

SISTEMAS ALGEBRAICO-DIFERENCIALES: ANÁLISIS Y CONTROL

(Differential Algebraic Systems:
Analysis and Control)

Juan Mauricio Salamanca*, Oscar Iván Higuera Martínez*, José Miguel Ramírez**

*Escuela de Ingeniería Electrónica, Uptc-Sogamoso, Grupo de Investigación DSP-UPTC,
jumasala@univalle.edu.co; ohiguera@gmail.com

** Universidad del Valle, Grupo de Investigación GICI-UNIVALLE, jomiram@univalle.edu.co

(Recibido Mayo 19 de 2007 y aceptado Septiembre 20 de 2007)

<p>Resumen Describe los fundamentos y los principales aspectos de los sistemas algebraico-diferenciales lineales, con respecto a la Controlabilidad, Observabilidad, Admisibilidad y Estabilizabilidad de sistemas dinámicos. Al final del artículo se presenta y se analiza un ejemplo de un sistema de potencia eléctrica.</p>	<p>Abstract It describes the fundamentals and principal aspects of the Linear Differential and Algebraic Systems (DAES), with respect to the dynamic systems Controllability, Observability, Stability and Admissibility. A Power electric system example is shown and analyzed at the end of this paper.</p>
<p>Palabras clave: DAES, Controlabilidad, Observabilidad, Estabilidad, Admisibilidad, Sistemas de Potencia Eléctrica.</p>	<p>Key Words: DAES Controllability, Observability, Stability Admissibility, Power electric system.</p>

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas algebraico-diferenciales (DAES), o sistemas singulares, pueden ser considerados una generalización de los sistemas dinámicos comunes. Los sistemas algebraico-diferenciales constan de ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas (Benoit, 2003). Este aumento permite integrar las relaciones estáticas en el modelado; por ejemplo, leyes de mallas, condiciones físicas, leyes de comportamientos, etc.; igualmente permite que las variables conserven su significado físico, y también permite el modelado de procesos que presentan comportamientos impulsivos y más generalmente no causales. La formulación de problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias (ODES) requiere muchas veces la formulación de:

- Leyes de Conservación (balance de masa y de energía)
- Ecuaciones constitutivas (ecuaciones de estado, presión transferencia de calor, etc.)
- Condiciones de diseño (operaciones deseadas)

La implementación de estas ecuaciones es muchas veces más fácil y eficiente manteniendo esas relaciones separadas, esto lleva a un conjunto de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAES).

Después de los años veinte la teoría de control de sistemas dinámicos ha sido extendida a los sistemas singulares, pudiéndose aplicar las temáticas de ubicación de polos, control óptimo, síntesis de observadores, síntesis de compensadores bajo condiciones H_2 , H_∞ , desigualdades matriciales lineales y

tópicos de control robusto. No obstante, faltan por ser tratados ciertos objetos de estudio como la ubicación óptima de sensores y de actuadores, temas relacionados con el diagnóstico y detección de fallas y aplicación de técnicas de control no lineal (Hill, 1990), así como su aplicación a sistemas de potencia (Benoit, 2003).

El modelado de un proceso físico comienza generalmente por la selección de las variables utilizadas para su descripción y la selección de magnitudes que permiten actuar sobre la evolución del sistema. Estas variables, llamadas variables de estado y de control, se escogen en la medida de lo posible por tener un significado físico. Una vez escogidas las variables, las relaciones matemáticas son dictadas por las leyes de comportamiento del sistema considerado. Estas relaciones pueden ser de dos tipos:

- Dinámicas: relaciones que hacen intervenir las derivadas de las variables a través del tiempo.
- Estáticas: relaciones que hacen intervenir ecuaciones algebraicas de las variables.

