REVISTA INQUIETUD EMPRESARIAL
ISSN 0121-1048, E-ISSN 2422-3230
2025 VOL. 25 N.º 1, 1–20
HTTPS://DOI.ORG/ 10.19053/UPTC.01211048.17153

ESTUDIO DE DUOPOLIOS MIXTOS CON COSTOS DE TRANSPORTE A UNA POTENCIA ARBITRARIA

DANIELA HERNÁNDEZ ALTAMIRANO[1*], ANTONIO KIDO-CRUZ[2*] ✉, RICARDO BECERRIL BÁRCENAS[3]

Citación: Hernández Altamirano, D.; Kido-Cruz, A. & Becerril Bárcenas, R. (2024) Estudio de duopolios mixtos con costos de transporte a una potencia arbitraria. *Inquietud Empresarial*, *24*(2), e17153. https://doi.org/10.19053/uptc.01211048.17153

Editor: Blanco-Mesa, Fabio

Recibido: 01/02/2024.
Aceptado: 21/07/2024.
Publicado: 20/02/2025.

Códigos JEL: L13, R32, R38, D43

Tipo de artículo: Investigación

Resumen: En un escenario donde se considera la existencia de una empresa de carácter privado y una empresa de carácter público con características de competencia en duopolio, la literatura ha encontrado que, bajo la consideración de una función de costos de transporte cuadrático, la localización de ambas empresas puede representarse como socialmente óptima. En el contexto del modelo de Cremer, el objetivo de este artículo es analizar el comportamiento de la función costo de transporte y función beneficio al cambiar el exponente n de la función costo de transporte, específicamente cuando $n \in [1,3]$. Bajo este supuesto, se puede afirmar que tanto en $n \in (1,2)$ como en $n \in (2,3)$, las ubicaciones obtenidas no solo son subóptimas, sino también presentan una falta de equilibrio en la localización de las empresas, ya que la empresa privada muestra una tendencia de reubicación respecto a la empresa pública: se acerca o se aleja de acuerdo con el valor de n.

Palabras clave: duopolio mixto, ubicaciones socialmente óptimas, ley de Hotelling, modelo ubicación precio, costo de transporte.

[1]Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo; Ciudad Universitaria, Gral. Francisco J. Múgica S/N, C.U., 58030 Morelia, Mich., México; 717713c@umich.mx; https://orcid.org/0009-0000-6216-7752 *autor corresponsal
[2]Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas; Universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo; Ciudad Universitaria, Edif "A" IV, Gral. Francisco J. Múgica S/N, C.U., 58030 Morelia, Mich., México; antonio.kido@umich.mx; https://orcid.org/0000-0003-4949-813X *autor corresponsal
[3]Instituto de Física y Matemáticas; Universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo; Ciudad Universitaria, Gral. Francisco J. Múgica S/N, C.U., 58030 Morelia, Mich., México; ricardo.becerril@umich.mx; https://orcid.org/0000-0001-9430-634X

Study of Mixed Duopolies with Transportation Costs at An Arbitrary Power

Abstract: In a mixed duopoly market with a private company and a public company, the literature has found that, under the consideration of a quadratic transportation cost function, the location of both companies can be represented as socially optimal. In the context of the Cremer model, the purpose of this paper is to analyze the behavior of the transportation cost function and benefit function when changing the exponent n of the transportation cost function, specifically when $n \in [1,3]$. Under this assumption it can be stated that both in $n \in (1,2)$ and in $n \in (2,3)$ the locations obtained are not only suboptimal, but also present a lack of equilibrium, since the private company shows a tendency of relocation with respect to the public company: it moves closer or further away according to the value of n.

keywords: Mixed duopoly, socially optimal locations, Hotelling's law, location price model, transportation cost.

1 INTRODUCCIÓN

Aunque el éxito de una empresa depende de una combinación sinérgica de diversos elementos, la ubicación y el producto son aspectos cruciales para el éxito de un negocio. El modelo de competencia espacial de Hotelling proporciona un marco atractivo para abordar la naturaleza del equilibrio en el espacio geográfico. Hasta ahora se ha trabajado minuciosamente en términos de alterar los supuestos básicos para generalizar y ampliar el análisis. Por ejemplo, varios autores han considerado diferentes números de empresas, formulaciones alternativas de costos y demanda de transporte, y muchas variaciones del concepto de equilibrio (Anderson, 1988; Drezner y Drezner, 2016; Li, 2006).

A medida que la interacción entre empresas de carácter privado y público se vuelve un tema de creciente importancia en el ámbito económico, este artículo se sumerge en un análisis detallado del comportamiento de la función de costos de transporte y la función de beneficio. En un escenario de competencia en duopolio, donde la literatura ha sugerido la representación socialmente óptima de la localización de ambas empresas bajo la consideración de una función de costos de transporte cuadrático, nuestro enfoque se centra en examinar las dinámicas asociadas con la variación del exponente "n" en dicha función.

Siguiendo el marco conceptual de Cremer et al. (1991), este estudio se adentra en el rango crítico de $n \in (1,3)$, revelando aspectos intrigantes sobre las ubicaciones óptimas. Es particularmente fascinante observar cómo, en los subintervalos $n \in (1,2)$ y $n \in (2,3)$, las ubicaciones resultan no solo subóptimas, sino también desequilibradas. La empresa de carácter privado exhibe una tendencia distintiva de reubicación con respecto a su contraparte pública, acercándose o alejándose en consonancia con el valor de n. Es importante mencionar que otros autores han considerado una función no lineal en los costos de transporte, básicamente asumen una función cuadrática o cúbica (Andree et al., 2018; Bárcena-Ruiz y Casado-Izaga, 2012; Fernández-Ruiz, 2020). Este tipo de análisis es importante, ya que puede generar nuevo conocimiento sobre la función de costos más adecuada para modelar este tipo de fenómenos, tal y como sucedió con el estudio de D'aspremont et al. (1979) que al asumir una función de costos cuadrática se demostraba que el análisis de Hotelling no era correcto.

A lo largo de este artículo, se describen las implicaciones prácticas y teóricas de estas observaciones, brindando una perspectiva valiosa para comprender cómo la variación en el exponente n de la función de costos de transporte impacta la dinámica competitiva y la búsqueda de equilibrio en un contexto de duopolio entre empresas privadas y públicas, lo que, a nuestro entender, no se ha hecho en investigaciones previas.

