal.

Las secciones transversales que tienen momento último y curvatura última sustancialmente mayores que el momento y la curvatura a los cuales se produce la fluencia del acero, presentan secciones muy dúctiles. Para realizar un análisis de momento-curvatura sobre una sección transversal, es necesario inicialmente definir los materiales. Xtract utiliza el modelo de la curva esfuerzo-deformación, desarrollado por J. B. Mander, M. J. N. Priestley y R. Park, visto en la sección II-D-2.

#### 2) Curvas momento-curvatura

##### a) Concreto confinado e inconfinado

Utilizando los parámetros de la Tabla 7, la Fig. 55 muestra los cuadros de diálogo para la definición del concreto confinado e inconfinado.

##### 3) Acero de refuerzo

La definición del acero de refuerzo se hizo con los datos de la Tabla 4. La Fig. 56 muestra el cuadro de diálogo respectivo.

#### 4) Definición de la sección transversal

Con la geometría de la sección transversal de la viga y los detalles de refuerzo vistos en la Fig. 2, la Fig. 57 muestra la sección transversal, definida para el

análisis, sin deformar, codificada mediante el uso de colores; el color magenta corresponde al concreto confinado o de recubrimiento; el gris, al concreto confinado, y el negro, al acero de refuerzo.



Fig. 55. Definición del concreto confinado e inconfinado en el Xtrac

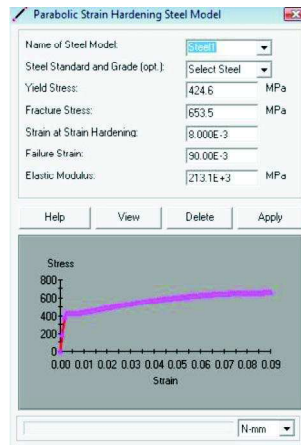


Fig. 56. Definición del acero de refuerzo en el Xtrac

Durante el proceso de análisis se observa, mediante una animación interactiva, lo que sucede en la sección transversal, obteniendo la sección deformada. Finalmente, la Fig. 58 muestra la sección deformada con la siguiente codificación:

- **Concreto confinado:**

Gris: Deformación por tensión después de la capacidad de tensión

Azul oscuro: Deformación por tensión antes de la capacidad de tensión

Verde oscuro: Deformación por compresión antes de la deformación de rotura

- **Concreto inconfinado:**

Rojo: Deformación por tensión después de la capacidad de tensión

Naranja: Deformación por tensión antes de la



capacidad de tensión

Azul claro: Deformación por compresión antes de la deformación de rotura

Cian: Deformación por compresión antes de desconcharse

Blanco: Concreto desconchado

- **Acero de refuerzo:**

Verde: Acero en tensión después de la fluencia

Amarillo: Acero en compresión después de la fluencia

Obsérvese que la sección transversal deformada tiene características similares a las presentadas en la sección transversal comprimida de la Fig. 50, como la posición del eje neutro y fraccionamiento de los bloques de concreto según el tipo de esfuerzo soportado.

5) *Curva momento-curvatura*

En la Fig. 59 se muestra la curva momento-curvatura obtenida por Xtract.

