

DISEÑO DE UN CONTROLADOR LMI+I BASADO EN OPTIMIZACIÓN PARA UN HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

(Design of LMI+I Controller Based in Optimization for Two Degree of Freedom Helicopter)

Oscar Iván Higuera Martínez, Juan Mauricio Salamanca

Escuela de Ingeniería Electrónica, Uptc-Sogamoso, Grupo de Investigación DSP-Uptc, ohiguera@gmail.com, jumasala@univalle.edu.co

(Recibido Abril 6 de 2007 y aceptado Octubre 15 de 2007)

<p>Resumen: Presenta la optimización utilizando algoritmos genéticos para el diseño de un controlador robusto H8 usando técnicas de desigualdades matriciales lineales para controlar la posición de cabeceo y dirección en un helicóptero de dos grados de libertad. La optimización se realiza cuando falla el sensor de velocidad de cabeceo y dirección, con base en la energía consumida, el máximo sobrepico y la frecuencia de oscilación del sistema. Se presentan los resultados de las simulaciones sobre el modelo no lineal del sistema.</p>	<p>Abstract: It presents the Genetic Algorithms' use for the design's optimization of a Robust control H8 using lineal Matrix Inequalities' techniques, to control the pitch and yaw's position in a two degrees of freedom helicopter. The optimization is carried out when the pitch and yaw's speed sensor, based on the energy consumption fails, the maximum peak and the oscillation frequency of the system. The simulations' results are presented on the non-linear model system.</p>
<p>Palabras clave: Optimización, Control Robusto, Desigualdades Matriciales Lineales, Helicóptero, Algoritmos Genéticos.</p>	<p>Key Words: Optimization, Robust Control, Linear Matrix Inequalities, Helicopter, Genetic Algorithms.</p>

1. INTRODUCCIÓN

La optimización en ingeniería es una herramienta muy importante para determinar características esenciales en diferentes sistemas. En este documento se dan las características de diseño de un controlador optimizado para la falla de sensores de velocidad angular; se parte de un modelo no lineal del sistema en donde se plantea encontrar los valores óptimos para el diseño de un controlador con limitación en la señal, para realizar el seguimiento a una referencia dada. El sistema consiste en el modelo de un helicóptero montado en una base fija con dos hélices que se manejan por motores DC, como se muestra en la figura 1. La hélice derecha o delantera controla la elevación de la nariz del helicóptero sobre el eje horizontal, y la hélice izquierda o trasera controla la dirección.

El sistema Quanser utilizado es intrínsecamente inestable, por tanto, se necesita aplicar la teoría de control realimentado para estabilizar el sistema; se propone diseñar una estrategia de control robusto para estabilizar el sistema utilizando técnicas LMI, así como se usa un integrador para obtener error de seguimiento cero; adicionalmente, la posición pitch es regulada utilizando un lazo de realimentación feed-forward que compensa el torque gravitacional (τ_g). El diseño de controladores LMI está basado en los modelos lineales del sistema y en el problema de optimización para lograr una solución al problema planteado, logrando así la estabilidad y robustez del sistema.

La optimización se basa en 4 características: máximo sobrepico presente en las salidas, consumo de energía, frecuencia de oscilación de la señal de control y, por último, el mejor desempeño cuando están funcionando todos los sensores; las primeras de ellas se tienen en cuenta cuando fallan los sensores de velocidad angular.

En el artículo veremos algunos conceptos básicos necesarios sobre los temas trabajados en este desarrollo, tales como la obtención del modelo, el diseño de la función de optimización, las simulaciones y resultados esperados, así como las limitaciones encontradas.

Las consideraciones del desempeño deseado son: se desea que en estado estacionario la posición pitch y yaw se mantengan en X_0 dado, y se rechacen pequeñas perturbaciones; es decir, se desea error de estado estacionario nulo. Se deben evitar picos excesivos en los voltajes de los motores, para evitar daños de tipo físico, por tanto, los actuadores tienen señales máximas, de $\pm 24V$ para el motor de pitch y de $\pm 15V$ para el motor de yaw, por lo que se deben implementar saturadores en el sistema.