Existen varias formas para describir los sistemas algebraico-diferenciales; entre estas tenemos principalmente:

Totalmente explícita

$$\begin{aligned} 0 &= F(\dot{X}(t), X(t), Y(t), U(t), t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Definición 3 (Forma equivalente de Kronecker-Weierstrass)

Para toda forma matricial (E,A) regular existen dos matrices no singulares Q y P tales que:

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}; \quad QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad CP = [C_1 \quad C_2]$$

El sistema (4) se puede escribir como:

$$\dot{X}_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U(t) \quad (9)$$

$$N \dot{X}_2(t) = X_2(t) + B_2 U(t) \quad (10)$$

$$Y(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) \quad (11)$$

Donde

$X_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}$, $X_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}$, $n_1+n_2=n$, $C_1 \in \mathfrak{R}^{p \times n_1}$, $C_2 \in \mathfrak{R}^{p \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$; A_1 puede ser una matriz $n_1 \times n_1$ de Jordan y N es una matriz $n_2 \times n_2$ nilpotente de índice h ,

El modelo (9-11) se conoce como forma equivalente de Kronecker-Weierstrass (K-W). El sistema (9) se conoce como **Subsistema Lento** y el subsistema (10) se conoce como **Subsistema Rápido**. El subsistema (9) es causal y sus dinámicas están determinadas por los valores característicos de la matriz A_1 . Por otro lado, el subsistema (10) es no causal y su respuesta a una entrada continua puede presentar discontinuidades.

Definición 4 (Forma equivalente singular)

Dado que la matriz \bar{E} de un sistema singular dado por (7-8) se puede descomponer en sus valores singulares, esto constituye otra descomposición en la que se separan las relaciones dinámicas de las relaciones estáticas. La descomposición queda:

$$E = Q\bar{E}P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A = Q\bar{A}P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = Q\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad C = \bar{C}P = [C_1 \quad C_2]$$

El sistema particionado es:

$$\dot{X}_1(t) = A_{11} X_1(t) + A_{12} X_2(t) + B_1 U(t) \quad (12)$$

$$0 = A_{21} X_1(t) + A_{22} X_2(t) + B_2 U(t) \quad (13)$$

$$Y(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) \quad (14)$$

El modelo (12-14) se conoce como forma equivalente singular. En el caso de sistemas físicos, la ecuación (12) reúne las dinámicas del sistema, mientras que (13) traduce las interconexiones y las condiciones estáticas.

3. RESPUESTA TEMPORAL

Sea el modelo regular dado por

$$\dot{\tilde{E}}\tilde{X}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}U(t) \quad (15)$$

$$Y(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) \quad (16)$$

Con la transformación, $\tilde{X}(t) = PX(t)$

Pre-multiplicando por Q, obtenemos el modelo equivalente de K-W (9-11). La solución temporal a este modelo expresada en términos del estado original es:

$$\tilde{X}(t) = P \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{A_1(t-t_0)} P^{-1} \tilde{X}_{10} + \int_{t_0}^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 U(\tau) d\tau \\ - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 U^{(i)}(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \bar{C}\bar{X}(t) \quad (17)$$

De acuerdo con la expresión anterior parece que la respuesta de un sistema no causal depende exclusivamente del valor de las derivadas de la entrada al instante t . Esta diferencia fundamental origina los apelativos de subsistema lento y rápido. Pueden existir sistemas singulares con fenómenos impulsivos generados por la derivada de la señal de control.

Definición 5 (Sistema no impulsivo)

Un sistema algebraico-diferencial se denomina **no impulsivo** si su respuesta temporal es continua para toda condición inicial y todo control $U(t) \in C_{h-1}^m$ donde C_m^p designa al conjunto de funciones p -veces continuamente diferenciables a trozos.

Lema 2. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. La forma (E,A) es **no impulsiva**
2. La matriz N de la forma de Kronecker-Weierstrass es nula
3. La matriz A_{22} de la descomposición en valores singulares es de rango pleno
4. Se verifica la igualdad $\text{grado}(|sE - A|) = \text{rank}(E)$
5. $\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} - \text{rank}(E) = n$

Un sistema no impulsivo tiene una función de transferencia que no contiene términos no causales; mientras que la función de transferencia de un sistema impulsivo presenta términos polinomiales en s .

Un sistema singular (E, A, B, C) no impulsivo admite una representación de estado no singular.

