

CONTROLADOR ROBUSTO LMI PARA UN HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

(Robust Controller LMI for helicopter with two degrees of freedom)

Oscar Iván Higuera-Martínez*, Juan Mauricio Salamanca**

*Escuela de Ingeniería Electrónica, UPTC. Grupo DSP-UPTC. oscar.higuera@uptc.edu.co **Escuela de Ingeniería Electrónica, UPTC. Grupo DSP-UPTC. juan.salamanca@uptc.edu.co.

(Recibido marzo 28 de 2015 y aceptado mayo 6 de 2015)

Resumen:

Este artículo presenta el diseño de un controlador robusto H_∞ usando técnicas de desigualdades matriciales lineales (LMI), para controlar la posición de Pitch y de Yaw en un helicóptero. Se presenta el diseño de un controlador FF+LMI con el propósito de conseguir la estabilización del sistema, y adicionalmente se realiza el diseño de un controlador FF+LMI+Integrador, para hacer que el error de seguimiento sea igual a cero. Posteriormente se presentan los resultados de las simulaciones sobre el modelo no lineal del sistema, así como una comparación con los controladores FF+LQR y FF+LQR+I desarrollados por los fabricantes del dispositivo.

Palabras clave: control robusto, desigualdades matriciales lineales, modelo nominal, sistema no lineal.

Abstract:

This article presents the design of a robust H_∞ controller using techniques of linear matrix inequalities (LMIs) for controlling the position of Pitch and Yaw in a helicopter. Designing a FF + LMI controller is presented for stabilizing the system, and further the design of LMI + FF + integrator controller is performed to make the tracking error equal to zero. Thereafter the results of simulations are showed on the nonlinear system model and a comparison with FF+LQR and FF+LQR+I which were developed by device manufacturers.

Keywords: robust control, linear matrix inequalities, nominal model, nonlinear systems.

1. INTRODUCCIÓN

El helicóptero experimental Quanser® de dos grados de libertad consiste en el modelo de un helicóptero montado en una base fija con dos hélices que se manejan por motores DC (ver Figura 1). La hélice derecha o delantera controla la elevación de la nariz del helicóptero sobre el eje horizontal, y la hélice izquierda o trasera controla la dirección.

El sistema Quanser documentado en este artículo es intrínsecamente inestable y por tanto se necesita aplicar la teoría de control realimentado para estabilizar el sistema. A fin de realizar esto se propone diseñar una estrategia de control robusto para estabilizar el sistema utilizando técnicas LMI (Linear Matrix Inequality).

Adicionalmente, la posición Pitch es regulada utilizando un lazo de realimentación *feed-forward* que compensa el torque gravitacional (τ_g) (Salamanca, Díaz & Higuera, 2007).

El diseño de controladores LMI está basado en los modelos lineales del sistema y en el problema de optimización, para encontrar una solución al problema planteado, logrando así la estabilidad y robustez del sistema.

Existen ejemplos de la aplicabilidad de diferentes tipos de control sobre este sistema, en algunos ejemplos (Guzmán, Cardozo & Cárdenas, 2014) se presenta el diseño empleando técnicas PID y lógica difusa. En otros (Ibáñez, 2014) se indica el modelado, la identificación, la

simulación y el control óptimo de un helicóptero con dos grados de libertad. En Bedoya y Marín (2014) se muestra la construcción y control adaptativo de un helicóptero de dos grados de libertad, y en Carrillo *et al.* (2015) se da la sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables, aplicado a este sistema.

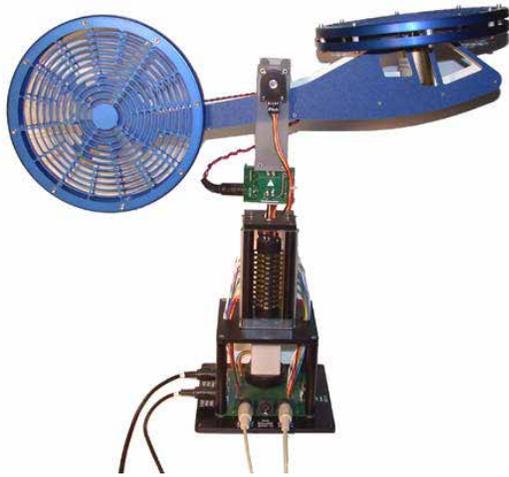


Figura 1. Helicóptero experimental Quanser de dos grados de libertad.

Fuente: página web de quanser.com

2. MODELADO DEL SISTEMA

El helicóptero de dos grados de libertad (Figura 1) montado sobre el pivó por el eje del ángulo de Pitch (θ) y por el eje del ángulo de Yaw (ψ), como es mostrado en la Figura 2. El Pitch es definido positivo cuando la nariz del helicóptero sube, y el Yaw es definido positivo para un giro en el sentido de las manecillas del reloj. Hay una fuerza de empuje F_p que actúa en el eje del Pitch, que es normal a la hélice delantera, y una fuerza de empuje F_y que actúa en el eje del Yaw, que es normal a la hélice trasera (Salamanca *et al.*, 2007).