2. MODELO DEL HELICÓPTERO

El helicóptero de dos grados de libertad está montado sobre el pivote por el eje del ángulo de pitch (θ) y por el eje del ángulo de yaw (ψ), como es mostrado en la figura 1. El pitch es definido positivo cuando la nariz del helicóptero sube, y el yaw es

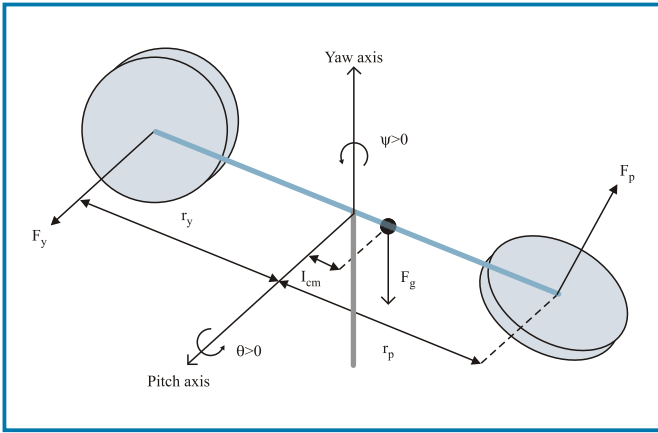


Figura 1. Dinámica del helicóptero experimental 2 DOF Quanser.

definido positivo para un giro en el sentido de las manecillas del reloj. Hay una fuerza de empuje F_p que actúa en el eje del pitch, que es normal a la hélice delantera, y una fuerza de empuje F_y que actúa en el eje del yaw, que es normal a la hélice trasera.

Las ecuaciones de movimientos se encuentran usando el método del Lagrangiano. Posteriormente se encuentran las cinemáticas del centro de masa del helicóptero. Las cinemáticas se usan para encontrar las energías potencial y cinética involucradas en el sistema del helicóptero. Se usa el método de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones no lineales que describen los movimientos del helicóptero, obteniendo finalmente (1), donde V_m son los voltajes en los motores.

$$\begin{aligned}
 (J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= K_{pp} V_{m,p} + K_{py} V_{m,y} - m_{heli} g l_{cm} \cos \theta \\
 - B_p \dot{\theta} - m_{heli} l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 \\
 (J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2 \cos \theta) \ddot{\psi} &= K_{yy} V_{m,y} + K_{yp} V_{m,p} - B_y \dot{\psi} \\
 + 2m_{heli} l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi} \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{1}$$

De las ecuaciones no lineales (1) se obtiene el modelo de espacio de estados lineal del helicóptero, sobre el punto de operación $X_0 = (0, 0, 0, 0)$ (Skogestad, 2001; Dullerud, 2002), obteniendo (2).

$$\begin{aligned}
 (J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= K_{pp} V_{m,p} + K_{py} V_{m,y} - B_p \dot{\theta} \\
 (J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2) \ddot{\psi} &= K_{yy} V_{m,y} + K_{yp} V_{m,p} - B_y \dot{\psi}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Con el vector de espacio de estados y la entrada, respectivamente, y los valores dados por el fabricante del helicóptero, que se pueden observar en la tabla 1, se realizará el diseño del sistema de control.

$$x = [\theta \quad \psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \quad u = [V_{m,p} \quad V_{m,y}]^T$$

Tabla 1. Valores nominales del sistema Quanser 2DOF.