Sea el sistema no impulsivo expresado en su forma de descomposición de valores singulares:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + DU(t) \quad (18)$$

Si el sistema anterior es no impulsivo se cumple que la matriz A_{22} es invertible. Por tanto podemos despejar la variable $X_2(t)$ en la ecuación de arriba:

$$X_2(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}X_1(t) - A_{22}^{-1}B_2U(t) \quad (19)$$

Reemplazando en la expresión de $X_1(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \bar{A}X_1(t) + \bar{B}U(t) \\ Y(t) &= \bar{C}X_1(t) + \bar{D}U(t) \end{aligned} \quad (20)$$

donde:

$$\bar{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (21)$$

$$\bar{B} = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (22)$$

$$\bar{C} = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \quad (23)$$

$$\bar{D} = D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \quad (24)$$

A partir del modelo en la forma de descomposición en valores singulares podemos obtener el modelo en la forma de K-W, redefiniendo:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1(t) &= X_1(t) \\ \bar{X}_2(t) &= A_{21}X_1(t) + A_{22}X_2(t) \end{aligned}$$

el modelo queda:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}_1(t) &= \bar{A}_1\bar{X}_1(t) + \bar{B}_1U(t) \\ 0 &= \bar{X}_2(t) + \bar{B}_2U(t) \end{aligned} \quad (25)$$

con:

$$\bar{B}_2 = B_2$$

4. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Sea un sistema regular bajo la forma de K-W (Cobb, 1984):

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= A_1X_1(t) + B_1U(t) \\ N\dot{X}_2(t) &= X_2(t) + B_2U(t) \\ Y(t) &= Y_1(t) + Y_2(t) \\ Y_1(t) &= C_1X_1(t) \\ Y_2(t) &= C_2X_2(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Definición 6 (Estado alcanzable)

Se dice que un estado $X_a \in \mathfrak{R}^n$ es alcanzable si existe una condición inicial X_0 , una señal de control $U(t) \in C_m^{k-1}$ y $t_f > 0$ tal que $X(t_f) = X_a$.

Definición 7 (Controlabilidad)

Se dice que el sistema (26) es controlable si para toda condición inicial $X_0 \in \mathfrak{R}^n$ y todo estado $X_f \in \mathfrak{R}^n$ existe un control $U(t) \in C_m^{h-1}$ que lleva al sistema al estado X_f en un tiempo arbitrario t_f .

Para el caso de sistemas singulares se definen varios tipos de controlabilidad. Definimos la **R-Controlabilidad**, la **Imp-Controlabilidad**, la **Fuerte-controlabilidad**.

Definición 8 (R-Controlabilidad)

Se dice que el sistema (26) es **R-Controlable** si para todo estado inicial $X_0 \in \mathbf{R}$, siendo \mathbf{R} una región arbitraria del espacio de estados, para todo estado final $X_f \in \mathbf{R}$ y $t_f > 0$ existe una ley de control $U(t) \in C_m^{h-1}$ tal que $X(t_f) = X_f$. La R-Controlabilidad se traduce en la posibilidad de alcanzar en un tiempo arbitrario un estado arbitrario en \mathbf{R} , sin importar la condición inicial, pero escogida en un conjunto en \mathbf{R} . Las condiciones equivalentes a la **R-Controlabilidad** recaen exclusivamente sobre el subsistema lento; el subsistema rápido no impone condiciones sobre la **R-Controlabilidad**.

Las nociones de **Controlabilidad** y **R-Controlabilidad** están determinadas completamente por el componente final del subsistema lento. Sin embargo, entre los instantes inicial y final pueden aparecer términos impulsivos debidos a la entrada y a sus derivadas. Por ello es necesario considerar el efecto del control sobre las componentes impulsivas del estado.

Definición 9 (Controlabilidad impulsiva)

Se dice que el sistema (26) es Imp-Controlable si para toda condición inicial $X_0 = [X_{10}^T \ X_{20}^T]^T$ todo instante inicial t_i y todo vector $V_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}$ existe un control $U(t) \in C_m^{h-1}$ tal que el estado del subsistema rápido verifica:

$$X_2(t) = \sum_{k=0}^{h-2} \delta^k(t-t_i) N^{k+1} V_2 \quad (27)$$

La **Imp-Controlabilidad** es la capacidad para determinar una ley de control que vuelva al sistema de control no impulsivo. Esta propiedad es importante debido a la posibilidad de crear términos impulsivos que permitan anular los generados en un sistema.