Por consiguiente, un torque de Pitch está aplicado a una distancia r_p del eje de Pitch y un torque de Yaw está aplicado a una distancia r_y del eje de Yaw. La fuerza gravitatoria (F_g) genera una torque en el centro de masa del helicóptero que hala hacia abajo la nariz del helicóptero. Como es mostrado en la Figura 2, el centro de masa está a l_{cm} de distancia del eje de pivó a lo largo de la longitud del helicóptero.

El modelo trabajado en Salamanca *et al.*, (2007) está descrito por las ecuaciones de movimientos, las cuales

se encuentran usando el método del Lagrangiano. Posteriormente se hallan las cinemáticas del centro de masa del helicóptero. Las cinemáticas se usan para encontrar las energías potencial y cinética, involucradas en el sistema del helicóptero. Posteriormente se usa el método de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones no lineales que describen los movimientos del helicóptero, obteniendo finalmente (1).

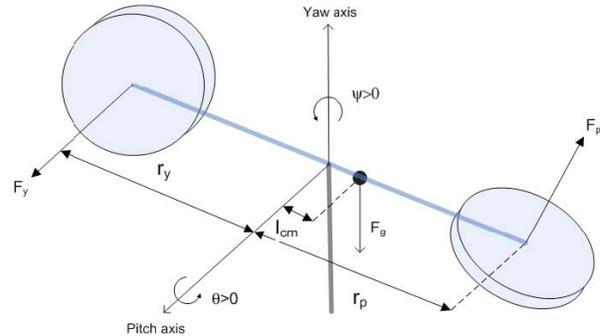


Figura 2. Dinámica del helicóptero experimental Quanser.

$$\begin{aligned} (J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= K_{pp} V_{m,p} + K_{py} V_{m,y} - m_{heli} g l_{cm} \cos \theta \\ &- B_p \dot{\theta} - m_{heli} l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 \\ (J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2 \cos \theta) \ddot{\psi} &= K_{yy} V_{m,y} + K_{yp} V_{m,p} - B_y \dot{\psi} \\ &+ 2m_{heli} l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

De las ecuaciones no lineales de movimientos (1) se obtiene el modelo de espacio de estados lineal del helicóptero, sobre el punto de operación $X_0 = (0,0,0,0)$, obteniendo (2).

$$\begin{aligned} (J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= K_{pp} V_{m,p} + K_{py} V_{m,y} - B_p \dot{\theta} \\ (J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\psi} &= K_{yy} V_{m,y} + K_{yp} V_{m,p} - B_y \dot{\psi} \end{aligned} \quad (2)$$

Con: $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ y $u = [V_{m,p} \ V_{m,y}]^T$, se obtiene el modelo nominal (3), los valores dados por el fabricante del helicóptero se pueden observar en la Tabla 1.

Al realizar el análisis de controlabilidad, estabilidad y observabilidad del sistema nominal se observa que la matriz de controlabilidad del sistema tiene rango 4, al igual que la matriz de observabilidad tiene rango 4 y los valores propios del sistema son $[0, 0, -9.2751, -3.4955]$.

Lo que demuestra que el sistema es marginalmente inestable, ya que posee dos valores propios en 0.

Tabla 1. Valores nominales del sistema Quanser 2DOF.

| Símbolo | Descripción | Valor |
|-------------------------|--|--------------------------|
| K_{pp} | Thrust torque constant acting on Pitch axis from Pitch motor/propeller | 0 . 2 0 4 N.m/V |
| K_{yy} | Thrust torque constant acting on Yaw axis from Yaw motor/propeller | 0 . 0 7 2 N.m/V |
| K_{py} | Thrust torque constant acting on Pitch axis from Yaw motor/propeller. | 0 . 0 0 6 8 N.m/V |
| K_{yp} | Thrust torque constant acting on Yaw axis from Pitch motor/propeller | 0 . 0 2 1 9 N.m/V |
| B_p | Equivalent viscous damping about Pitch axis | 0.800 N/V |
| B_y | Equivalent viscous damping about Yaw axis | 0.318 N/V |
| m_{heli} | Total moving mass of the helicopter. 1.3872 kg lcm l cm | 1.3872 kg |
| lcm | Center-of-mass length along helicopter body from Pitch axis | 0.186 cm |
| J_{eq,p} | Total moment of inertia about Pitch pivot | 0.0384 kg m ² |
| J_{eq,y} | Total moment of inertia about Yaw pivot | 0.0432 kg m ² |

Fuente: Quanser 2 DOF Helicopter User and Control Manual.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{B_p}{J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y}{J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2} & \frac{K_{py}}{J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2} \\ \frac{K_{yp}}{J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2} & \frac{K_{yy}}{J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2} \end{bmatrix} U \quad (3)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U$$