Símbolo	Descripción	Valor
K_{pp}	Thrust torque constant acting on Pitch Axis from Pitch motor/propeller	0.204 N.m/V
K_{yy}	Thrust torque constant acting on Yaw axis from Yaw motor/propeller	0.072 N.m/V
K_{py}	Thrust torque constant acting on Pitch Axis from Yaw motor/propeller	0.0068 N.m/V
K_{yp}	Thrust torque constant acting on Yaw axis from Pitch motor/propeller	0.0219 N.m/V
B_p	Equivalent viscous damping about Pitch axis	0.800 N/V
B_y	Equivalent viscous damping about Yaw axis	0.318 N/V
m_{heli}	Total moving mass of the helicopter	1.3872 kg
l_{cm}	Center-of-mass length along helicopter body from Pitch axis	0.186 cm
$J_{eq,p}$	Total moment of inertia about Pitch pivot	0.0384 kg m ²
$J_{eq,y}$	Total moment of inertia about Yaw pivot	0.0432 kg m ²

Fuente: Quanser 2 DOF Helicopter User and Control Manual.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR LMI+I

Para el diseño del controlador Robusto H_∞ basado en técnicas LMI se tiene en cuenta el modelo general dado en (3), que corresponde al modelo de la planta $P(s)$ del sistema realimentado presente en la figura 2.

$$\begin{aligned}
 \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
 Z &= C_1 X(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
 Y &= C_2 X(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)
 \end{aligned} \tag{3}$$

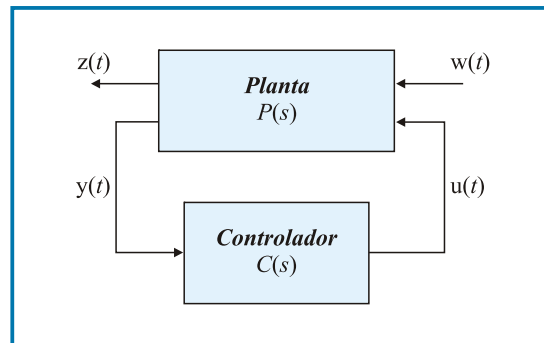


Figura 2. Interconexión por realimentación de la planta y el controlador.

3.1 Modelo con incertidumbres

Las incertidumbres se plantean como una variación del sistema nominal de la matriz A y la matriz B , es decir, se plantea un sistema como el presente en (4), obteniendo el sistema dado por (5); primero, para la variación de los parámetros se realiza la variación en un $\pm 10\%$ sobre el valor nominal; los parámetros que se variaron fueron $J_{eq,p}$, $J_{eq,y}$, B_p , B_y , K_{pp} , K_{yy} , K_{yp} y K_{py} , y las variaciones sobre el punto de operación se realizaron para el ángulo de Pitch y de Yaw de ± 15 grados, y debido a que se desea que las velocidades angulares sean cero, la variación sobre estos se realizó de ± 10 grados (Higuera, 2008).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (A + \Delta_A)X + (B + \Delta_B)U \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{X} = AX + (\Delta_A X + \Delta_B U) + BU \quad (5)$$

Para minimizar el error de posición en estado estacionario, según las características deseadas, se introduce un integrador al control LMI. Introduciendo los estados $X_5 = \theta$ y $X_6 = \psi$, después de realizar las variaciones, se logra encontrar las variables que más influyen en la incertidumbre, obteniendo la matriz B_1 , que estaría descrita en (6).

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3571 & 0.0120 & 0.4311 & 0.0432 & 0 & 0 \\ 0.0372 & 0.123 & 0.0418 & 0.5427 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto W \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.2 Diseño del Controlador LMI+I

El diseño del controlador LMI está basado en el sistema representado por (3), con los estados adicionales X_5 y X_6 , considerando la señal de control (7), obteniendo el sistema (8).

$$u(t) = -KX(t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \underbrace{(A - B_2 K)}_{Alc} X(t) + B_1 w(t) \\ Z &= \underbrace{(C_1 - D_{12} K)}_{Clc} X(t) + D_{11} w(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Obteniendo la función del sistema en lazo cerrado dada por (9), se desea diseñar un controlador por realimentación de estados Robusto H_∞ usando técnica LMI; entonces, considerando $C_2 = I^{n \times n}$ y $D_{21} = 0$, el problema es encontrar la matriz de

realimentación de estados óptima H_∞ , $K \in \mathfrak{R}^{2 \times n}$, tal que $\|FL(P(s), K)\|_\infty$ sea mínima.

$$Z(t) = [Clc(SI - Alc)^{-1} B_1 + D_{11}] X(t) \quad (9)$$

Considere una función de transferencia continua $T(s)$, que no necesariamente es de realización mínima, $T(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$; entonces, $T(s) < \gamma$, para $\gamma > 0$ y A será asintóticamente estable si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva, $P > 0$, tal que $Q = P^{-1}$, para la cual se cumple el siguiente lema.