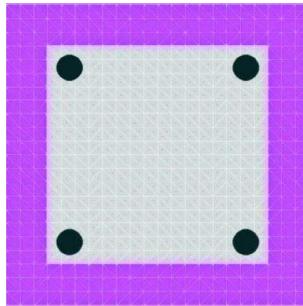


Fig. 57. Modelo de fibras de la sección transversal sin deformar en Xtract

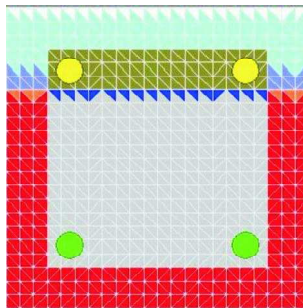


Fig. 58. Modelo de fibras de la sección transversal deformada en Xtract

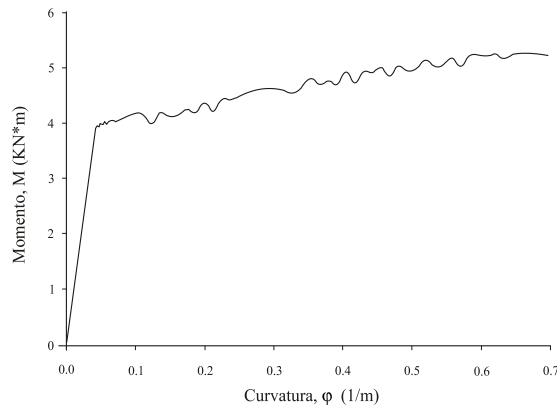


Fig. 59. Curva momento-curvatura por modelación en Xtract

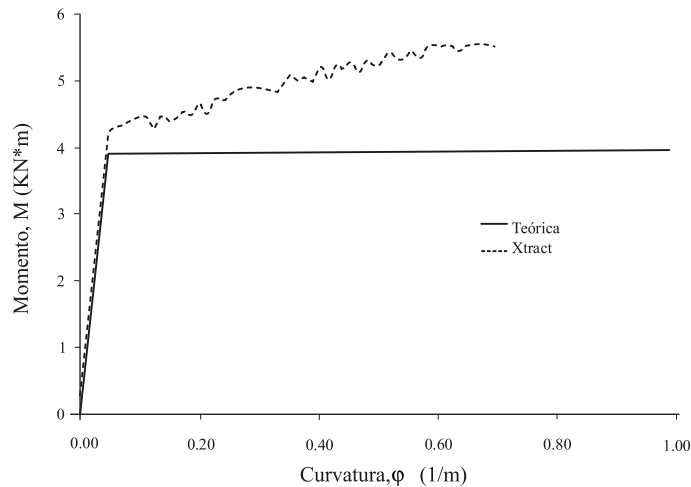


Fig. 60. Relación momento-curvatura teórica vs. momento-curvatura por modelación en Xtract

La Fig. 60 presenta la relación entre el comportamiento del momento y la curvatura obtenida por análisis teórico y por modelación del Xtract. La zona elástica no genera diferencias entre los métodos, pero a diferencia de la zona plástica, su relación difiere a medida que aumenta la ductilidad. El modelo teórico es más conservador teniendo en cuenta que se desprecia la resistencia ofrecida por endurecimiento del acero, aumentando la ductilidad con un breve aumento del momento flexionante. El modelo generado por Xtract, por el contrario, aumenta la ductilidad a medida que la sección ofrece mayor capacidad por resistencia, y a diferencia del anterior, este modelo asume toda la capacidad del acero (ver Fig. 56), lo que permite aumentar la capacidad por resistencia.

Es evidente que pueden aceptarse resultados generados por la modelación del Xtract, pero al mismo tiempo, es criterio del diseñador aceptar la relaciones momento-curvatura por modelación con una forma bilineal, despreciando la mayor capacidad que ofrece la sección después de la fluencia del acero.

## V. CONCLUSIONES

El Reglamento Colombiano de Construcciones Sismo Resistente NSR-10 permite, de manera general, determinar deflexiones instantáneas aproximadas,

basadas en un modelo de inercia empírico que relaciona las secciones antes y después de la primer fisura, pero conservándose dentro del rango elástico cuando la relación entre los esfuerzos y las deformaciones todavía conservan alguna proporcionalidad.

Una de las variables significativas en el comportamiento tanto lineal como no lineal de las estructuras de concreto es la inercia, que a diferencia de otras, no es posible determinarse en el campo experimental, ya que solo depende del comportamiento de la sección transversal.

La relación carga-deflexión de los modelos experimental y teórico presentan una similitud en su comportamiento, teniendo en cuenta que la plasticidad inicia aproximadamente cuando la sección resiste un momento de 4 KN\*m, generando una deflexión de 10 mm.

Es de vital importancia en el diseño de elementos de concreto reforzado, conocer a plenitud propiedades y características de los materiales, ya que permite al diseñador maximizar el comportamiento y desempeño en las estructuras.

El análisis teórico presenta resultados conservadores respecto a los experimentales en cuanto a las

propiedades físicas del concreto, lo que indica que se puede considerar que en algún momento se dispone de reservas de capacidad de las estructuras, las cuales pueden enmendar errores presentados en el análisis de cargas y solicitaciones.

Aunque la sección puede llegar a tener una capacidad mayor por resistencia, no se tuvo en cuenta la recuperación de deformaciones, debido a que, por la forma de aplicación de la carga, las vigas se llevaron hasta la falla, lo que indica que, en algunos casos, los elementos de concreto reforzado son solicitados a esfuerzos condicionados más por funcionalidad que por resistencia.

Las secciones de concreto doblemente reforzadas mejoran considerablemente el comportamiento inelástico y generan en la sección capacidad para mantener una carga, aunque esta presente grandes deformaciones, logrando aumento en la ductilidad y mejor desempeño por deflexiones a largo plazo.