2 MARCO TEÓRICO

Fue en el año de 1929, cuando el matemático Harold Hotelling describió el fenómeno conocido como ley de Hotelling (también nombrado principio de mínima diferenciación o modelo de ciudad lineal de Hotelling) en su artículo titulado "*Stability in Competition*". Dicha ley señala que hay una "tendencia indebida de los competidores a imitarse unos a otros en calidad de los bienes, en la ubicación y en otras formas esenciales" (Hotelling, 1929).

Hotelling explica cómo las empresas se reparten el mercado, específicamente porque tiendas o empresas que venden lo mismo, tienden a ubicarse cerca unas de otras. Si se considera que los consumidores están distribuidos de manera uniforme en una línea, que la empresa 1 está a $1/4$ del extremo izquierdo, y que, la empresa 2 se localiza a $1/4$ del extremo derecho, de tal manera que los consumidores eligen comprar para la empresa que se encuentre más cercana, existe la posibilidad de que la empresa 2 quiera moverse hacia al centro, con el propósito de aumentar sus ventas, lo cual supone un inconveniente para la empresa 1, ya que esta termina perdiendo una parte de sus consumidores y, por lo tanto, de sus ganancias, lo que provoca que en el futuro también se acerque al centro. Si las empresas siguieran esta misma tendencia, en algún momento estarán una junto a la otra, lo cual implica que ambas empresas se dividirán de manera equitativa el mercado, sin embargo, aquellos consumidores establecidos en las orillas encontrarán más lejanas dichas ubicaciones con respecto a las ubicaciones originales de las empresas, dicha situación no es socialmente óptima.

La explicación anterior no se limita a ubicaciones de empresas, también puede ser usada para explicar un fenómeno producido en elecciones bipartidistas, y es que "cada partido se esfuerza por hacer que su plataforma sea lo más parecida posible a la del otro" (Hotelling, 1929).

En la época en que Hotelling introdujo su modelo, se pensaba que el duopolio no era fuerte, ya que, si una de las empresas bajaba el precio, la otra capturaría todo el mercado (Ridley, 2016). Sin embargo, Hotelling pensaba que eso no ocurría en la vida real, porque "algunos compran a un vendedor, otros a otra, a pesar de moderadas diferencias de precio" (Hotelling, 1929). Y es que, si los participantes de un duopolio aceptan colaborar en la elección de precios o en la producción, dicho duopolio puede comportarse como un monopolio. Sin embargo, dicha posibilidad disminuye cuando las empresas manifiestan su deseo por competir.

Pese a que el proceso de privatización se ha vuelto cada vez más popular en el mundo, aún existen empresas públicas que coexisten y compiten contra empresas privadas en una gran variedad de industrias. Dichos mercados son llamados mercados mixtos, los cuales, son importantes en muchos países (Matsumura & Tomaru, 2013). México no ha sido la excepción, y es que, desde la década de los ochenta, el gobierno ha vendido empresas públicas a la iniciativa privada, dicha privatización ha impactado a la industria telefónica y televisiva, pero aún en estos tiempos se pueden encontrar ejemplos de mercados mixtos en el área de la salud, la educación y los servicios bancarios (Flores-Curiel et al., 2004). Otro campo de aplicación reciente de este tipo de estudios lo representa la industria de autos eléctricos, ya que existe el interés de conocer la ubicación óptima de las estaciones de carga (Park y Moon, 2023; Zhou et al., 2022).

Fernández-Ruiz (2020) encuentra que, a diferencia del supuesto de una función de costos de transporte cuadrática donde existe equilibrio y la ubicación de las empresas es óptima cuando se considera una función de costos de transporte cúbica, las localizaciones de las empresas dejan ser socialmente convenientes. También comenta que con funciones de costo de transportes lineales existe la posibilidad de equilibrio con respecto a la asignación de precios en determinadas ubicaciones, pero no en todas las posibles localizaciones de las empresas.

Los autores no encontraron estudios que tomen en consideración funciones de costos de transporte en la vecindad de funciones lineales y cuadráticas, es decir, con valores de n cercanos a uno o a dos. Debido a la existencia de este tipo de mercados en el país, resulta interesante llevar a cabo un estudio que permita analizar un duopolio mixto en un marco de tipo Hotelling, en concreto cómo se comportan las funciones beneficio y costo de transporte y cómo la elección del exponente n en esta última modifica las ubicaciones de las empresas de tal manera que estas son socialmente óptimas o no.

Para hacer este estudio se requirió de la implementación de un modelo que está integrado por una empresa pública y una empresa privada, empresa 0 y empresa 1 respectivamente, las cuales participan en un juego que consiste en 2 etapas: en la primera etapa eligen simultáneamente su ubicación, mientras que en la segunda etapa escogen simultáneamente sus precios (Cremer et al., 1991).

Asimismo, se deben considerar los siguientes puntos:

- El juego ocurre en una hipotética ciudad lineal, misma que, para fines prácticos, no se considerará la longitud real; en cambio, se supondrá que dicha ciudad se encuentra en el intervalo $[0,1]$, en donde los consumidores se encontrarán distribuidos uniformemente.
- El objetivo de la empresa 0 es maximizar el bienestar público, lo cual se logra al minimizar los costos de transporte, mientras que el propósito de la empresa 1 es el de maximizar los beneficios (Rittenberg, 2008).
- Las posiciones de las empresas 0 y 1 se indican como x_0 y x_1 respectivamente, tales que $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$.
- El costo total de un producto se define como la suma del costo de producción más el costo de transporte.
- El costo marginal (incremento en el costo total si se produce una unidad adicional de cierto producto (Rittenberg, 2008)) es igual a 0.
- Los consumidores presentan una demanda inelástica (dicha demanda es propia de artículos esenciales, ya que al incrementar sus precios la demanda

disminuye, pero esa disminución es insignificante y en algunas ocasiones, nula).

- Si un consumidor compra en la empresa 0, el precio del transporte será de $|y - x_0|^n$ y si lo hace en la empresa 1, el precio se establecerá como $|y - x_1|^n$, donde $n \in [1, 3]$
- Las empresas venden lo mismo.
- La demanda de la empresa i-ésima se denota como q_i tales que $q_0 + q_1 = 1$, en tanto que el precio de la empresa i-ésima se expresa como p_i.
- El costo total de un producto se define como la suma del costo de producción más el costo de transporte: $p_0 + |y - x_0|^n$ para la empresa 0 y $p_1 + |y - x_1|^n$ para la empresa 1.