LEMA 1. (Kebede, 2006) (Síntesis controlador realimentado H_∞ - Óptimo): El problema de estabilidad de la síntesis del control óptimo H_∞ por realimentación ($K = LQ^{-1}$) es minimizar $\gamma \in \mathfrak{R}, R$ con $Q > 0$, tal que la LMI (10) sea factible.

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - (B_2 L + L^T B_2^T) & B_1 & (C_1 Q - D_{12} L)^T \\ B_1 & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Q - D_{12} L & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

Donde

$$L = KQ \mapsto K = LQ^{-1} \mapsto Q = P^{-1} > 0$$

$$P = P^T > 0$$

$$Y = PX \in \mathfrak{R}^n \rightarrow X = P^{-1}Y \rightarrow X^T = Y^T P^{-1}$$

La obtención del controlador se logra empleando el Toolbox de LMI de Matlab (Gahinet, 2003; Banjerdpongechai, 1997).

4. FUNCIÓN POR OPTIMIZAR

La función por optimizar en este caso está dada por (11); en esta se reúnen las características esenciales, como máximo sobrepico presente en las salidas, consumo de energía y la frecuencia de oscilación de la señal de control cuando no existe señal presente en los sensores de velocidad angular, así como estos mismos valores cuando sí están presentes; las restricciones en este caso son que el valor seleccionado de $\gamma \in \mathfrak{R}, R$ y que $0 < \gamma < 1$, con $Q > 0$, así como la LMI dada en (11) sea factible para el valor de γ utilizado en cada iteración.

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} F(x) &= \sum_{i=1}^K \alpha_i f_i(x) \\ \text{st} \quad & 0 < \gamma < 1 \\ & \text{LMI (14) sea Factible} \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Donde a_i son las ponderaciones de cada una de las funciones $f_i(x)$, que son las funciones evaluativas del desempeño del sistema; para este caso se tienen las siguientes funciones evaluativas de desempeño:

Sin señal en los sensores de velocidad

- Máximo sobrepico de pitch
- Máximo sobrepico en yaw
- Variación de la energía de control
- Frecuencia de oscilación en la señal de control para el motor de pitch
- Frecuencia de oscilación en la señal de control para el motor de yaw

La implementación de las funciones de restricción, así como la obtención de los evaluativos de desempeño son un poco complicadas, para lo cual se realiza la evaluación del sistema controlador en simulink (figura 10), para cada uno de los pasos de optimización y de cambio de valor de γ ; esto se realiza con un llamado a la simulación del sistema controlado y los resultados de la simulación son enviados al workspace para poder realizar su análisis, y con base en estos resultados obtenidos se lleva a cabo la evaluación de si cumplen o no las restricciones planteadas, y así tomar la decisión de si se varía o no el punto seleccionado (Balas, 2003; Higuera, 2006).

Para realizar la optimización de los valores de γ se empleó una rutina de algoritmos genéticos. La optimización basada en algoritmos genéticos ha demostrado un excelente resultado no solo en aplicaciones de control, sino en sistemas financieros y otras aplicaciones existentes. La rutina de optimización hace un llamado al esquema de simulación del sistema para realizar la evaluación de las funciones y restricciones, como se mencionó anteriormente. En el programa principal del proceso de optimización se encuentra la rutina de algoritmos genéticos. Se utilizan cuatro padres para cada una de las variables, después de realizada la evaluación se va en este programa almacenando el hijo que brinde el mejor resultado; un breve resumen de este programa es:

- Escoger dos padres aleatorios para crear los nuevos hijos.
- Crear los nuevos hijos (offspring, recombinación, etc.).
- Selección del mejor de los dos hijos, para este caso se utiliza una ponderación de las funciones evaluativas y las restricciones (función a optimizar).
- Si el valor de la LMI es no factible, no se tiene en cuenta nada más y es descartada esta opción; aquel que obtenga la mejor ponderación es el mejor hijo y, por tanto, el que se tendrá en cuenta, el otro es descartado.
- Después de obtener el mejor hijo se realiza la Mutación y se evalúa la función de optimización, en este paso se está almacenando el mejor resultado, para así obtener una salida en caso de no lograr la convergencia después de un número determinado de iteraciones.
- Este procedimiento se repite n veces (número de iteraciones máximo) o hasta lograr la convergencia.