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

3.1 Especificaciones de desempeño

En cuanto a las consideraciones de desempeño, se requiere que en estado estacionario las posiciones Pitch y Yaw se mantengan en X_0 dado, y se rechacen pequeñas perturbaciones; es decir, se desea error de estado estacionario nulo. Se tiene ruido de medición de la posición θ y ψ , por tanto hay que diseñar un filtro en la entrada de medición, de tal manera que rechace las señales de entrada de alta frecuencia. La acción de control debe ser penalizada en alta frecuencia con alguna función de peso, ya que se tiene una relación directa de la señal de control y la respuesta del sistema. Adicionalmente, la velocidad angular, tanto de Pitch como de Yaw, no puede ser medida, por lo que se debe diseñar un filtro que nos proporcione dichas señales para el controlador. Se deben evitar picos excesivos en los voltajes de los motores, para evitar daños de tipo físico, por tanto, los actuadores tienen señales máximas, de $\pm 24V$ para el motor de Pitch y de $\pm 15V$ para el motor de Yaw, por lo que se deben implementar saturadores en el sistema.

3.2 Esquema general del sistema

Para el diseño del controlador robusto H_∞ basado en técnicas LMI, se tiene en cuenta el modelo general dado en (4), el cual corresponde al modelo de la planta $P(s)$ del sistema realimentado presente en la Figura 3.

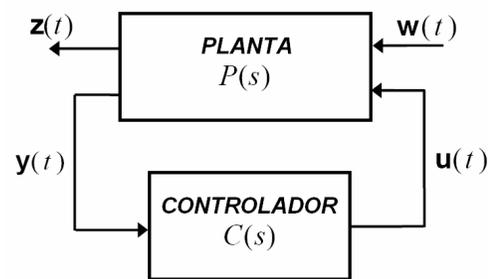


Figura. 3. Interconexión por realimentación de la planta y el controlador.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B_1w(t) + B_2u(t)$$

$$Z = C_1X(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \quad (4)$$

$$Y = C_2X(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t)$$

3.3 Modelo con incertidumbres

Las incertidumbres se plantean como una variación del sistema nominal de la matriz A y la matriz B; es decir, se plantea un sistema como el presente en (5), para de esta forma llegar a (6). Primero, para la variación de los parámetros, se hizo la variación en un $\pm 10\%$ sobre el valor nominal. Los parámetros que se variaron fueron $J_{eq,p}$, $J_{eq,y}$, B_p , B_y , K_{pp} , K_{yy} , K_{yp} , y K_{py} , y las variaciones sobre el punto de operación se realizaron para el ángulo de Pitch y de Yaw de ± 15 grados, y debido a que se desea que las velocidades angulares sean cero, la variación sobre estos se hizo de ± 10 grados.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (A + \Delta_A)X + (B + \Delta_B)U \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{X} = AX + (\Delta_A X + \Delta_B U) + BU \quad (6)$$

Después de realizar las variaciones se logra encontrar que las variables que más influyen en la incertidumbre son los elementos de las filas 3 y 4 de las columnas 3 y 4 de la matriz A y las dos columnas de la matriz B. Con base en esto se obtiene la matriz B_1 , la cual estaría descrita en (7).

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3571 & 0.0120 & 0.4311 & 0.0432 \\ 0.0372 & 0.123 & 0.0418 & 0.5427 \end{bmatrix} \mapsto W \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.4 Diseño del controlador LMI

El diseño del controlador LMI está basado en el sistema (4), considerando la señal de control como en (8), se obtiene el sistema presentado en (9).

$$u(t) = -KX(t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \underbrace{(A - B_2 K)}_{A_{lc}} X(t) + B_1 w(t) \\ Z &= \underbrace{(C_1 - D_{12} K)}_{C_{lc}} X(t) + D_{11} w(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$Y = (C_2 - D_{22} K)X(t) + D_{21} w(t)$$

$$Z(t) = [C_{lc}(SI - A_{lc})^{-1} B_1 + D_{11}] X(t) \quad (10)$$

Con la función del sistema en lazo cerrado (10), se diseña un controlador por realimentación de estados empleando técnicas LMI, entonces, considerando $C_2 = I^{m \times n}$ y $D_{21} = 0$. El problema es encontrar la matriz de realimentación de estados óptima H_∞ , $K \in \mathbb{R}^{2 \times n}$, tal que $\|FL(P(s), K)\|_\infty$ sea mínima, para esto enunciamos el siguiente lema (Kebede, 2006).

LEMA (Bounded Real Lemma for Continuous-Time Systems): considere una función de transferencia continua $T(s)$, la cual no necesariamente es de realización mínima, $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Entonces, $T(s) < \gamma$, para $\gamma > 0$ y **A** será asintóticamente estable si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva, $P > 0$, que satisface la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

Aplicando el lema anterior al sistema en lazo cerrado se obtiene (12); empleando las propiedades dadas en (13), se puede llegar finalmente a que el diseño del controlador se da como un problema de optimización.

$$\begin{bmatrix} P(A - B_2 K) + (A - B_2 K)^T P & PB_1 & (C_1 - D_{12} K)^T \\ B_1^T P & -\gamma I & D_{11}^T \\ (C_1 - D_{12} K) & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L = KQ \mapsto K &= LQ^{-1} \mapsto Q = P^{-1} > 0 \\ P &= P^T > 0 \\ Y = PX \in \mathbb{R}^n &\rightarrow X = P^{-1}Y \rightarrow X^T = Y^T P^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

El problema de estabilidad de la síntesis del control óptimo ($K = LQ^{-1}$) por realimentación - H_∞ es minimizar $\gamma \in \mathfrak{R}$ con $Q > 0$, tal que la siguiente LMI sea factible.