Definición 10 (Controlabilidad fuerte)

El sistema (26) es Fuertemente Controlable si y solamente si el sistema es Impulso Controlable y además: $\text{rank} [sE-AB] = n$; para algun $s \in \mathbb{C}$. La **Controlabilidad** implica la **R-Controlabilidad** y la **Imp-Controlabilidad**. El siguiente diagrama esquemático ilustra las diferentes implicaciones relacionadas con la controlabilidad.

$$(E, A, B)\text{Controlable} \Leftrightarrow \begin{cases} (I_{n_1}, A_1, B_1)\text{Controlable} \Leftrightarrow (E, A, B)\text{R-Controlable} \\ (N, I_{n_2}, B_2)\text{Controlable} \Rightarrow (E, A, B)\text{Imp-Controlable} \end{cases}$$

De manera análoga podemos definir la observabilidad en los DAES lineales.

Definición 11 (Observabilidad)

Se dice que el sistema (26) es **Observable** si la condición inicial X_0 puede ser determinada de manera única por el conocimiento de las entradas $U(t)$ y de las salidas $Y(t)$.

Definición 12 (R-Observabilidad)

Se dice que el sistema (26) es **R-Observable** si la totalidad del espacio de estados es alcanzable y puede ser deducido de manera única a partir de $Y(t)$ y de $U(t)$ para $\tau \in [0, t]$.

La observabilidad se traduce en la posibilidad de reconstruir el estado y comprende los términos impulsivos a partir de los vectores de entrada y de salida. La **R-Observabilidad** no implica que el estado sea alcanzable y tampoco refleja la observabilidad en términos impulsivos, por ello se requiere la siguiente definición:

Definición 13 (Observabilidad impulsiva)

Se dice que el sistema (26) es **Imp-Observable** si los términos impulsivos del estado pueden ser determinados de manera única a partir de $Y(t)$ y de $U(t)$.

Definición 14 (Observabilidad fuerte)

El subsistema (26) es **Fuertemente Observable** si y solamente si es **Imp-Observable** y además

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Las relaciones entre las diferentes formas de observabilidad se ilustran en el diagrama siguiente:

$$(E, A, C)\text{Observable} \Leftrightarrow \begin{cases} (I_{n_1}, A_1, C_1)\text{Observable} \Leftrightarrow (E, A, B)\text{R-Observable} \\ (N, I_{n_2}, C_2)\text{Observable} \Rightarrow (E, A, B)\text{Imp-Observable} \end{cases}$$

5. ESTABILIDAD DE SISTEMAS SINGULARES LINEALES

Consideremos un sistema singular autónomo descrito por:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t) \quad (28)$$

en la forma de Kronecker-Weierstrass:

$$E\dot{X}(t) = AX(t) \quad (29)$$

Donde:

$$E = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

el modelo queda:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= A_1 X_1(t) \\ N\dot{X}_2(t) &= X_2(t) \end{aligned} \quad (30)$$

Teorema (Estabilidad)

El estado de equilibrio $\bar{X} = 0$ del sistema singular regular autónomo:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t); \quad \bar{X} \in \mathfrak{R}^n, \bar{E} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \bar{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

es **asintóticamente estable** si existe una función cuadrática:

$$V(\bar{X}) = \bar{X}^T \bar{E}^T P \bar{E} \bar{X} / 2 \quad \text{con } P = P^T > 0$$

la cual es positiva semidefinida en \mathfrak{R}^n tal que $\dot{V}(\bar{X}) < 0$ para todo $\bar{X} \in \mathfrak{R}^n; \bar{X} \neq 0$.

