

MODELO DINÁMICO DE AJUSTE DE PRECIO CON ESPECULACIÓN EN UN CONTEXTO INCIERTO

MARÍA JOSÉ FERNANDEZ^{1*}✉, ANDREA PARMA²

Citación: Fernandez, M. J. y Parma, A. (2025). Modelo dinámico de ajuste de precio con especulación en un contexto incierto. *Inquietud Empresarial*, 25(2), 1-19. <https://doi.org/10.19053/uptc.01211048.17942>

Editor: Blanco-Mesa, Fabio

Recibido: 31/07/2024.

Aceptado: 03/02/2025.

Publicado: 20/05/2025.

Códigos JEL: C61, C62, C65.

Tipo de artículo: Metodologías o métodos.



Resumen: Las aplicaciones de la teoría de conjuntos borrosos a las ciencias económicas resultan convenientes debido a que pueden manejar información imprecisa, mejorando la toma de decisiones en escenarios con datos incompletos. Utilizan grados de pertenencia para modelar fenómenos económicos complejos, aumentando la precisión de análisis y predicciones en entornos de incertidumbre. El artículo aborda los desafíos en la toma de decisiones en economía cuando hay incertidumbre y vaguedad. Los enfoques tradicionales presentan limitaciones para capturar la complejidad económica. Razón por la cual, se propone una nueva técnica para estudiarla. Las ecuaciones diferenciales son muy usadas en la economía, pero los modelos dinámicos continuos con parámetros imprecisos requieren ecuaciones diferenciales borrosas. El artículo expone conceptos básicos de conjuntos y números borrosos, ecuaciones diferenciales lineales de primer orden borrosas y un modelo de equilibrio de mercado con especulación. Asimismo, presenta casos de estudio con condiciones iniciales inciertas y parámetros borrosos y examina condiciones de convergencia, concluyendo con observaciones finales sobre la utilidad de estas técnicas en contextos económicos inciertos. Los hallazgos de este estudio destacan la importancia de integrar estas técnicas en la modelización económica para optimizar la precisión y la solidez de las predicciones en escenarios de incertidumbre.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Borrosas, Ecuaciones Diferenciales Lineales, Modelos Fuzzy, Modelo de Equilibrio de Mercado.

¹Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. CONICET-Universidad de Buenos Aires. Instituto Interdisciplinario de Economía Política; Av. Córdoba 2122, C1120AAQ, Ciudad de Buenos Aires, Argentina; mariajfernandez@economicas.uba.ar; <https://orcid.org/0000-0002-3014-027X> *autor correspondiente

²Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas; Av. Córdoba 2122, C1120AAQ, Ciudad de Buenos Aires, Argentina; andreaparma38@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0005-4346-7879>

Dynamic pricing adjustment model with speculation in an uncertain context

Abstract: Fuzzy Sets Theory applications to Economics are convenient because they can handle imprecise information, improving decision making in scenarios with incomplete data. They use membership degrees to model complex economic phenomena, increasing the accuracy of analysis and predictions in uncertain environments.

The article addresses the challenges in decision making in Economics when there is uncertainty and vagueness. Traditional approaches have limitations in capturing economic complexity. A new technique is proposed to study it. Differential equations are widely used in economics, but continuous dynamic models with imprecise parameters require fuzzy differential equations.

The article presents basic concepts of fuzzy sets and numbers, fuzzy first-order linear differential equations, and a market equilibrium model with speculation. It presents case studies with uncertain initial conditions and fuzzy parameters, and examines convergence conditions, concluding with final remarks on the usefulness of these techniques in uncertain economic contexts. The findings of this study highlight the importance of integrating these techniques into economic modeling to optimize the accuracy and robustness of predictions in scenarios of uncertainty.

keywords: Fuzzy Differential Equations, Linear Differential Equations, Fuzzy Models, Market Equilibria Model.

1 INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las ciencias económicas, muchas veces los problemas o las aplicaciones de ciertas herramientas matemáticas están cruzadas por contextos de alta subjetividad e incertidumbre. Es por esto que, los resultados o consecuencias derivadas a partir de modelos clásicos (nítidos), no resultan satisfactorios y, en muchos casos, errados. Los modelos que admiten el uso de herramientas para el tratamiento de la incertidumbre resultan más apropiados en estos casos, evitando la pérdida de información.

Uno de los principales obstáculos para definir adecuadamente los modelos económicos radica en la falta de certeza absoluta respecto a ciertas variables o parámetros. Para abordar este desafío, se propone una nueva técnica que busca superar estas limitaciones.