El procedimiento se realiza con números decimales de 0 a 1 en codificación binaria de 16 bits para γ .

5. SIMULACIONES Y RESULTADOS

5.1 Consideraciones para la simulación

La posición pitch es regulada utilizando un lazo de realimentación feed-forward que compensa el torque gravitacional (τ_g); la señal de control feed-forward (FF) está dada por (12), donde θ_d es el ángulo de pitch deseado, ψ_d es el ángulo de yaw deseado y K_{ff} es la ganancia de control feed-forward que es igual a 1.

$$u_{ff} = K_{ff} \frac{m_{heli} g l_{cm} \cos \theta_d}{K_{pp}} \quad (12)$$

En resumen, el control FF+LMI está dado por (13), donde los valores de la constante K son la constante del controlador.

$$\begin{bmatrix} u_{pitch} \\ u_{yaw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} \frac{m_{heli} g l_{cm} \cos \theta_d}{K_{pp}} \\ 0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Como resultado de optimización y con los valores de las matrices se logra realizar el cálculo del controlador $K \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$, obteniendo que el valor óptimo se alcanza para:

$$\gamma = 0.560 \quad (14)$$

Con el controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 25.264 & 1.8455 & 2.4403 & 0.0115 & 13.2857 & 0.6560 \\ -5.2971 & 16.0285 & -0.7153 & 3.9097 & -3.1705 & 10.041 \end{bmatrix}$$

Con este controlador K se procede a realizar la simulación, obteniendo los siguientes resultados.

En la figura 3 se puede observar el error del ángulo de pitch y de yaw cuando se tiene realimentación completa de estados; podemos observar que el sobrepico es de 5%. La figura 4 ilustra las señales de control en este caso, en estas se puede observar que no sobrepasan el valor fijado como desempeño. En la figura 5 se observa el error cuando fallan los sensores de velocidad angular de pitch y de yaw, donde se observa un sobrepico del 20%, en las dos figuras se logra ver que el sistema es estabilizable, y se puede ver que la oscilación del sistema es baja. En la figura 6 se observan las señales de control, en ellas se incrementan en gran proporción el segundo pico de voltaje, mientras el primero es igual; este pico presentado es debido a la compensación que se realiza dada la falta de información de la velocidad.

En cuanto al seguimiento, se logra observar en las figuras 7 y 8; el sistema ante falla en los sensores ya mencionados presenta un excelente seguimiento de la referencia, solo tomando un tiempo cuando se presenta cambio de referencia. En la figura 9 se observa la señal de control para el seguimiento de la referencia de la figura 8.

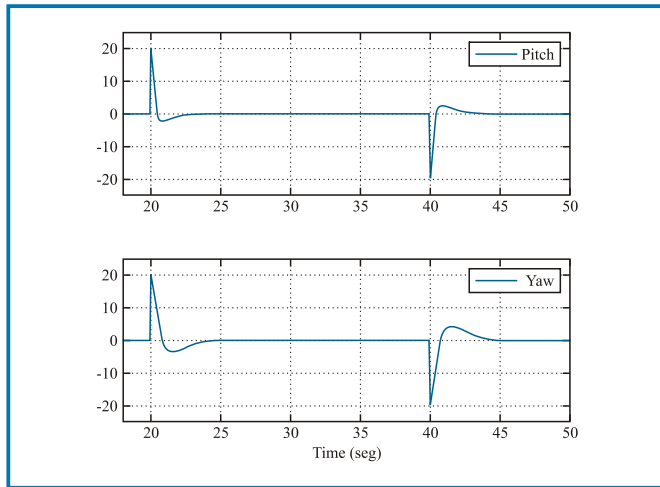


Figura 3. Respuesta del error ante cambios de punto de operación con realimentación total.