Teorema (Estabilidad)

El sistema singular:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t) \quad (31)$$

Es **estable** si y solamente si $S_{pr}(\bar{E}, \bar{A}) \in \mathbb{C}^-$; donde $S_{pr}(\bar{E}, \bar{A})$ se conoce como el espectro de A_1 ; A_1 es la matriz de subsistema 1 en la forma de Kronecker-Weierstrass y $\mathbb{C}^- = \{s / s \in \mathbb{C}, \text{Re } s < 0\}$

La condición de estabilidad dada por el teorema anterior depende únicamente de los polos finitos del sistema, es decir, de la estabilidad del subsistema causal, sin importar que el sistema funcione de modo impulsivo. Expresado de otra forma, la energía de la salida de un sistema llamado estable puede ser infinita para una entrada de energía finita. Para evitar la paradoja de un sistema estable con salida no acotada para una entrada de energía finita debemos considerar la definición de **Admisibilidad**.

Definición 15 (Admisibilidad)

Un sistema singular descrito por

$$E\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (32)$$

se dice **Admisible** si y solamente si (E,A) es estable y no impulsivo. Expresado de otro modo, decimos que el sistema es **Admisible** si y solamente si $S_{pr}(E,A) \in C$, y $gd[\det(sE-A)] = \text{rank}(E)$.

De acuerdo con todo lo anterior podemos afirmar que el principal objetivo de un sistema de control debe ser garantizar la estabilidad del sistema controlado. Por ello se presenta la siguiente definición:

Definición 16 (Estabilizabilidad) (Lin, 2004)

Un sistema singular descrito por

$$\begin{aligned} E\dot{X}(t) &= X(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (33)$$

se dice **estabilizable** si existe una retroalimentación de estado $U(t) = -KX(t) + V(t)$ tal que el sistema controlado

$$\begin{aligned} E\dot{X}(t) &= (A - BK)X(t) + BV(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (34)$$

es estable.

La **R-Controlabilidad** implica la **Estabilizabilidad**; pero lo recíproco es falso. La **Estabilizabilidad** puede interpretarse como el hecho de que los polos finitos deben ser controlables. Las condiciones de existencia de una retroalimentación de estado producen un sistema estable no impulsivo y permite ubicar arbitrariamente los polos finitos.

(E, A, B) Controlable \Leftrightarrow

$$\left\{ \begin{aligned} &(I_{n_1}, A_1, B_1) \text{Controlable} \Leftrightarrow (E, A, B) \text{R-Controlable} \\ &\quad \Leftrightarrow \text{Existe } K \text{ tal que se } S_{pr}(E, A - BK) \text{ puede} \\ &\quad \text{ubicar libremente} \\ &(N, I_{n_2}, B_2) \text{Controlable} \Rightarrow (E, A, B) \text{Imp-Controlable} \\ &\quad \Leftrightarrow \text{Existe } K \text{ tal que se } (E, A - BK) \text{ es no} \\ &\quad \text{impulsivo} \end{aligned} \right.$$

6. EJEMPLO DE DAES

Sistema de potencia modelado como generador conectado a bus infinito (Pai, Gupta, 2004). Para el análisis de estabilidad de ángulo de un generador específico en un gran sistema de potencia, el sistema se puede considerar como un generador conectado a un bus infinito. El esquema se ilustra en la figura 1.

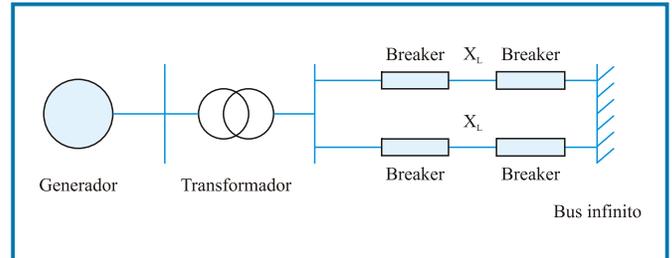


Figura 1. Bus Infinito.