La teoría de conjuntos borrosos es fundamental en las ciencias económicas para abordar la incertidumbre inherente a muchos problemas o situaciones. Permite representar y manejar información imprecisa, ayudando en la toma de decisiones en escenarios donde los datos no son claros o son incompletos. Mediante el uso de grados de pertenencia, en lugar de la pertenencia binaria tradicional, los conjuntos borrosos facilitan la modelización de fenómenos económicos complejos, mejorando la precisión de análisis y predicciones en un entorno de incertidumbre.

Las ecuaciones diferenciales borrosas tienen múltiples aplicaciones en las ciencias económicas, destacándose en la modelación de sistemas dinámicos con incertidumbre. Son útiles para analizar la evolución de variables económicas, como tasas de interés y crecimiento del PIB, bajo condiciones de imprecisión. También se aplican en la optimización de inversiones y en la gestión de riesgos financieros, permitiendo incorporar la ambigüedad de los datos en los modelos matemáticos y mejorando la toma de decisiones en escenarios inciertos (Mazandarani y Xiu, 2021). En tales casos, la teoría convencional resulta insuficiente para abordar este tipo de problemas y, por lo tanto, se sugiere el empleo de ecuaciones diferenciales borrosas (Buckley y Feuring, 2001).

Los modelos dinámicos de mercado analizan el equilibrio y el ajuste con y sin expectativas. Estos modelos utilizan ecuaciones diferenciales para describir cómo cambian las variables económicas en el tiempo, permitiendo prever comportamientos futuros y evaluar el impacto de diferentes políticas económicas en el equilibrio del mercado.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son fundamentales para modelar dinámicas de equilibrio en los mercados. Teniendo en cuenta aplicaciones de la última década, podemos destacar algunas de ellas. Se ha utilizado una ecuación diferencial lineal de primer orden para describir cómo el precio de un producto varía en función del exceso de demanda u oferta, permitiendo predecir la tendencia hacia el equilibrio de mercado (Chiang y Wainwright, 2006). Además, en el ámbito de la economía experimental, se han aplicado ecuaciones diferenciales para estimar la vida útil en alimentos, analizando cómo la calidad de un producto disminuye con el tiempo y cómo esto influye en las preferencias

de los consumidores (Lupin, 2014). Asimismo, se han desarrollado modelos matemáticos que emplean ecuaciones diferenciales para representar la relación entre oferta y demanda, facilitando la comprensión de cómo las variaciones en los precios afectan la producción y el consumo de bienes (Escobar, 2010). Estas aplicaciones demuestran la versatilidad y relevancia de las ecuaciones diferenciales de primer orden en el análisis y predicción de comportamientos económicos complejos en mercados contemporáneos.

La presencia de incertidumbre en los modelos de equilibrio de mercado plantea desafíos significativos para la representación y predicción de fenómenos económicos. En contextos donde los agentes enfrentan información incompleta o interpretaciones subjetivas de variables clave, las herramientas tradicionales pueden resultar insuficientes. Es aquí donde las ecuaciones diferenciales borrosas se posicionan como una herramienta valiosa para modelar este tipo de escenarios. Estas herramientas permiten modelizar escenarios imprecisos, adecuándose a realidades más complejas. Por ejemplo, en el mercado de bienes culturales, como los libros o el arte, las preferencias de los consumidores a menudo son subjetivas y dependen de factores emocionales, culturales o de percepción del valor. Incorporar las ecuaciones diferenciales en estas situaciones mejora la capacidad de los modelos para capturar la incertidumbre inherente y ofrecer predicciones más robustas y realistas.

En la siguiente sección se exponen conceptos básicos de conjuntos borrosos, números borrosos y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden borrosas con condición inicial incierta y con parámetro incierto, incluyendo las condiciones para la existencia de solución única. Luego se introduce el modelo de equilibrio de mercado con especulación. Finalmente, en la sección de resultados, se presentan algunos casos de estudio cuando las condiciones iniciales son inciertas y cuando el parámetro es borroso y se estudian condiciones de convergencia en cada caso. Por último, se esbozarán algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES Y MÉTODOS

2.1 *Conjuntos borrosos*

La teoría de conjuntos borrosos (fuzzy sets), es una extensión de la teoría clásica de conjuntos que fue introducida por el ingeniero y matemático Lofti A. Zadeh en 1965. Surge como una herramienta para manejar la incertidumbre y la imprecisión inherentes en muchos problemas del mundo real. En contraste con la lógica clásica, donde un elemento pertenece o no a un conjunto de manera clara y definida (es decir, la pertenencia es binaria: 0 o 1), la teoría de conjuntos borrosos permite grados de pertenencia, representados por valores continuos entre 0 y 1 (Fernandez, 2012). Los modelos fuzzy proporcionan una metodología poderosa y flexible para tratar con la incertidumbre y la imprecisión en diversos problemas del mundo real. En el campo de las ciencias económicas, esta teoría permite modelar conceptos complejos y subjetivos de manera más precisa, mejorando así la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre (Parma y Fernandez, 2016).