3 METODOLOGÍA

Como se mencionó anteriormente, el análisis se lleva a cabo en una línea que va de 0 a 1 en la cual se encuentran establecidas la empresa 0 y la empresa 1, las cuales venden un producto cuyos precios totales son: $P_0 = p_0 + |y - x_0|^n$ y $P_1 = p_1 + |y - x_1|^n$, respectivamente. Sea $d(y)$ la resta de P_0 y P_1 (para el caso de $n = 3$ y, en general, para cualquier n):

$$d(y) = P_0 - P_1 = p_0 + |y - x_0|^3 - p_1 - |y - x_1|^3$$

de tal manera que al ser evaluada en y^* se tiene:

$$d(y^*) = 0 \Rightarrow P_0 = P_1$$

$$\therefore p\_0 + |y - x\_0\,|\hat{}3 = p\_1 + |y - x\_1\,|\hat{}3 \qquad (1)$$

si $0 \leq y^* \leq 1$, y^* representa la ubicación del consumidor indiferente, pues el precio de ambas empresas resulta ser el mismo (Sanz, 1988).

Es importante analizar el comportamiento tanto de $d(y)$ como de y^*, pues el valor de ambas repercute en el precio de los productos y, por lo tanto, en la demanda de las empresas (Thomas et al., 1992). Esto se puede resumir como:

Si $d(y) < 0$ implica que $P_1 > P_0$ por lo que los consumidores preferirán a la empresa 0.

Si $d(y) > 0$ implica que $P_1 < P_0$ por esta razón los consumidores seleccionarán a la empresa 1.

Si $0 \leq y^* \leq 1$ entonces y^* representa la demanda de la empresa 0. A la izquierda de y^* están los consumidores que escogen comprar a la empresa 0 y a la derecha de y^* aquellos que optan por la empresa 1.

Si $y^* > 0$ los consumidores querrán adquirir el producto en la empresa 0.

Si $y^* < 0$ entonces todos los consumidores desearan comprar en la empresa 1.

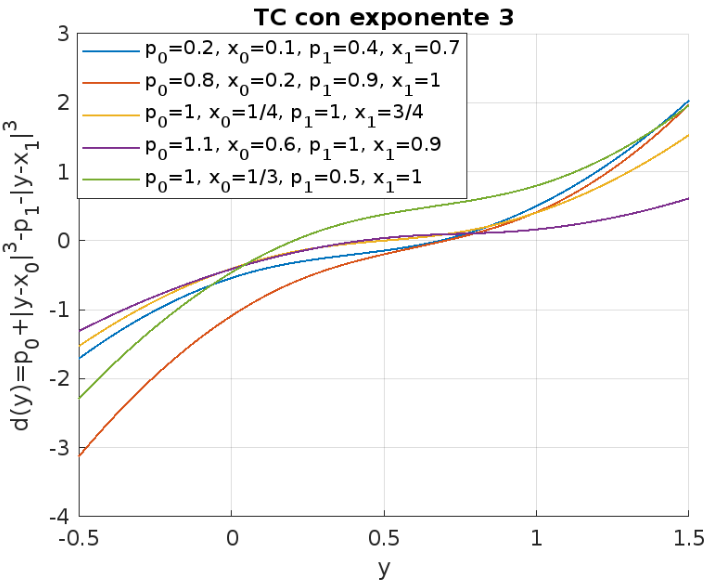

Figura 1. TC con exponente 3.

La ecuación (1) cuenta con una única solución, para verlo basta notar que la función d en y dada por $d(y) = P_0 - P_1 = p_0 + |y - x_0|^3 - p_1 - |y - x_1|^3$ es estrictamente creciente y continua, la cual se aproxima a $+\infty$ si $y \to +\infty$ o a $-\infty$ si $y \to -\infty$. En la Figura 1 se considera el exponente como 3 y los valores $p_0, \; p_1, \; x_0 \; y \; x_1$ van cambiando de tal manera que siempre se cumpla $x_0 < x_1$.

Del análisis anterior, surge la siguiente ecuación:

$$q_0 = \begin{cases} q_0 = 0 & si \quad y^* \leq 0 \\ y* & si \quad 0 \leq y* \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq y* \end{cases}$$

A partir de dicha ecuación tenemos:

$$q_0 = \begin{cases} = 0 \quad si & p_1 - p_0 \leq -({x_1}^3 - {x_0}^3) \\ \in [0, x_0] \; si & -({x_1}^3 - {x_0}^3) \leq p_1 - p_0 \leq -(x_1 - x_0)^3 \\ \in [x_0, x_1] \; si & -(x_1 - x_0)^3 \leq p_1 - p_0 \leq (x_1 - x_0)^3 \\ \in [x_{1,1}] \; si & (x_1 - x_0)^3 \leq p_1 - p_0 \leq (1 - x_0)^3 - (1 - x_1)^3 \\ = 1 \; si & (1 - x_0)^3 - (1 - x_1)^3 \leq p_1 - p_0 \end{cases} \tag{2}$$

Sea q_1 la demanda de la empresa 1, denotada como:

$$q_1 = 1 - q_0 \tag{3}$$

Para maximizar la demanda del producto se debe minimizar el costo de transporte, cuya expresión es la siguiente:

$$TC = \int_0^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3 \, dy \tag{4}$$

Para encontrar la solución de TC hay que revisarla por casos:

Caso 1: $0 \leq q_0 \leq x_0$

$$TC = \int_0^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3 \, dy$$

$$\int_0^{q_0} |y - x_0|^3 dy = \int_0^{q_0} (x_0 - y)^3 dy = -\frac{(x_0 - y)^4}{4} \Big|_0^{q_0} = \frac{{x_0}^4 - (x_0 - q_0)^4}{4}$$

$$\int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3 dy = \int_{q_0}^{x_1} |y - x_1|^3 dy + \int_{x}^{1} |y - x_1|^3 dy$$

$$= \int_{q_0}^{x_1} (x_1 - y)^3 dy + \int_{x_1}^{1} (y - x_1)^3 dy$$

$$= -\frac{(x_1 - y)^4}{4} \Big|_{q_0}^{x_1} + \frac{(y - x_1)^4}{4} \Big|_{x_1}^{1}$$

$$= \frac{-(x_1 - x_1)^4 + (x_1 - q_0)^4 + (1 - x_1)^4 - (x_1 - x_1)^4}{4}$$

$$= \frac{(x_1 - q_0)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

$$\therefore \int_0^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3 \, dy = \frac{{x_0}^4 - (x_0 - q_0)^4 + (x_1 - q_0)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