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - (B_2L + L^TB_2^T) & B_1 & (C_1Q - D_{12}L)^T \\ B_1 & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1Q - D_{12}L & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

La optimización de este problema para lograr el mínimo valor de γ se realiza empleando el Toolbox de LMI de Matlab, obteniendo como resultado para el sistema nominal y la matriz B_1 definidas anteriormente:

$$\gamma = 0.37.$$

$$K = \begin{bmatrix} 264.6983 & 21.7836 & 21.3092 & 1.7475 \\ -41.2847 & 5.1074 & -3.4622 & 2.4247 \end{bmatrix}$$

Valores singulares de $A_{lc} = [-46.0565 \ -13.5920 \ -1.5195 \ -3.8832]$, con este controlador K se procede a realizar la simulación y el análisis de robustez del sistema en lazo cerrado.

3.4.1 Consideraciones para la simulación.

Debido a que la velocidad angular, tanto de Pitch como de Yaw, no puede ser medida, se utiliza un filtro para determinar estas magnitudes, tanto para el cálculo de la velocidad angular de Pitch como de Yaw. Es un filtro de segundo orden con los siguientes parámetros: frecuencia de corte W_c de 21rad/sec y coeficiente de amortiguamiento de 0.75, obteniendo la función de transferencia (15).

$$V_f(s) = \frac{441s}{s^2 + 31.5s + 441} x(s) \quad (15)$$

Adicionalmente, la posición Pitch es regulada utilizando un lazo de realimentación *feed-forward* que compensa el torque gravitacional (τ_g), la señal de control *feed-forward* (FF) está dada por (16), donde θ_d es el ángulo de Pitch deseado y K_{ff} es la ganancia de control *feed-forward*.

$$u_{ff} = K_{ff} \frac{m_{heli} g l_{cm} \cos \theta_d}{K_{pp}} \quad (16)$$

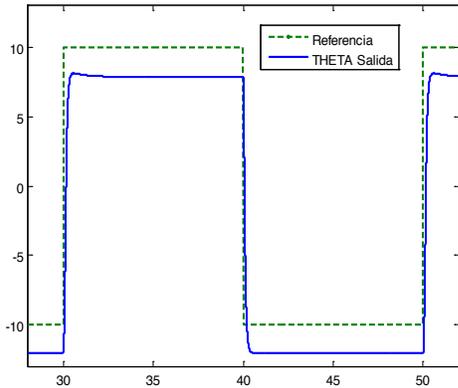
En resumen, el control FF+LMI está dado por (17), donde los valores de la constante K son los hallados anteriormente.

$$\begin{bmatrix} u_{pitch} \\ u_{yaw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} \frac{m_{heli} g l_{cm} \cos \theta_d}{K_{pp}} \\ 0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (17)$$

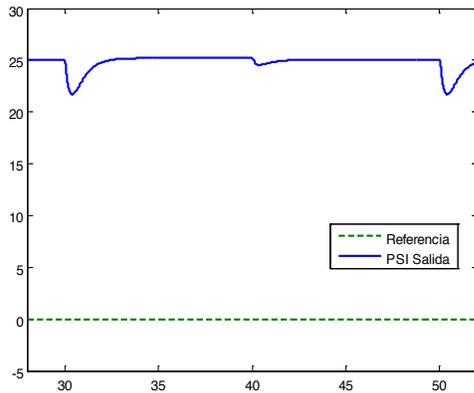
Donde θ_d es el ángulo de Pitch deseado y ψ_d es el ángulo de Yaw deseado, y el valor de la ganancia de control *feed-forward* K_{ff} es 1.

3.4.2 Simulación control FF+ LMI

Con los valores del controlador ya determinados se procede a realizar la simulación con el modelo no lineal del sistema. Primero se hace la simulación del sistema sin emplear el filtro de cálculo de velocidad angular y posteriormente con dicho filtro, obteniendo los resultados mostrados en las Figuras 4 y 5.