Los conjuntos borrosos permiten realizar múltiples interpretaciones de un concepto, dejando la posibilidad de obtener conclusiones específicas en el momento en que el

especialista lo desee o necesite. La ruptura principal respecto a la teoría de conjuntos nítida es permitir valores graduales de pertenencia a cierto grupo. Entonces, es posible otorgar valores entre 0 y 1 para medir sobre cuán compatibles son estos valores con ese grupo; si existe incompatibilidad total, se asignará 0 y si la compatibilidad es total, se le asignará 1. La pertenencia expresa los grados en los cuales cada elemento del universo es compatible con las propiedades específicas del grupo (Pedrycz et al., 2011; Parma y Fernandez, 2016).

Un conjunto borroso se define por una función de pertenencia, la cual asigna a cada elemento del universo de discurso un valor entre 0 y 1. Este valor indica el grado de pertenencia del elemento al conjunto borroso. La teoría de conjuntos borrosos ha encontrado numerosas aplicaciones en diversos campos, incluyendo la ingeniería, la informática, la medicina, y las ciencias económicas. En el ámbito de las ciencias económicas, los conjuntos borrosos se utilizan para abordar problemas donde la información es incierta, incompleta o subjetiva, lo cual es bastante común en este campo. Un ejemplo en el ámbito económico podría ser el análisis de la satisfacción del cliente. Este es un concepto subjetivo que puede variar enormemente entre individuos. Utilizando conjuntos borrosos, se pueden definir categorías como “satisfacción alta”, “satisfacción media” y “satisfacción baja”, y evaluar el grado de pertenencia de las opiniones de los clientes a estas categorías. Esto permite una evaluación más matizada y precisa de la satisfacción del cliente, que puede informar mejor las decisiones de gestión y estrategia empresarial.

Un subconjunto borroso $\tilde{A}$ de un conjunto E , puede ser definido como una serie de pares ordenados con el primer elemento del conjunto E y el segundo del intervalo $[0, 1]$, con un único par ordenado presente en cada elemento de E (Carlsson y Fullér, 2010). La función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}: E \rightarrow [0, 1]$ asigna a cada elemento del conjunto E un valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo $[0, 1]$, llamado grado o nivel de pertenencia de x (Zadeh, 1965).

El a -corte de $\tilde{A}$ es un conjunto nítido $A_a = \left\{x \in \frac{E}{u_{\tilde{A}}(x)} \geq a\right\}$ para todo $a \in (0,1]$ (Kaufmann, 1973) y contiene todos los elementos de E , cuyos grados de pertenencia al conjunto borroso son mayores o iguales que el valor especificado de a (Klir y Yuan, 1995, Buckley et al., 2002). Un subconjunto borroso $\tilde{A}$ de un conjunto E es normal si existe un $x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ y convexo, si y solo si, $\forall x \in [x_1, x_2] \subset \mathcal{R}$ se verifica que $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ (Carlsson y Fullér, 2010; Tanaka, 1997).

2.1.1 Números borrosos

Los números borrosos son herramientas que se utilizan cuando existen cantidades imprecisas y capturan conceptos tales como alrededor de 200 o aproximadamente 45 (Pedrycz et al., 2011). Un número borroso es un conjunto borroso de los números reales, con una función de pertenencia convexa, normal y continua de un soporte acotado (Carlsson y Fullér, 2010).

Un ejemplo de número borroso podría ser la tasa de inflación futura. En lugar de otorgar un valor exacto (nítido), se puede utilizar un número borroso para representar la

posible inflación futura, como “entre un 2 % y un 4 % con mayor posibilidad alrededor de un 3 % mensual”. Este enfoque permite incorporar la incertidumbre y variabilidad de los factores económicos que pueden influir en la inflación, proporcionando una visión más realista y flexible para la planificación y toma de decisiones económicas.