El acero de refuerzo, además de ser el complemento del concreto dentro de una sección de concreto reforzado, realiza la función de confinamiento, que se traduce en mayor ductilidad y aumenta la capacidad del concreto para deformarse cuando es sometido a mayores esfuerzos.

En el análisis teórico se desprecia la capacidad del acero para resistir mayores esfuerzos generados por el endurecimiento por deformación, obteniendo un comportamiento bilineal de la curva esfuerzo-deformación, permitiendo una sección conservadora, ya que para resistencias mayores a la de fluencia se incrementaría la capacidad de las vigas de resistir cargas a flexión y al mismo tiempo generaría mayores esfuerzos cortantes generándose una falla frágil en lugar de una falla dúctil.

Observando el comportamiento de los modelos experimentales, se determinó que las fisuras producidas en las vigas fueron generadas por los esfuerzos de tensión en las fibras más alejadas sometidas a tracción con una dirección de agrietamiento perpendicular al eje longitudinal de las vigas y una proyección de avance hacia el interior,

lo que indica que los esfuerzos cortantes no son significativos.

Debido a que los modelos de las vigas analizadas tienen secciones pequeñas y cuentan con suficiente acero de refuerzo, hasta tal punto que se pueden considerar sobrerreforzadas, no se consideraron los efectos producidos por los esfuerzos cortantes, por lo cual se hacen necesarias nuevas investigaciones y con modelos a escala real.

La longitud de plastificación depende directamente de la variación del momento del punto de fluencia respecto al punto de falla, es decir, cuando en la sección se presenta una diferencia considerable de momento, la longitud de la articulación es mayor.

El modelo de análisis realizado con la ayuda del programa Xtract presenta resultados lógicos, cercanos a los experimentales, por tanto, se puede afirmar que este método de análisis, basado en fibras, simula con gran aproximación el comportamiento del concreto reforzado, por lo que puede convertirse en una herramienta muy útil para los diseñadores.

Finalmente, a manera de recomendación, es necesario realizar investigaciones con modelos a escala real, con diferentes condiciones de carga y apoyo; además de incluir modelos de adherencia entre el concreto y el acero y los efectos producidos por los esfuerzos cortantes y torsionales; de la misma manera, utilizar métodos de simulación de elementos finitos.

## VI. NOMENCLATURA

- $A_c$  = Área efectiva del núcleo confinado
- $A_c$  = Área del núcleo de la sección medido centro a centro del estribo de refuerzo
- $A_{cc}$  = Área del núcleo medido centro a centro del estribo de refuerzo, excluyendo el refuerzo longitudinal
- $A_s$  = Área del acero de refuerzo a tensión
- $A_{s'}$  = Área del acero de refuerzo a compresión
- $A_{sx}$  = Área total de las barras transversales alrededor del eje  $x$
- $A_{sy}$  = Área total de las barras transversales alrededor del eje  $y$

$b$	= Ancho total de la sección transversal	$y_t$	= Distancia desde el eje neutro de la sección fisurada a la fibra extrema en tracción
$b_c$	= Dimensión del núcleo de concreto medido centro a centro del perímetro del estribo en la dirección $x$	$\delta$	= Deflexión transversal por flexión (en mm)
$b''$	= Ancho del núcleo confinado medido al exterior de los estribos	$\epsilon_c$	= Deformación unitaria del concreto (en mm/mm).
$C_c$	= Fuerza de compresión en el concreto	$\epsilon_{cm}$	= Cualquier deformación unitaria dada para el concreto en la fibra extrema a compresión
$C_1$	= Fuerza de compresión en el concreto dentro de los estribos	$\epsilon_0$	= Deformación unitaria del concreto a la máxima resistencia a la compresión, generalmente igual a 0.002
$C_2$	= Fuerza de compresión en el concreto fuera de los estribos	$\phi$	= Diámetro del refuerzo (en octavos de pulgada)
$d_c$	= Dimensión del núcleo de concreto medido centro a centro del perímetro del estribo en la dirección $y$	$\theta$	= Curvatura, rotación por longitud unitaria (en 1/m)
$E_c$	= Módulo de elasticidad del concreto	$\gamma$	= Factor de modificación que tiene en cuenta las propiedades reducidas del concreto de peso liviano. Para concreto de peso norma
$E_s$	= Módulo de elasticidad del acero	$\theta_p$	= Rotación en la articulación plástica en radianes
$d$	= Distancia desde la fibra extrema a compresión al centroide del refuerzo longitudinal en tracción	$\rho$	= Cuantía de refuerzo longitudinal en tracción
$d'$	= Distancia desde la fibra extrema a compresión al centroide del refuerzo longitudinal en compresión	$\rho_{cc}$	= Relación del área de refuerzo longitudinal al área del núcleo de la sección
$f'_c$	= Resistencia a compresión del concreto a 28 días	$\rho'$	= Cuantía de refuerzo longitudinal en compresión
$f''_c$	= Resistencia a compresión del concreto confinado	$\rho_s$	= Relación del volumen de refuerzo transversal al volumen del núcleo de concreto confinado medido al exterior de los estribos
$f'_{l}$	= Esfuerzo efectivo de confinamiento lateral		
$f_r$	= Módulo de rotura del concreto		
$f_s$	= Esfuerzo en el acero de refuerzo		
$f_y$	= Resistencia a la fluencia del acero		
$f_u$	= Resistencia a la rotura del acero		
$I_{cr}$	= Momento de inercia de la sección fisurada transformada a concreto		
$I_e$	= Momento de inercia efectivo		
$I_g$	= Momento de inercia de la sección bruta		
$M_a$	= Momento máximo por cargas de servicio		
$M_{cr}$	= Momento de fisuración		
MPa	= Unidades de esfuerzo (Megapascales)		
$n$	= Relación del módulo de elasticidad del acero y el módulo de elasticidad del concreto		
$L$	= Longitud (en m)		
$P$	= Carga aplicada (en N)		
$S$	= Sección de elemento		
$s$	= Separación de los estribos		
$s'$	= Espacio libre entre estribos		
$T$	= Resistencia a la tensión indirecta del concreto		
$T_s$	= Fuerza en el acero		