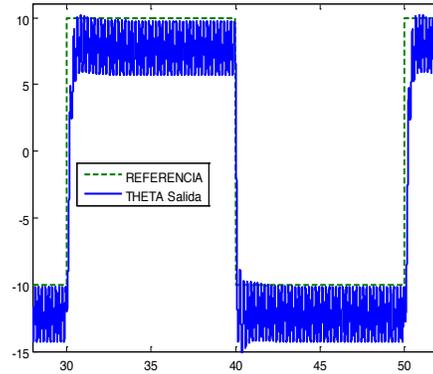
a) Angulo de Pitch



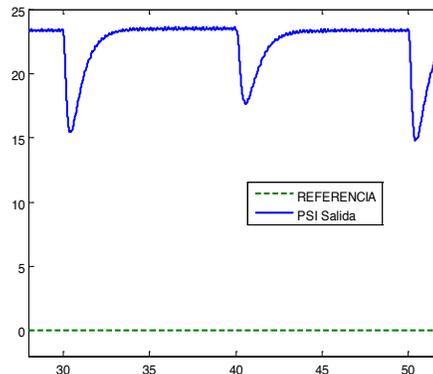
b) Angulo de Yaw.

Figura 4. Respuesta del sistema al controlador FF + LMI. a) Angulo de Pitch. b) Angulo de Yaw.

Como se observa de las Figuras 4 y 5, el error de posición en estado estacionario del ángulo de Yaw es bastante elevado. Además, cuando se utiliza el filtro para determinar las velocidades angulares, se causa una oscilación en la posición del ángulo de Pitch así como en el ángulo de Yaw, aunque en menor medida. Es necesario entonces diseñar un controlador que minimice tanto el error como la oscilación, por lo que se lleva a cabo el diseño de un controlador FF+LMI con integrador.



a) Ángulo de Pitch



b) Angulo de Yaw.

Figura 5. Respuesta del sistema al controlador FF + LMI con filtros para determinar las velocidades angulares. a) Ángulo de Pitch. b) Angulo de Yaw.

3.5 Diseño del controlador FF+LMI con integrador

Para minimizar el error de posición en estado estacionario según las características deseadas, se introduce un integrador al control LMI. Al establecer los estados $X_5 = \theta$ y $X_6 = \psi$, se obtiene el sistema nominal (18) y la matriz B_1 dada en (19).

Con estos nuevos valores de las matrices se realiza el cálculo del controlador $K \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$, minimizando igual que en el caso anterior el valor de $\gamma \in \mathbb{R}$ con $Q > 0$, tal que la LMI (14) sea factible.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7913 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \quad (18)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3571 & 0.0120 & 0.4311 & 0.0432 & 0 & 0 \\ 0.0372 & 0.123 & 0.0418 & 0.5427 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto W \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Como resultado de este cálculo se obtiene:

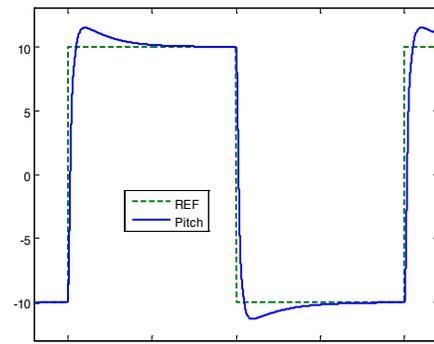
$$\gamma = 0.5$$

$$Ki = \begin{bmatrix} 33.7221 & 3.0898 & 2.8430 & 0.0150 & 16.3401 & 1.1710 \\ -6.4109 & 15.7772 & -0.7629 & 3.9787 & -3.5094 & 9.5534 \end{bmatrix}$$

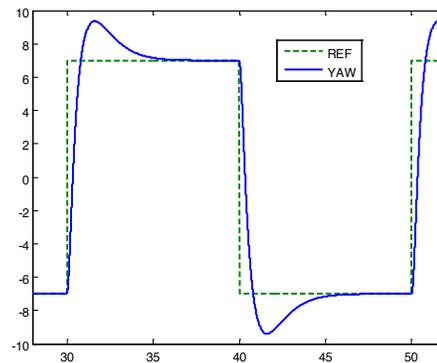
Valores singulares de $Alc = [-7.6384 + 3.4219i \ -7.6384 - 3.4219i \ -3.9249 \ -1.2465 \ +0.4723i \ -1.2465 \ -0.4723i \ -0.5381]$, con este controlador Ki se procede a realizar la simulación y el análisis de robustez del sistema en lazo cerrado. Además, la parte integral se implementa con un control integral *anti-windup* como el presentado en el

manual de Quanser 2 DOF.

Este control integral *anti-windup* se emplea tanto para el ángulo de Pitch como de Yaw. Los resultados de la simulación con el filtro de cálculo de velocidad angular se pueden observar en las Figuras 6 a 8. En la Figura 8 se puede observar la respuesta ante perturbaciones de tipo escalón que ocasionan cambios en la señal de salida de $\pm 5^\circ$. Como se aprecia, el sistema es capaz de rechazar pequeñas perturbaciones de tipo escalón en la salida y el error tiende a ser cero.