Caso 2: $x_0 \leq q_0 \leq x_1$

$$TC = \int_0^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3 \, dy$$

$$\int_0^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy = \int_0^{x_0} |y - x_0|^3 \, dy + \int_{x_0}^{q_0} |y - x_0|^3 \, dy$$

$$= \int_0^{x_0} (x_0 - y)^3 \, dy + \int_{x_0}^{q_0} (y - x_0)^3 \, dy = -\frac{(x_0 - y)^4}{4} \Big|_0^{x_0} + \frac{(y - x_0)^4}{4} \Big|_{x_0}^{q_0}$$

$$= \frac{-(x_0 - x_0)^4 + {x_0}^4 + (q_0 - x_0)^4 - (x_0 - x_0)^4}{4}$$

$$\int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3\, dy = \int_{q_0}^{x_1} |y - x_1|^3\, dy + \int_{x_1}^{1} |y - x_1|^3\, dy$$

$$= \int_{q_0}^{x_1} (x_1 - y)^3\, dy + \int_{x_1}^{1} (y - x_1)^3\, dy = \frac{-(x_1 - y)^4}{4}\Big|_{q_0}^{x_1} + \frac{(y - x_1)^4}{4}\Big|_{x_1}^{1}$$

$$= \frac{-(x_1 - x_1)^4 + (x_1 - q_0)^4 + (1 - x_1)^4 - (x_1 - x_1)^4}{4}$$

$$\therefore \int_0^{q_0} |y - x_0|^3\, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3\, dy = \frac{{x_0}^4 + (q_0 - x_0)^4 + (q_0 - x_1)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

Caso 3: $x_1 \leq q_0 \leq 1$

$$TC = \int_0^{q_0} |y - x_0|^3\, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3\, dy$$

$$\int_0^{q_0} |y - x_0|^3\, dy = \int_0^{x_0} |y - x_0|^3\, dy + \int_{x_0}^{q_0} |y - x_0|^3\, dy$$

$$= \int_0^{x_0} (x_0 - y)^3\, dy + \int_{x_0}^{q_0} (y - x_0)^3\, dy = -\frac{(x_0 - y)^4}{4}\Big|_0^{x_0} + \frac{(y - x_0)^4}{4}\Big|_{x_0}^{q_0}$$

$$= \frac{-(x_0 - x_0)^4 + (x_0 - 0)^4 + (q_0 - x_0)^4 - (x_0 - x_0)^4}{4} = \frac{{x_0}^4 + (q_0 - x_0)^4}{4}$$

$$\int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3\, dy = \int_{q_0}^{1} (y - x_1)^3\, dy = \frac{(y - x_1)^4}{4}\Big|_{q_0}^{1} = \frac{(1 - x_1)^4 - (q_0 - x_1)^4}{4}$$

$$\therefore \int_0^{q_0} |y - x_0|^3\, dy + \int_{q_0}^{1} |y - x_1|^3\, dy = \frac{{x_0}^4 + (q_0 - x_0)^4 - (q_0 - x_1)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

Por lo tanto, TC se puede escribir como:

$$TC = \begin{cases} \frac{{x_o}^4 - (x_0 - q_0)^4 + (x_1 - q_o)^4 + (1 - x_1)^4}{4} & si \quad 0 \leq q_0 \leq x_0 \\ \frac{{x_o}^4 + (q_0 - x_0)^4 + (q_0 - x_1)^4 + (1 - x_1)^4}{4} & si \quad x_0 \leq q_0 \leq x_1 \\ \frac{{x_o}^4 + (q_0 - x_0)^4 - (q_0 - x_1)^4 + (1 - x_1)^4}{4} & si \quad x_1 \leq q_0 \leq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Para minimizar TC, la empresa 0 escoge p_0 de tal manera que

$$p_0 = p_1 \tag{6}$$

Para demostrar lo anterior, es necesario estudiar el comportamiento de TC en los 3 intervalos.

En el intervalo $0 \leq q_0 \leq x_0$, TC es estrictamente decreciente en q_0:

$$\frac{dTC}{dq_0} = \frac{4(x_0 - q_0)^3 - 4(x_1 - q_0)^3}{4} = (x_0 - q_0)^3 - (x_1 - q_0)^3 < 0$$

ya que $(q_0 - x_0) > 0$, al elevarse al cubo, sigue siendo positivo y $(x_1 - q_0) > 0$ que también es positivo al elevarse al cubo se restan, pero el segundo término es más grande que el primer término, por lo cual, el resultado es negativo.

En el intervalo $x_1 \leq q_0 \leq 1$, TC es estrictamente creciente en q_0:

$$\frac{dTC}{dq_0} = \frac{4(q_0 - x_0)^3 - 4(q_0 - x_1)^3}{4} = (q_0 - x_0)^3 - (q_0 - x_1)^3 > 0$$

se puede notar que $(q_0 - x_0) > 0$, el cual, al ser cúbico, es positivo, por otro lado, $(q_0 - x_1) > 0$ se mantiene positivo al elevarse al exponente 3; sin embargo, el primer término es mayor que el segundo, de manera que al restarse el resultado es positivo.