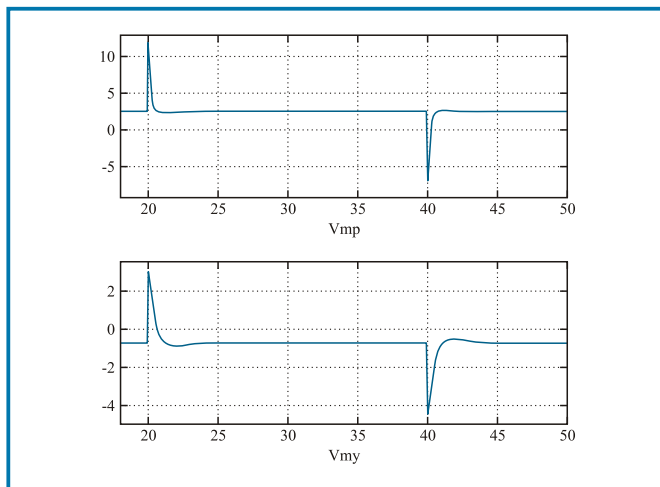


Figura 4. Voltaje en los motores ante cambios de punto de operación con realimentación total.

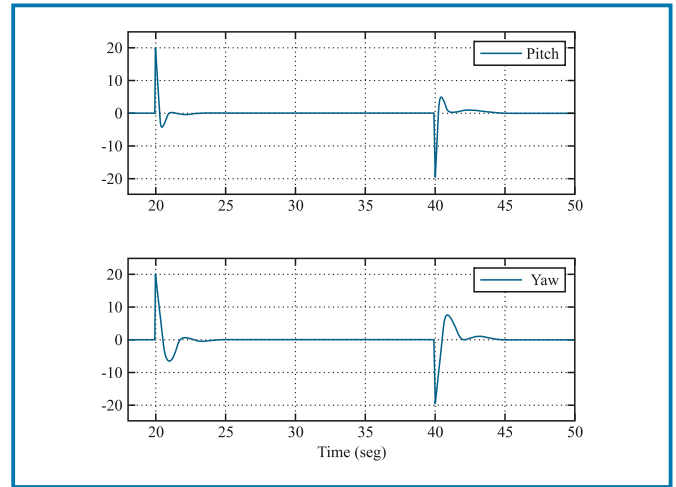


Figura 5. Respuesta del error ante cambios de punto de operación con fallo en sensores de velocidad angular.

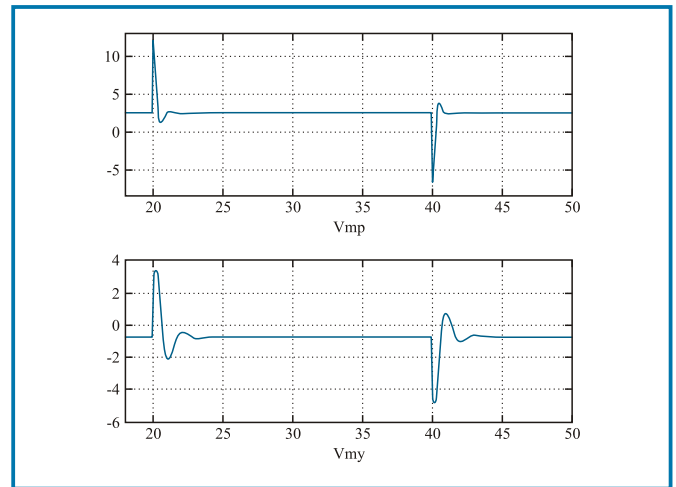


Figura 6. Voltaje en los motores ante cambios de punto de operación con fallo en sensores de velocidad angular.