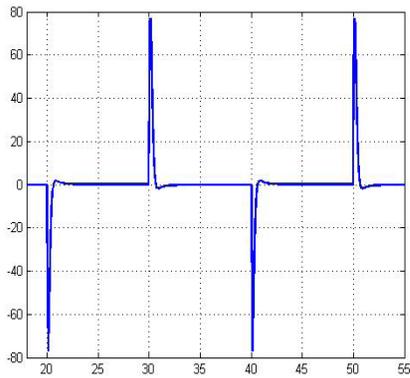


a) Ángulo de Pitch

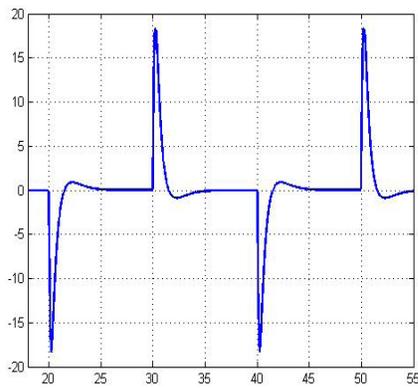


b) Ángulo de Yaw.

Figura. 6. Respuesta del sistema al controlador FF+LMI+Integrador con filtros para determinar las velocidades angulares. a) Ángulo de Pitch. b) Ángulo de Yaw.

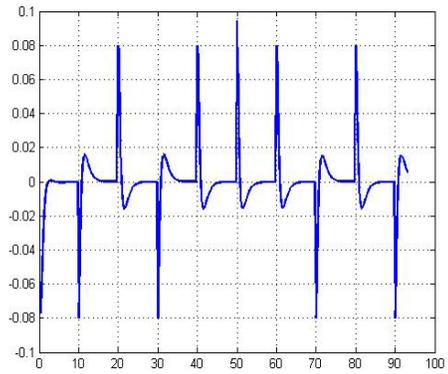


a) Velocidad angular de Pitch

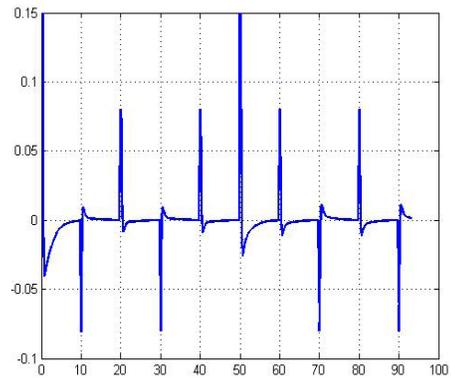


b) Velocidad angular de Yaw.

Figura.7. Respuesta del sistema al controlador FF+LMI+ Integrador con filtros para determinar las velocidades angulares. a) Velocidad angular de Pitch. b) Velocidad angular de Yaw.



a) Error ángulo de Pitch



b) Error ángulo de Yaw.

Figura. 8. Respuesta del sistema a perturbaciones, controlador LMI+Integrador con filtros para las velocidades angulares. a) Error ángulo de Pitch. b) Error ángulo de Yaw

4. ESTABILIDAD ROBUSTA

Considerando el diseño por LMI y LMI+I realizados anteriormente, la gráfica de estabilidad robusta para el controlador LMI se observa en la Figura 9 y para el controlador LMI+I se aprecia en la Figura 10. En estas figuras se nota que el sistema controlado alcanza su estabilidad robusta debido a que los valores singulares de la función de sensibilidad ponderada de entrada tienen un valor pico de 0.11 aproximadamente. La estabilidad robusta del sistema Quanser 2 DOF con los controladores diseñados se realiza utilizando μ -análisis.

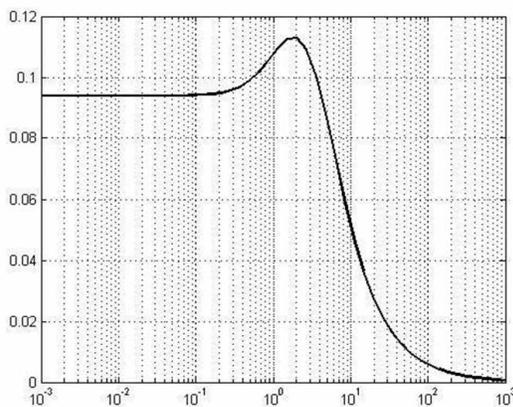


Figura. 9. Estabilidad robusta del sistema al controlador LMI

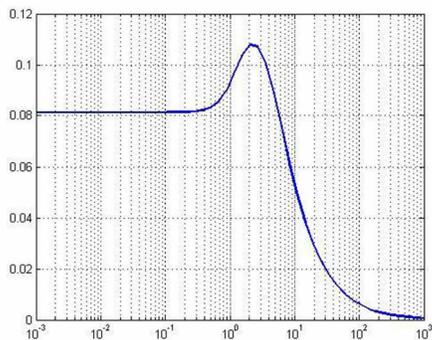


Figura. 10. Estabilidad robusta del sistema al controlador LMI+ Integrador

5. COMPARACIÓN ENTRE CONTROLADORES

Se efectúa la comparación de los desempeños de los diseños realizados con los presentados por el fabricante del dispositivo en su manual. Las condiciones iniciales del sistema son (0, 0, 0, 0). Los resultados de la

comparación entre el controlador FF+LQR y FF+LMI son los mostrados en las Figuras 11 y 12. De estas figuras se logra observar que aunque el error en el ángulo de Yaw es bastante elevado y se presenta un error menor en el ángulo de Pitch (7-8 % para el control LMI y de 25 % para el control LQR), el controlador FF+LMI obtiene el menor error entre los dos controladores FF+LQR y FF+LMI.