TC tiene un mínimo relativo en el intervalo $x_0 \leq q_0 \leq x_1$, es decir, es cóncava hacia arriba ya que existe algún q_0 tal que $\frac{dTC}{dq_0}(q_0) = 0$ y $\frac{d^2TC}{dq_0{}^2} > 0$

$$\frac{dTC}{dq_0} = \frac{4(q_0 - x_0)^3 + 4(q_0 - x_1)^3}{4} = (q_0 - x_0)^3 + (q_0 - x_1)^3 = 0$$

Desarrollando los binomios al cubo y agrupando los términos semejantes se obtiene:

$$2q_0{}^3 - 3q_0{}^2(x_0 + x_1) + 3q_0(x_0{}^2 + x_1{}^2) - (x_0{}^3 + x_1{}^3) = 0$$

Se igualan los binomios con el propósito de obtener el valor de q_0

$$(q_0 - x_0)^3 = (x_1 - q_0)^3 \Rightarrow q_0 - x_0 = x_1 - q_0$$

$$\Rightarrow 2q_0 = x_1 + x_0 \Rightarrow q_0 = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

Evaluando la ecuación $\frac{dTC}{dq_0}$ en el q_0 resultante se tiene:

$$\left(\frac{dTC}{dq_0}\right)_{q_0 = \frac{x_0 + x_1}{2}} = \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right)^3 + \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1\right)^3$$

$$= \frac{x_1{}^3 - 3x_1{}^2x_0 + 3x_1x_0{}^2 - x_0{}^3 + x_0{}^3 - 3x_0{}^2x_1 + 3x_0x_1{}^2 - x_1{}^3}{8} = 0$$

Calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2TC}{dq_0^2} = \frac{12(q_0 - x_0)^2 + 12(q_0 - x_1)^2}{4} = 3(q_0 - x_0)^2 + 3(q_0 - x_1)^2$$

$$= 3({q_0}^2 - 2q_0x_0 + {x_0}^2 + {q_0}^2 - 2q_0x_1 + {x_1}^2)$$

Evaluando la segunda derivada en q_0:

$$\left(\frac{d^2TC}{dq_0^2}\right)_{q_0=\frac{x_0+x_1}{2}} = 3\left(\frac{x_0 + x_1 - 2x_0}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x_0 + x_1 - 2x_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{6}{4}({x_1}^2 + {x_0}^2 - 2x_0x_1) = \frac{3}{2}(x_1 - x_0)^2 > 0$$

Por lo que los costos de transporte se minimizan cuando $q_0 = \frac{x_0+x_1}{2}$. Por otro lado, todo el análisis hecho hasta ahora se ha efectuado en el intervalo $0 \leq y^* \leq 1$. Sin embargo, es posible representar como $y^* = q_0$. En este caso se obtiene:

$$p_0 + |q_0 - x_0|^3 = p_1 + |q_0 - x_1|^3$$

$\Leftarrow$ Recordando que $q_0 = \frac{x_0+x_1}{2}$

$$p_0 + \left|\frac{x_1 - x_0}{2}\right|^3 = p_1 + \left|\frac{x_0 - x_1}{2}\right|^3 \Rightarrow p_0 + \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^3 = p_1 - \left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow p_0 + \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^3 = p_1 + \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^3 \rightarrow p_0 = p_1$$

$\Longrightarrow$ Si por el contrario se establece $p_0 = p_1$ entonces:

$$|q_0 - x_0|^3 = |q_0 - x_1|^3 \Rightarrow (q_0 - x_0)^3 = -(q_0 - x_1)^3 \Rightarrow (q_0 - x_0)^3 = (x_1 - q_0)^3$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{q}_0 = \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 \Rightarrow \mathrm{q}_0 = \frac{\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1}{2} \blacksquare$$

La empresa 1 elige p_1 para maximizar los beneficios de la empresa 1. La función beneficio se denota como Π_1:

$$\Pi_1 = p_1(1 - q_0) \tag{7}$$

Si la empresa 1 escoge un precio p_1 en el intervalo $-(x_1 - x_0)^3 \leq p_1 - p_0 \leq (x_1 - x_0)^3$ (el cual corresponde a $x_0 \leq q_0 \leq x_1$), se tiene que la primera condición de orden para maximizar los beneficios dentro del intervalo está dada por:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = -p_1 \frac{\partial q_0}{\partial p_1} + 1 - q_0 = 0$$

donde $\frac{\partial q_0}{\partial p_1}$ se obtiene de $p_0 + (q_0 - x_0)^3 = p_1 + (x_1 - q_0)^3$ cuando $x_0 \leq q_0 \leq x_1$

$$\frac{\partial q_0}{\partial p_1} = \frac{1}{3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2}$$

$$3(q_0 - x_0)^2 \left(\frac{\partial q_0}{\partial p_1}\right) = 1 + 3(x_1 - q_0)^2 \left(-\frac{\partial q_0}{\partial p_1}\right)$$

$$[3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2] \frac{\partial q_0}{\partial p_1} = 1$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial p_1} = \frac{1}{3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2}$$

Y, por lo tanto, la condición de primer orden de la empresa 1 es:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = \frac{-p_1}{3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2} + 1 - q_0 = 0. \qquad (8)$$

Resolviendo para p_1 y recordando que $p_0 = p_1$:

$$\frac{p_1}{3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2} = 1 - q_0$$

$$\Rightarrow p_1 = 3(q_0 - x_0)^2 + 3(x_1 - q_0)^2 - 3q_0(q_0 - x_0)^2 - 3q_0(x_1 - q_0)^2$$

$$= 3\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2$$

$$= 6\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{6}{4}(x_1 - x_0)^2 \left[1 - \frac{x_0}{2} - \frac{x_1}{2}\right] = \frac{3(2 - x_0 - x_1)(x_1 - x_0)^2}{4}$$

$$\therefore p_0 = p_1 = \frac{3(2 - x_0 - x_1)(x_1 - x_0)^2}{4} \qquad (9)$$

Por lo tanto, el equilibrio en la segunda etapa del juego está dado por la ecuación anterior. Así, dado cualquier p_1, la empresa 0 minimiza los costos de transporte siempre y cuando se cumpla que $p_0 = p_1$. Por ello, la empresa 0 no puede reducir los costos de transporte si se desvía a otro precio. Considerando la primera etapa del juego, se deben reemplazar los precios p_0 y p_1 en la ecuación (9), q_0 en los costos de transporte en TC y los beneficios de la empresa 1 en Π_1, de esta manera se obtienen los costos de transporte y los beneficios de la empresa 1 en función de x_0 y x_1.

$$TC = \frac{x_0^4 - (x_0 - q_0)^4 + (x_1 - q_0)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

$$= \frac{x_0^4 - \left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^4 + \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^4 + (1 - x_1)^4}{4}$$

$$= \frac{x_0^4 + 2\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^4 + (1 - x_1)^4}{4} \tag{10}$$