Las ecuaciones que describen al sistema son las siguientes:

$$\dot{\delta}(t) = \omega(t) - \omega_0 = \omega_r(t) \quad (35)$$

$$\dot{\omega}_r(t) = -\frac{D}{2H}\omega_r + \frac{\omega_0}{2H}[P_m(t) - P_e(t)] \quad (36)$$

$$\dot{E}_q'(t) = \frac{E_{fd}(t) - E_q(t)}{T_{do}' 2H} \quad (37)$$

$$\dot{E}_{fd}(t) = -\frac{1}{T_A}E_{fd}(t) + \frac{1}{T_A}[V_{ref} - V_G + V_{PSS}(t)] \quad (38)$$

$$\dot{P}_m(t) = -\frac{1}{T_T}P_m(t) + \frac{K_T}{T_T}X_E(t) \quad (39)$$

$$\dot{X}_E(t) = -\frac{1}{T_G}X_E(t) + \frac{K_G}{T_G}\left[P_e(t) - \frac{1}{R\omega_0}\omega_r(t)\right] \quad (40)$$

$$0 = \frac{X_{ds}}{X_{ds}'}E_q'(t) - \frac{\bar{X}_d}{X_{ds}}V_t \cos\delta(t) - E_q(t) \quad (41)$$

$$0 = \frac{V_t E_q(t) \text{sen}\delta(t)}{X_{ds}} - P_e(t) \quad (42)$$

$$0 = \frac{V_t E_q(t) \cos\delta(t)}{X_{ds}} - \frac{V_t^2}{X_{ds}} - Q_e(t) \quad (43)$$

$$0 = \frac{1}{X_{ds}} \sqrt{X_s^2 E_q^2 + V_t^2 X_d^2 + 2X_s X_d X_{ds} P_e \text{ctg} \delta(t)} - V_g(t) \quad (44)$$

Donde:

- $\delta(t)$ Ángulo de potencia [rad]
- $\omega_r(t)$ Velocidad angular relativa [rad/seg]
- ω_0 Velocidad sincrónica de la máquina ($2f_0$ [rad/seg])
- $P_m(t)$ Potencia mecánica de entrada [p.u]
- $P_e(t)$ Potencia activa suministrada al bus [p.u]
- D Constante de amortiguamiento
- H constante de inercia
- $E_q^t(t)$ Fem transitoria en el eje de cuadratura
- $E_q(t)$ FEM en el eje de cuadratura
- $E_{fd}(t)$ Fem equivalente en el bobinado de excitación
- T_{do}^t Constante de tiempo transitoria de eje directo en corto circuito
- $X_E(t)$ Apertura de la válvula de vapor
- $P_c(t)$ Entrada de control de potencia al sistema (perturbación de entrada)
- $V_g(t)$ Voltaje en el terminal del generador
- T_G Constante de tiempo de la válvula
- K_G Constante de ganancia de la válvula
- V_t Voltaje de bus infinito
- K_A Constante de ganancia del excitador
- T_A Constante de tiempo del excitador
- T_T Constante de tiempo de la turbina
- K_T Constante de ganancia de la turbina
- $X_{ds} = X_r + 1/2 X_L + X_d$
- $X_{ds}^t = X_r + 1/2 X_L + X_d^t$
- X_T Reactancia del transformador
- X_d Reactancia de eje directo
- X_d^t Reactancia transitoria de eje directo
- $\bar{X}^d = X_d - X_t$
- \bar{X}_L Reactancia de la línea de transmisión
- V_{ref} Voltaje de referencia en el control del excitador del generador
- V_{PSS} Tensión generada por el estabilizador de potencia para el control del excitador

Para obtener el modelo algebraico-diferencial en una forma estándar asumimos:

$$\bar{X}^T(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & \omega_r(t) & E_q^t(t) & E_{fd}(t) & E_q(t) \\ P_e(t) & Q_e(t) & V_g(t) & P_m(t) & X_E(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{10} \quad (45)$$

$$\bar{Y}^T(t) = \begin{bmatrix} \omega_r(t) & E_{fd}(t) & P_e(t) & Q_e(t) & V_g(t) \\ P_m(t) & X_E(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^7 \quad (46)$$

$$\bar{U}^T(t) = \begin{bmatrix} V_{ref}(t) - V_{pss} & P_c(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^3 \quad (47)$$