## Agradecimientos

Los autores agradecen al personal de laboratorios y a los docentes de la Facultad de Ingeniería de la Uptc, especialmente al ingeniero Ángel Eduard Rodríguez Suesca, y al ingeniero Boris Aguirre Junco, docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia.

## Referencias

- 1) ICONTEC, *Ingeniería civil y arquitectura. Ensayo de resistencia a la compresión de cilindros normales de concreto*, Norma NTC - 673, Colombia, nov. 1994.
- 2) INVIAS, *Resistencia a la flexión del concreto. Método de la viga simple cargada en el punto central*, Norma I.N.V.E - 415.
- 3) ICONTEC, *Ingeniería civil y arquitectura.*

*Método de ensayo para determinar el módulo de elasticidad estático y la relación de poisson en concreto a compresión*, Norma NTC - 4025, Colombia, oct. 1994.

- 4) ICONTEC, *Siderurgia. Ensayo de tracción para materiales metálicos. Método de ensayo a temperatura ambiente*, Norma NTC - 2, Colombia, nov. 1995.
- 5) ICONTEC, *Ingeniería civil y arquitectura. Método de ensayo para determinar resistencia a la tensión indirecta de especímenes cilíndricos de concreto*, Norma NTC - 722, Colombia, nov. 1996.
- 6) J. Segura, *Estructuras de concreto I*, Universidad Nacional de Colombia, Santa Fe de Bogotá, Colombia, Ed. 5, 2002.
- 7) *Reglamento colombiano de construcción sismo resistente*, NSR-10, AIS, Colombia, Bogotá, marzo de 2010.
- 8) R. Park y T. Paulay, *Estructuras de concreto reforzado*, Editorial Limusa S. A, México, 1978.
- 9) J. B. Mander, M. J. N. Priestley and R. Park, "Theoretical stresses – strain model for confined concrete", *Journal of The Structural Division*. ASCE, Vol 114 N° 8, pp 1804 – 1826, August 1988.
- 10) Xtrac, TRC and C. Chadwell, Ph.D., P.E., v. 3.0.8, 2007. Disponible en: <http://www.imbsen.com/xtract.htm>
- 11) A. H. Nilson, *Diseño de estructuras de concreto*, Editorial McGraw-Hill, Santa Fe de Bogotá, Colombia, Ed. 12, 1999.
- 12) R. Rochel, *Hormigón reforzado*, Fondo Editorial Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, 2007.
- 13) O. González Cuevas y Robles Fernández, *Concreto reforzado*, Editorial Limusa, México, Ed. 4.
- 14) A. Bedford y W. Fowler, *Estática, mecánica para ingeniería*, Editorial ADDISON-WESLEY IBEROAMÉRICA, USA, 1996.
- 15) A. Gómez, "Influencia de la no linealidad de material en deflexiones inmediatas de vigas de concreto reforzado", Trabajo de grado dirigido por J. M. Lizarazo, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, 2006.