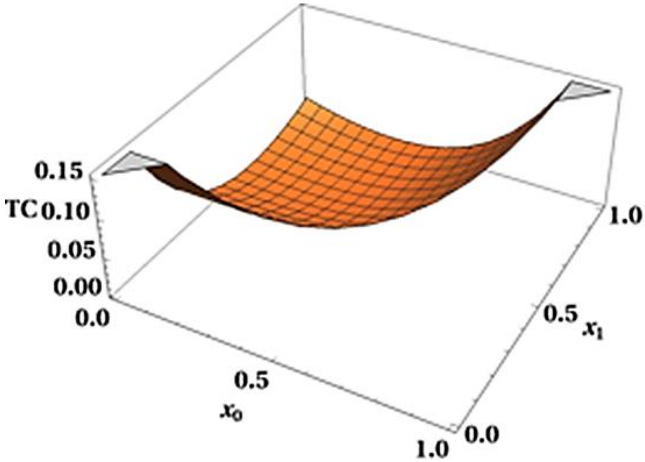

Figura 2. Ecuación TC con exponente 3.

$$\Pi_1 = p_1(1 - q_0) = \frac{3(2 - x_0 - x_1)(x_1 - x_0)^2}{4} \cdot \frac{2 - x_0 - x_1}{2} = \frac{3(2 - x_0 - x_1)^2(x_1 - x_0)^2}{8} \tag{11}$$

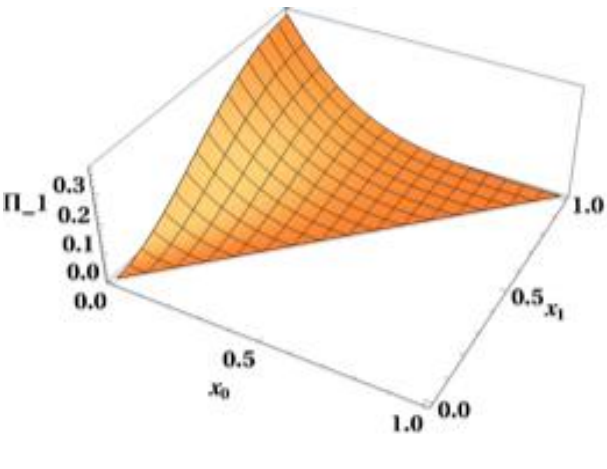

Figura 3. Ecuación Π_1 con exponente 3.

En la primera etapa del juego la empresa 0 escoge x_0 para minimizar TC y la empresa 1 elige x_1 para maximizar Π_1. La minimización de TC con respecto a x_0 genera la condición de primer orden:

$$\frac{\partial TC}{\partial x_0} = \frac{4x_0^3 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^3}{4} = x_0^3 - \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^3 = 0 \qquad (12)$$

La condición de segundo orden se produce al efectuar la segunda derivada de TC con respecto a x_0:

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial x_0^2} = 3x_0^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 = 3x_0^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 > 0 \qquad (13)$$

La maximización de Π_1 con respecto a x_1 conduce a la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = \frac{6(x_1 - x_0)(2 - x_1 - x_0)^2 + 3(x_1 - x_0)^2(-2)(2 - x_1 - x_0)}{8}$$

$$= \frac{6(x_1 - x_0)(2 - x_1 - x_0)[(2 - x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)]}{8}$$

$$= \frac{6(x_1 - x_0)(2 - x_1 - x_0)(2)(1 - x_1)}{8} = \frac{3(x_1 - x_0)(2 - x_1 - x_0)(1 - x_1)}{2} = 0 \qquad (14)$$

$\forall x_0 < x_1 < 1$ se tiene que $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} > 0$ ya que $(x_1 - x_0) > 0$, $(2 - x_1 - x_0) > 0$ y $(1 - x_1) > 0$. Y $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}(x_1 = 1) = 0$ puesto que:

$$\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}\right)_{x_1 = 1} = \frac{3}{2}(1 - x_0)(2 - 1 - x_0)(1 - 1) = 0$$

El punto óptimo elegido por la empresa 1 es $x_1 = 1$. La elección óptima de la empresa 0 es $x_0 = \frac{x_1}{3}$ usando las condiciones de primer y segundo orden se tiene:

$$\left(\frac{\partial TC}{\partial x_0}\right)_{x_0 = \frac{x_1}{3}} = \left(\frac{x_1}{3}\right)^3 - \left(\frac{x_1 - \frac{x_1}{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{x_1}{3}\right)^3 - \left(\frac{2x_1}{6}\right)^3 = \left(\frac{x_1}{3}\right)^3 - \left(\frac{x_1}{3}\right)^3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 TC}{\partial x_0^2}\right)_{x_0 = \frac{x_1}{3}} = 3\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{x_1 - \frac{x_1}{3}}{2}\right)^2 = \frac{3x_1^2}{9} + \frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 = \frac{3x_1^2}{9} + \frac{3x_1^2}{18} > 0$$

Optimizando simultáneamente TC y Π_1 se obtienen las siguientes ubicaciones:

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = 1 \qquad (15)$$

Las cuales están fuera de la zona restringida y, por lo tanto, hay equilibrio en la segunda etapa. Cabe resaltar que este es el único equilibrio perfecto de ubicación. Economides (1984; 1986; 1989) sugiere el término tendencia de reubicación:

Tendencia de reubicación de la empresa 1: dirección en la cual $\frac{\partial TC}{\partial x_1} < 0$.

Tendencia de reubicación de la empresa 0: dirección donde $\frac{\partial TC}{\partial x_1} > 0$.

4 RESULTADOS

En la siguiente figura se resumen las funciones y ubicaciones obtenidas a partir de la función $d(y) = p_0 + |y - x_0|^n - p_1 - |y - x_1|^n$, donde n toma los valores de 1, 1.25, 1.5, 1.75, 1.9, 2, 2.1, 2.25, 2.5, 2.75 y 3. Cabe destacar que tanto p_0 como p_1 son iguales a 1, mientras que las ubicaciones x_0 y x_1 van cambiando de tal manera que siempre se cumpla $x_0 < x_1$.