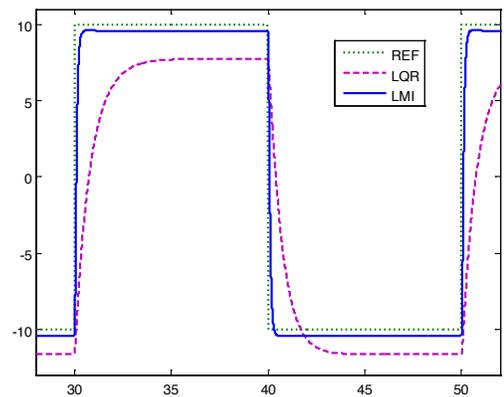


Figura. 11. Respuesta del sistema a los controladores FF+LQR y FF+LMI (ángulo de Pitch)

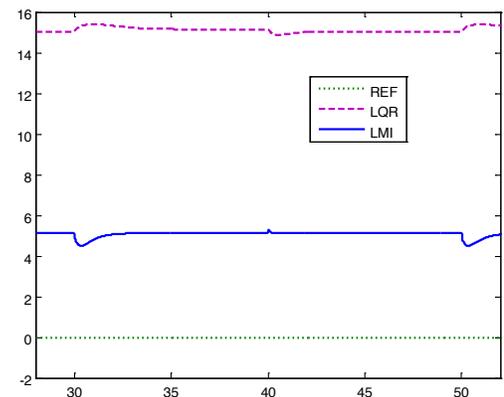


Figura. 12. Respuesta del sistema a los controladores FF+LQR y FF+LMI (ángulo de Yaw)

Los resultados de la comparación entre el controlador FF+LQR+I y FF+LMI+ Integrador son los presentados en las Figuras 13 y 14. De estas figuras se logra observar para los dos casos que el error en el ángulo de Yaw y en el ángulo de Pitch es cero; el controlador FF+LMI+I obtiene el menor tiempo de establecimiento tanto para el

ángulo de Pitch como de Yaw, con un sobrepico para el control FF+LMI+I del 20 % para el ángulo de Pitch y de 30 % para el ángulo de Yaw, y sobrepico para el control FF+LQR+I del 30 % para el ángulo de Pitch y de 30 % para el ángulo de Yaw.

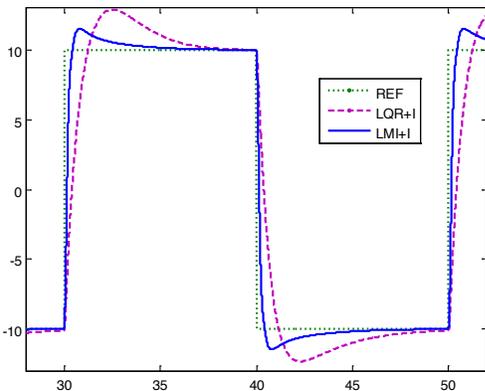


Figura 13. Respuesta del sistema a los controladores FF+LQR+I y FF+LMI+I (ángulo de Pitch)

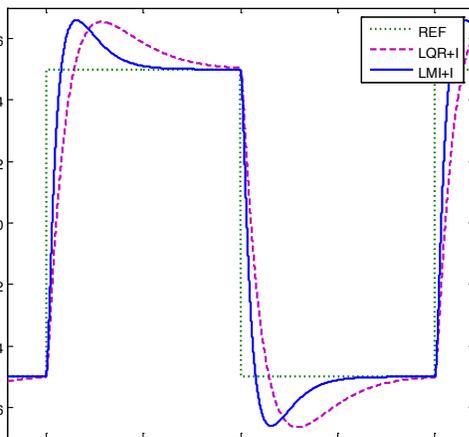


Figura 14. Respuesta del sistema a los controladores FF+LQR+I y FF+LMI+I (ángulo de Yaw).

Por último se hace una prueba para determinar el comportamiento del control FF+LQR+I y FF+LMI+I (son los que mejores resultados han tenido) ante el seguimiento a una señal tipo diente de sierra para el ángulo Pitch (frecuencia de 0.05 Hertz) y una señal tipo escalón para el ángulo de Yaw (frecuencia 0.04 Hertz) (Figuras 15 y 16). Se observa que el seguimiento es realizado por los dos sistemas controlados, en el ángulo de Pitch el error en el punto donde cambia abruptamente el

diente de sierra es menor para el controlador FF+LMI+I, pero este presenta una oscilación en el punto donde cambia la referencia del ángulo de Yaw, mientras que el control FF+LQR+I no presenta dicha oscilación. Algo similar ocurre en el ángulo de Yaw, donde se produce la oscilación en el punto de cambio abrupto del diente de sierra, siendo menor la oscilación en el controlador FF+LQR+I.