Procedemos a realizar la linealización en torno al punto de operación, utilizando la siguiente ecuación:

$$E\dot{\bar{X}}(t) \approx F(\bar{X}_0, \bar{U}_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{X}} \right|_0 (\bar{X} - \bar{X}_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{U}} \right|_0 (\bar{U} - \bar{U}_0) \quad (48)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} X(t) &= \bar{X}(t) - \bar{X}_0(t) \\ U(t) &= \bar{U}(t) - \bar{U}_0(t) \\ Y(t) &= \bar{Y}(t) - \bar{Y}_0(t) \end{aligned} \quad (49)$$

El modelo queda:

$$\begin{aligned} E\dot{X}(t) &= F(X, Y, U) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (50)$$

Con:

$$F(X, Y, U) =$$

$$\begin{bmatrix} \omega_r(t) \\ -\frac{D}{2H} \omega_r + \frac{\omega_0}{2H} [P_m(t) - P_e(t)] \\ \frac{E_{fd}(t) - E_q(t)}{T_{do}^t} \\ -\frac{1}{T_A} E_{fd}(t) + \frac{K_A}{T_A} [V_{ref} - V_G + V_{PSS}(t)] \\ -\frac{1}{T_T} P_m(t) + \frac{K_T}{T_T} X_E(t) \\ -\frac{1}{T_G} X_E(t) + \frac{K_G}{T_G} \left[P_e(t) - \frac{1}{R\omega_0} \omega_r(t) \right] \\ \frac{X_{ds}}{X_{ds}^t} E_q^t(t) - \frac{\bar{X}_d}{X_{ds}^t} V_t \cos \delta(t) - E_q(t) \\ \frac{V_t E_q(t) \text{sen} \delta(t)}{X_{ds}} - P_e(t) \\ \frac{V_t E_q(t) \cos \delta(t)}{X_{ds}} - \frac{V_t^2}{X_{ds}} - Q_e(t) \\ \frac{1}{X_{ds}} \sqrt{X_s^2 E_q^2 + V_t^2 X_d^2 + 2X_s X_d X_{ds} P_e \text{ctg} \delta(t)} - V_g(t) \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{10 \times 10}; \quad (52)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{011} & \vdots & A_{012} \\ \dots & \vdots & \vdots \\ A_{021} & \vdots & A_{022} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 250 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank(E) = 6

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times 10}; \quad C = \bar{C} \quad (53)$$

$$A_{01} = A_{011} - A_{012} A_{022}^{-1} A_{021} \quad (54)$$

Los parámetros utilizados fueron:

$X_1 = 0.4853;$ $W_0 = 2 * \pi * 60;$
 $D = 5.0;$ $H = 4.0;$
 $T_{dot} = 6.95;$ $X_t = 0.127;$
 $X_d = 1.863;$ $X_{dt} = 0.257;$
 $X_s = X_t + 0.5 * X_1;$
 $X_{ds} = X_s + X_d;$
 $X_{dst} = X_s + X_{dt};$

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -62.7079 & -0.625 & -59.678 & 0 & 47.1239 & 0 \\ -0.3507 & 0 & -0.4278 & 0.1439 & 0 & 0 \\ 8.0996 & 0 & -748112 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & -0.0265 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$K_a = 50;$ $T_a = 0.2;$
 $R = 0.05;$ $K_t = 1.0;$
 $T_t = 4;$ $K_g = 1;$
 $T_g = 2;$ $V_{to} = 1.0;$
 $\ddot{a}_0 = 72^\circ;$ $W_{ro} = 0;$
 $V_{to} = 1.0;$ $P_{mo} = 0.9;$

$$C_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.3307 & 0 & 1.2665 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5627 & 0 & 0.4115 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0325 & 0 & 0.2992 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obteniendo finalmente las matrices E, A, B que se presentan a continuación:

$$E = \bar{E}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.625 & 0 & 0 & 47.1239 & 0 & \vdots & 0 & -47.1239 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1439 & 0 & 0 & \vdots & -0.1439 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0.25 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0265 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2.4374 & 0 & 2.9730 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2924 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0.426 & -1 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0.1384 & 0 & -1 & 0 \\ -0.3071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0.0579 & 0.1003 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 250 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es regular dado que el Determinante de $(sE-A) \neq 0$ para algún $s \in \mathbb{C}$, el sistema es libre de impulso dado que la Matriz N en la forma de Kronecker –Weierstrass es cero. Del modelo k-w se concluye que el sistema es solo R-controlable y R-observable.