	Funciones		**Ubicaciones**		
n	TC	Π_1	x_0	x_1	$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
1	$\frac{3{x_0}^2}{4}+\frac{3{x_1}^2}{4}-\frac{x_0x_1}{2}+\frac{1}{2}-x_1$	$\frac{(2-x_0-x_1)^2}{2}$	1/2	3/2	-1
1.25	$\frac{4x_0^{9/4}+8\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{9/4}+4(1-x_1)^{9/4}}{9}$	$\frac{5(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{1/4}}{8(2)^{1/4}}$	1/10	3/10	-0.662912
1.5	$\frac{2x_0^{5/2}+4\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{5/2}+2(1-x_1)^{5/2}}{5}$	$\frac{3(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{1/2}}{4\sqrt{2}}$	1/6	1/2	-0.375
1.75	$\frac{4x_0^{11/4}+8\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{11/4}+4(1-x_1)^{11/4}}{11}$	$\frac{7(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{3/4}}{8(2)^{3/4}}$	3/14	9/14	-0.154679
1.9	$\frac{10x_0^{29/10}+20\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{29/10}+10(1-x_1)^{29/10}}{29}$	$\frac{19(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{9/10}}{20(2)^{9/10}}$	9/38	27/38	-0.054563
2	$\frac{x_0^3+2\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^3+(1-x_1)^3}{3}$	$\frac{(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)}{2}$	1/4	3/4	0
2.1	$\frac{10x_0^{31/10}+20\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{31/10}+10(1-x_1)^{31/10}}{31}$	$\frac{21(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{11/10}}{40(2)^{1/10}}$	11/42	11/14	0.045703
2.25	$\frac{4x_0^{13/4}+8\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{13/4}+4(1-x_1)^{13/4}}{13}$	$\frac{9(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{5/4}}{16(2)^{1/4}}$	5/18	5/6	0.09943
2.5	$\frac{2x_0^{7/2}+4\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{7/2}+2(1-x_1)^{7/2}}{7}$	$\frac{5(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{3/2}}{8\sqrt{2}}$	3/10	9/10	0.15625
2.75	$\frac{4x_0^{15/4}+8\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^{15/4}+4(1-x_1)^{15/4}}{15}$	$\frac{11(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^{7/4}}{16(8)^{1/4}}$	7/22	21/22	0.1823
3	$\frac{x_0^4+2\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^4+(1-x_1)^4}{4}$	$\frac{3(2-x_0-x_1)^2(x_1-x_0)^2}{8}$	1/3	1	0.1875

Figura 4. Funciones y ubicaciones.

Se presentan los resultados obtenidos al realizar el mismo análisis con diferentes exponentes de tal manera que $n \in (1, 3)$. Se incluyen las funciones de costo de transporte y de beneficio de la empresa 1, las ubicaciones en equilibrio y, finalmente, el valor que resulta de evaluar la función beneficio de la empresa 1 en $(x_0, x_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, con esto se busca estudiar el comportamiento de la empresa 1, específicamente su tendencia de reubicación, la cual motiva a la empresa privada a alejarse (o acercarse) a la empresa pública dependiendo de su signo.

Estos datos sirven para hacer notar que, únicamente cuando los costos de transporte son cuadráticos, se obtienen las ubicaciones socialmente óptimas y una tendencia de reubicación igual a 0. Esto tiene sentido ya que en dichas ubicaciones ninguna de las empresas puede obtener mayor beneficio intentando buscar otra localización. Para el caso de una función lineal y una función cúbica, dos resultados de ubicación son posibles. El primero establece que la ubicación de las empresas se presente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, lo que implica que la localización de la empresa 1 está fuera del rango establecido al comienzo de esta investigación. Mientras que para el segundo caso, el punto de ubicación es $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. Esto es, la empresa 1 tendrá mayor beneficio si cambia su ubicación, de tal manera que se reubique en un punto más lejano de la empresa 0.

5 DISCUSIÓN

La modesta extensión del modelo de Hotelling aquí presentada y que se basa en el aporte de Fernández-Ruiz (2020), permite entender el comportamiento de dos empresas, una pública y una privada, con respecto a su potencial plan de ubicación para maximizar sus beneficios en un contexto en donde los consumidores deberían gastar menos en su desplazamiento hacia estas empresas. A través del análisis de las funciones TC y Π_1 con ocho valores distintos para n, sin contar los casos donde $n = 1, 2$ y 3 dado que estos ya han sido estudiados en D'aspremont et al. (1979), Fernández-Ruiz (2020) y Hotelling (1929), se puede establecer que tanto a las empresas como a los consumidores no les es conveniente ninguna reubicación cuando la función de costos de transporte está elevada al cuadrado. No existe un $n \neq 2$ tal que, las ubicaciones obtenidas sean socialmente óptimas. Este resultado coincide con los de Fernández-Ruiz (2020); Li (2006) y Ma (2021).

6 CONCLUSIONES

La Figura 5 muestra que las ubicaciones socialmente óptimas siempre serán las mismas sin importar el n que se haya considerado, es decir, dado cualquier $n \in [1, 3]$ la localización de la empresa 0 y la empresa 1, que minimizan el costo de transporte siempre serán $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{3}\right)$, las cuales solo se consiguen para el caso cuadrático.

Al establecer $n = 2$ se puede notar que $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = 0$, por lo tanto, ninguna de las empresas tendrá incentivos para cambiar marginalmente su ubicación. Por otro lado, si $n < 2$ se tiene que $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} < 0$ por lo que la empresa privada estará motivada a acercarse a la empresa pública y, finalmente, si $n > 2$ se obtiene $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} > 0$ lo que significa que la empresa privada querrá alejarse de la empresa pública.

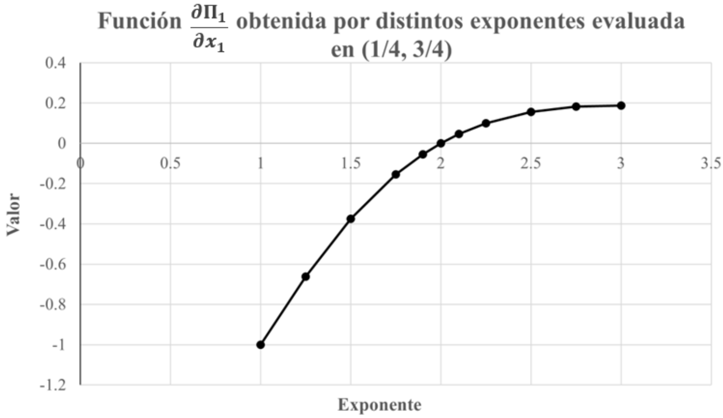

Figura 5. Función según los exponentes.