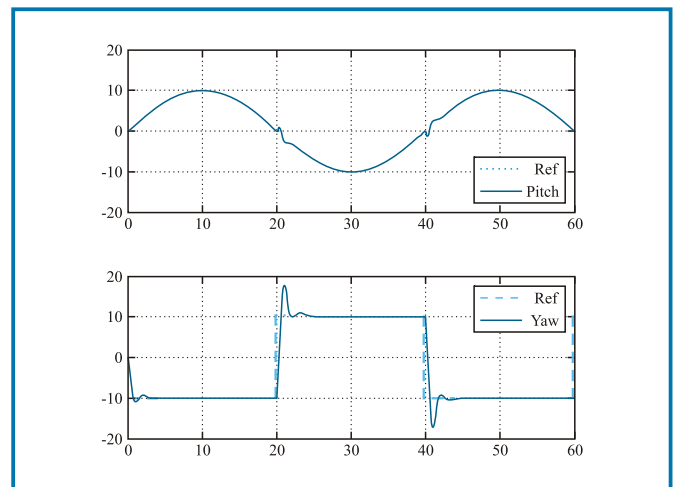


Figura 7. Seguimiento de referencia con fallo en sensores de velocidad angular de pitch y yaw.

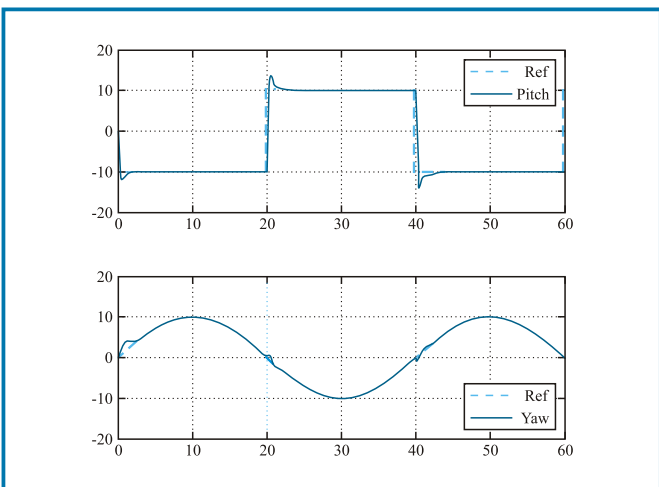


Figura 8. Seguimiento de referencia con fallo en sensores de velocidad angular de pitch y yaw.

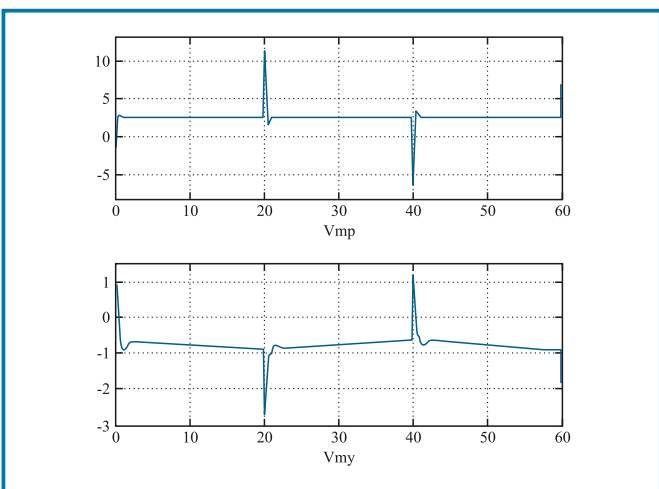


Figura 9. Voltaje en los motores para seguimiento de referencia con fallo en sensores de velocidad angular de pitch y yaw.

6. CONCLUSIONES

Después de realizar un análisis de los resultados y observar con detalle sus características, se puede concluir que el diseño del controlador basado en desigualdades matriciales lineales presenta grandes resultados, demostrando un excelente comportamiento y seguimiento de referencia con sobrepico moderado y oscilación de baja frecuencia; gracias a la optimización basada en algoritmos genéticos se logró obtener un controlador que es tolerante a falla de sensores y que puede ser utilizado frente al fallo de cualquiera de los dos sensores de velocidad angular; solo queda seguir investigando en el trabajo de controladores tolerantes a fallas, ya sea aplicando técnicas adicionales a esta, tales como modos deslizantes, los cuales puedan soportar el fallo de cualquiera de los sensores del sistema.