Los valores característicos genéricos se calculan $|\lambda E_0 - A_0|$ con; en Matlab se realiza con el comando $\text{eig}(A_0, E_0)$ (Varga, 1999), dando como resultado:

- $-\infty$
- $-0.4638 + j7.8397$
- $-0.4638 - j7.8397$
- $-2.5600 + j2.4489$
- $-2.5600 - j2.4489$
- -0.5102
- -0.2450
- ∞
- ∞
- ∞

Los valores característicos de A_{01} se calculan con $|\lambda I - A_{01}| = 0$:

- $-0.4638 + j7.8397$
- $-0.4638 - j7.8397$
- $-2.5600 + j2.4489$
- $-2.5600 - j2.4489$
- -0.5102
- -0.2450

Por lo tanto el sistema es estable.

7. CONCLUSIONES

Los modelos DAES permiten expresar de manera más general y compacta, que incluye ecuaciones diferenciales y algebraicas para su descripción matemática.

Los principales sistemas dinámicos que pueden modelarse mediante modelos DAES incluyen procesos químicos, sistemas electromecánicos y sistemas de potencia.

En un modelo algebraico diferencial, las variables definidas como variables de estado conservan su significado físico.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad incluyen definiciones de controlabilidad impulsiva y observabilidad

impulsiva, los cuales hacen referencia a señales de impulso que pueden aparecer en el sistema dinámico cuando las condiciones iniciales no guardan una relación de admisibilidad.

6. REFERENCIAS

Benoit, Marx, (2003). Contribution á la Comande et au Diagnostic des Systemes Algebro- Differentiels Linéaires. These pour obtenir le grade de Docteur de L'INPG Institut National Polytechnique de Grenoble, Francia.

Cobb, Daniel (1984). Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems IEEE Transactions on automatic control, vol. ac-29, no. 12.

Hill, David J.; Iven, M.; Y. Mareels, (1990). Stability Theory for Differential/ Algebraic Systems with Application to Power Systems IEEE Transactions on Circuit and Systems Vol. 37 No.º 11.

Ivanescu, D.; A. Zinder; J. M. Dion; L. Dugard; D. Georges; N. Hadjsaid, (2000). Robust Stabilizing Controller for an Interconnected Power Systems: A Ttime dDelay aApproach France MTNS Perpignan.

Leung Joseph S.; D. Hill; Y. Ni (2005). Global pPower Ccontrol uUsing Ggenerator eExcitation, PSS, FACTS Ddevices and Ccapacitor Sswitching Electrical Power and Energy Systems No.º 27.

Pai, M.A.; D. P. Sen Gupta, (2004). Small Signal Analysis of Power Systems Alpha Science.

Pal, Bikash; B. Chaudhuri (2005). Robust Control in Power Systems Springer.

Ramírez, Juan; M., I. Coronado; P. Zúñiga y otros (2000). Control de una red Eeléctrica de Ppotencia., CINVESTAV Avance y Perspectiva Vol. 19.

Ramos A., Rodrigo (2002). Procedimento de projeto de controladores robustos para o amortecimento de oscilações eletromecânicas em sistemas de potência”. Tesis Ph.d. Escola de Engenharia de Sao Carlos da Universidade de Sao Pablo, Brasil.

Rao Shrikant, P.; I. Sen (2000). Robust Pole Placement Stabilizer Design Using Linear Matrix Inequalities IEEE Transactions on Power Systems Vol. 15, No. 1.

Varga, A. (1999). A Descriptor Systems Toolbox for MATLAB. German Aerospace Center (DLR) – Oberpfaffenhofen. Institute of Robotics and Mechatronics. Wessling, Germany

Yan, Yong; Lin, Z. (2004) A Descriptor System Approach to Robust Stability Analysis and Controller Synthesis IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 11.