La Figura 5: $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}$ es obtenida por diferentes exponentes en el intervalo $[1, 3]$ evaluado en las ubicaciones socialmente óptimas.

Cabe resaltar que la tendencia de reubicación está estrechamente relacionada con la minimización de costos de transporte, ya que al minimizar dicha tendencia en costos, esta será igual a 0 y, de esta manera, ninguna empresa podrá reducir más estos costos. Asimismo, a las ubicaciones de las empresas cuyos costos de transporte se hayan minimizado se les conoce como ubicaciones socialmente óptimas.

La importancia de este tipo de estudios radica precisamente en el aspecto social de los mismos. Al destacar que la atención de los bienes generados o los servicios prestados puedan ser adquiridos por una mayoría de personas al menor costo de traslado, así los destacan estudios diversos (Dragone y Lambertini, 2020; Heywood et al., 2022; Matsumura & Tomaru, 2013) con resultados coincidentes a nuestro estudio. Es importante mencionar que en este caso de estudio sobre duopolio mixto, se asume que las empresas se encuentran en una línea recta y que siempre se debe cumplir que $x_0 < x_1$. Futuras líneas de investigación podrían prescindir del supuesto de línea recta y considerará la densidad en gustos y preferencias de los consumidores.

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Daniela Hernández Altamirano: análisis formal, metodología. Antonio Kido Cruz: conceptualización, escritura, revisión y corrección. Ricardo Becerril Bárcenas: administración del proyecto, supervisión, validación. Todos los autores han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito.

FINANCIACIÓN

Esta investigación fue financiada por la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, número de subvención 01/2024.

CONFLICTOS DE INTERESES

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

REFERENCIAS

Anderson, S. P. (1988). Equilibrium existence in the linear model of spatial competition. *Economica, 220*(55), 479–491. https://doi.org/10.2307/2553910

Andree, K., Heywood, J. S., Schwan, M., & Wang, Z. (2018). A spatial model of cartel stability: the influence of production cost convexity. *Bulletin of Economic Research*, *70*(3), 298–311. https://doi.org/10.1111/boer.12149

Bárcena-Ruiz, J. C., & Casado-Izaga, F. J. (2012). Location of public and private firms under endogenous timing of choices. *Journal of Economics/Zeitschrift fur Nationalokonomie*, *105*(2), 129–143. https://doi.org/10.1007/s00712-011-0228-6

Cremer, H., Marchand, M., & Thisse, J. F. (1991). Mixed oligopoly with differentiated products. *International Journal of Industrial Organization*, *9*(1), 43–53. https://doi.org/10.1016/0167-7187(91)90004-5

D’aspremont, C., Jaskold Gabszewicz, J., & Thisse, J.-F. (1979). On Hotelling’s “Stability in Competition”. *Econometrica*, *47*(5), 1145–1150. https://doi.org/10.2307/1911955

Dragone, D., & Lambertini, L. (2020). Equilibrium existence in the Hotelling model with convex production costs. *Regional Science and Urban Economics*, *84*, 103568. https://doi.org/10.1016/J.REGSCIURBECO.2020.103568

Drezner, T., & Drezner, Z. (2016). Sequential location of two facilities: comparing random to optimal location of the first facility. *Annals of Operations Research, 246*, 5–18. https://doi.org/10.1007/s10479-014-1699-y

Economides, N. (1984). The principle of minimum differentiation revisited. *European Economic Review, 24*(3), 345–368. https://doi.org/10.1016/0014-2921(84)90061-8

Economides, N. (1986). Minimal and maximal product differentiation in Hotelling’s duopoly. *Economics Letters*, *21*(1), 67–71. https://doi.org/10.1016/0165-1765(86)90124-2

Economides, N. (1989). Quality variations and maximal variety differentiation. *Regional Science and Urban Economics, 19*(1), 21–29. https://doi.org/10.1016/0166-0462(89)90031-8

Fernández-Ruiz, J. (2020). Mixed duopoly in a Hotelling framework with cubic transportation costs. *Letters in Spatial and Resource Sciences*, *13*(2), 133–149. https://doi.org/10.1007/s12076-020-00249-y

Flores-Curiel, D., Cárdenas-Rodríguez, O. J., y Arteaga-García, J. C. (2004). Privatización: ¿Suben o bajan los precios? Duopolio mixto con diferenciación vertical. *Estudios Económicos*, *19*(2), 141-157.

Heywood, J. S., Li, D., & Ye, G. (2022). Mixed duopoly under hotelling with convex production costs. *Annals of Regional Science, 69*(2), 487–510. https://doi.org/10.1007/s00168-022-01144-8

Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal, 39* (153), 41-57. https://doi.org/10.2307/2224214

Li, C. (2006). Location choice in a mixed oligopoly. *Economic Modelling*, *23*(1), 131–141. https://doi.org/10.1016/J.ECONMOD.2005.09.002

Ma, H., Wang, X. H., & Zeng, C. (2021). Location choice and costly product differentiation in a mixed duopoly. *Annals of Regional Science, 66*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s00168-020-01014-1

Matsumura, T., & Tomaru, Y. (2013). Mixed duopoly, privatization, and subsidization with excess burden of taxation. *Canadian Journal of Economics*, *46*(2), 526–554. https://doi.org/10.1111/caje.12022

Park, J., & Moon, I. (2023). A facility location problem in a mixed duopoly on networks. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *175*, 103149. https://doi.org/10.1016/J.TRE.2023.103149

Ridley, D. B. (2016). Hotelling's Law. *The Palgrave Encyclopedia of Strategic Management* (pp. 1–2). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1057/978-1-349-94848-2_421-1

Rittenberg, L. (2008). *Principles of Microeconomics* (2nd ed.). FlatWorld

Sanz, G. A. (1988). Empresa pública y mercados oligopolísticos: análisis de las reglas de maximizar el beneficio y precio igual a coste marginal. *Cuadernos de Economía, 16*(1), 205–2113.

Thomas, G. B., Finney, R. L., & Weir, M. D. (1992). *Calculus and Analytic Geometry* (9th ed.). Addison-Wesley Publishing Company.

Zhou, G., Zhu, Z., & Luo, S. (2022). Location optimization of electric vehicle charging stations: Based on cost model and genetic algorithm. *Energy*, *247*, 123437. https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2022.123437