Al terminar este trabajo sobre optimización, se logra determinar la importancia de tener orientada la aplicación que se desea optimizar en algunas áreas de trabajo propias de la ingeniería; la optimización es básica para lograr concluir con éxito las labores necesarias, como en este caso específico lo fue encontrar los valores de un controlador para un sistema tolerante a fallas.

Encontrar el modelo matemático de las diferentes variables que influían en el diseño y respuesta del sistema controlado y, por tanto, en la optimización fue clave para poder solucionar y encontrar un punto factible de solución a este sistema. Dado que este sistema era no lineal y que no se podía por simple inspección encontrar cuál era la solución óptima, se hizo necesario implementar rutinas de evaluación y cambios de parámetros en la evaluación del controlador.

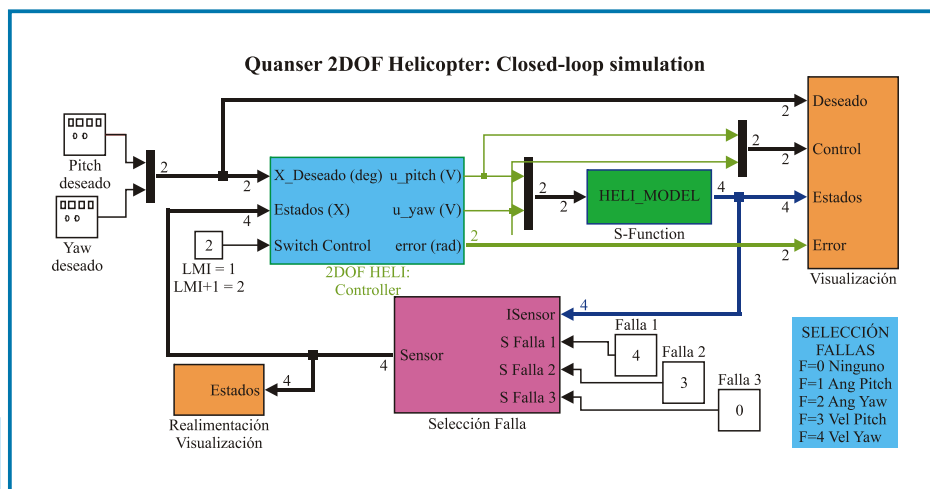


Figura 10. Esquemático de simulación en MATLAB.

7. REFERENCIAS

- Balas, G. & J. Doyle (2003). *m-Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide Version 3 for use to MATLAB*, MathWorks Inc. (ed)
- Banjerdpongchai, D. (1997). *Parametric Robust Controller Synthesis Using Linear Matrix Inequalities*. Stanford University. Tesis Ph.D.
- Dullerud, G. & F. Paganini (2002). *A Course in Robust Control Theory a convex approach*, University of Illinois (ed).
- Gahinet, P., A. Nemirovski, A. Laub & M. Chilali (2003). *LMI Control Toolbox User's Guide Version 1 for Use to MATLAB*, Math Works Inc (ed.)
- Higuera, O. (2006). *Arranque en tiempo mínimo de un motor de inducción*. Universidad Nacional de Colombia (Informe final Optimización de Procesos).
- Higuera, O.; J. Salamanca y H. Díaz (2008). *Diseño de un controlador robusto H8 usando técnicas LMI para un helicóptero de dos Grados de Libertad*. VI Congreso Internacional Electrónica y Tecnologías de Avanzada 2008.
- Kebede, G. (2006). *Robust Decentralized Control of Power Systems: A Matrix Inequalities Approach*. Universität Duisburg-Essen. Tesis Doktors der Ingenieurwissenschaften
- Quanser Inc. (2006). *Quanser 2 DOF Helicopter User and Control Manual*, February 10, 2006 .
- Skogestad, S. & I. Postlethwaite (2001). *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*. New York: John Wilye & Sons (ed).