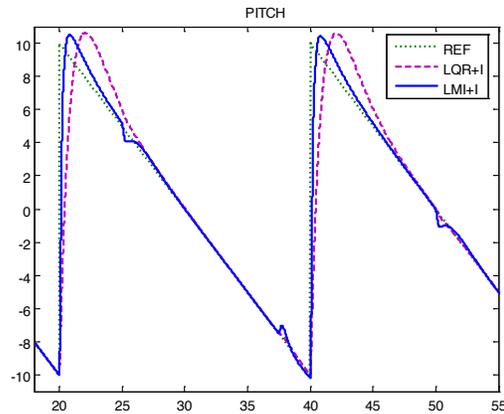


Figura 15. Respuesta del sistema al controlador FF+LQR+I y FF+LMI+I (ángulo de Pitch)

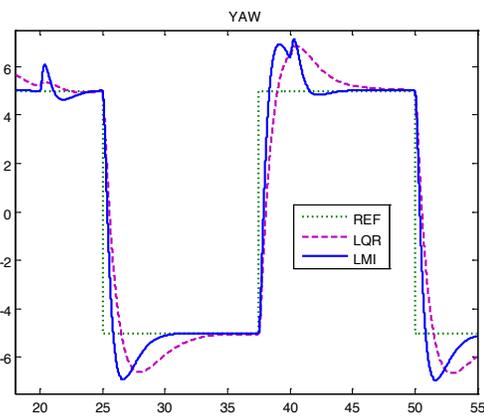


Figura 16. Respuesta del sistema al controlador FF+LQR+I y FF+LMI+I (ángulo de Yaw)

6. CONCLUSIONES

Se puede concluir que la dinámica del controlador FF+LMI+I es superior a la presentada por el controlador FF+LQR+I, su principal inconveniente es que la exigencia de velocidad angular es mucho más elevada,

cerca del 200 % con respecto a la exigida por el control FF+LQR+I.

Las diferencias observadas en los controladores diseñados frente a los controladores dados por el fabricante radican en los tiempos de establecimiento, y error en estado estacionario. El controlador LMI, aunque presentaba un desempeño mejor que el control LQR, mostraba un error elevado en el seguimiento al ángulo de Yaw, por lo que se descarta su utilización, mientras que el controlador FF+LMI+I mostró un excelente comportamiento con un tiempo de establecimiento inferior a los 5 segundos y sobrepicos de 20 % para el seguimiento en el ángulo de Pitch y de 30 % en el ángulo de Yaw, menores que los presentados por el controlador FF+LQR+I. Por consiguiente, se concluye que el controlador más robusto frente a perturbaciones, que cumple con las características deseadas y presenta un error de seguimiento cero, es el controlador FF+LMI+I.

6. REFERENCIAS

- Balas, G. & Doyle, J. (2003). *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide Version 3 for use to MATLAB*. Massachusetts, USA. Math Works Inc.
- Banjerdpongchai, D. (1997) *Parametric Robust Controller Synthesis Using Linear Matrix Inequalities*. Thesis to get Phd. in Philosophy. Stanford University, California.
- Bedoya, A. J. & Marín, A. A. (2014). Construcción y control adaptativo de un helicóptero de dos grados de libertad. Trabajo de grado para optar al título de ingeniero en mecatrónica Universidad Tecnológica de Pereira.
- Carrillo-Ahumada, J., Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J. & García-Alvarado, M. A. (2015). Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariados. Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12(2), 177-188.
- Dullerud, G. & Paganini, F. (2002). *A Course in Robust Control Theory: a Convex Approach*. Champaign, IL: University of Illinois.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. & Chilali, M. (2008). *LMI Control Toolbox User's Guide Version 1 for use to MATLAB*. Ciudad: Math Works Inc.
- Guzmán, L. S., Cardozo, C. A. C. & Cárdenas, C. A. G. (2014). Diseño e implementación de una plataforma experimental de dos grados de libertad controlada por dos técnicas: pid y lógica difusa. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, volumen 24(1), pag 99-115.
- Ibáñez, A. (2014). *Modelado, identificación, simulación y control óptimo de un helicóptero con dos grados de libertad, cabeceo y guiñada* Doctoral dissertation. Universidad Politecnica de Valencia.
- Kebede, G. (2006). *Robust Decentralized Control of Power Systems: A Matrix Inequalities Approach*. These Doktors der Ingenieurwissenschaften.
- Universität Duisburg-Essen & Quanser Inc. (2006). *Quanser 2 DOF Helicopter User and Control Manual*. Duisburg-Essen, Deutschland: Universität Duisburg-Essen.
- Salamanca, J., Díaz, H. & Higuera, O. (2007). Diseño de un controlador LMI+I basado en optimización para un helicóptero de dos grados de libertad. *Revista Ingeniería, Investigación y Desarrollo*, 5(2), págs. 22-28.
- Skogestad, S. & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*. New York, John Wiley & Sons (ed).