En muchas situaciones prácticas se usan los números borrosos triangulares, cuando sobre una determinada magnitud se conocen únicamente tres valores: el mínimo, el máximo y el de mayor nivel de presunción (Lazzari, 2010).

Se denomina número borroso triangular (NBT) al número borroso real, continuo, determinado de manera única por tres números reales a_1, a_2 , y a_3 , tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, representado usualmente por $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ (Fernandez, 2012). Su función de pertenencia está dada por (1):

$$\forall x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{-x + a_3}{a_3 - a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3 \end{cases} \quad (1)$$

y los α -cortes son $A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_2)\alpha + a_3], \forall \alpha \in [0,1]$

2.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.2.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Sea una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (2):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, a) \quad y(0) = c \quad x \in I_1, \quad (2)$$

$0 \in I_1, y \in I_2, c \in C, a \in A, \quad I_1, I_2, A, C, \text{ intervalos reales}$

El producto cartesiano $I_1 \times I_2$ representa una región del plano $\mathbb{R}^2$.

Si (1) satisface³.

- f es continua en D
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en D
- $(0, c) \in D$

Entonces, la ecuación diferencial tiene única solución $y = g(x, k, c)$ con $x \in I_1, a \in A, c \in C$.

Se considera a su vez que $g(x, a, c)$ es continua en $I_1 \times C \times A$.

³ Spiegel et al., 1983, p. 24.

2.2.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden borrosas

Si los parámetros “c” o “a” son inciertos, la ecuación diferencial de primer orden (1) se transforma en borrosa, FDO (fuzzy differential equations) y su solución será una función borrosa⁴ (Buckley y Feuring, 2000, Buckley, 1992a, Buckley, 1992b). En este trabajo, el valor de “c” y “a” se expresarán como un número borroso triangular.

Por lo tanto, la FDO podemos expresarla como: $\frac{d\tilde{Y}}{dx} = f(x, \tilde{Y}, \tilde{A}); \tilde{Y}(0) = \tilde{C}$ (2), donde $\frac{d\tilde{Y}}{dx}$ es la derivada de una función borrosa, $\tilde{C}$ y $\tilde{A}$ son números borrosos triangulares e $\tilde{Y}(x)$ es una función borrosa no conocida (Parma y Fernández, 2016, Mondal y Roy, 2013).

Se resuelve la ecuación (2) mediante el principio de extensión, y se obtiene $\tilde{Y}(x)$ con $x \in I_1$, cuyos α –cortes son $\tilde{Y}(x)_\alpha = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)] \forall x \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$, donde:

$$y_1(x, \alpha) = \min \{g(x, k, c), \forall x \in I_1, \forall \alpha \in [0, 1], c \in \tilde{C}_\alpha, a \in \tilde{A}_\alpha, \quad (3)$$

$$y_2(x, \alpha) = \max \{g(x, k, c), \forall x \in I_1, \forall \alpha \in [0, 1], c \in \tilde{C}_\alpha, a \in \tilde{A}_\alpha, \quad (4)$$

Se debe verificar que $\tilde{Y}(x)_\alpha$ defina un número borroso. Para ello, siendo $y_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2$ derivables respecto de α , se deben verificar las siguientes condiciones suficientes (3):

$$a. \quad y_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2 \text{ continuas } \forall (x, \alpha) \in I_1 x [0, 1],$$

$$b. \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}(x, \alpha) > 0, \frac{\partial y_2}{\partial x}(x, \alpha) < 0 \forall (x, \alpha) \in I_1 x [0, 1],$$

$$c. \quad y_1(x, 1) = y_2(x, 1) \quad \forall x \in I_1$$

$y_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2$ es diferenciable respecto a x , $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Las derivadas parciales de $y_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2$ respecto a “x” se representan como $y'_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2$

Si $\frac{d\tilde{Y}}{dx}(\alpha) = [y'_1(x, \alpha), y'_2(x, \alpha)]$ define los α –cortes de un número borroso $\forall (x, \alpha) \in I_1 x [0, 1]$, se dirá que $\tilde{Y}(x)$ es diferenciable⁵. Por lo tanto, para $y'_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2$, derivables respecto de α , se deben cumplir (4):

$$a. \quad y'_i(x, \alpha) \forall i = 1, 2 \text{ continuas } \forall (x, \alpha) \in I_1 x [0, 1],$$

$$b. \quad \frac{\partial y'_1}{\partial x}(x, \alpha) > 0, \frac{\partial y'_2}{\partial x}(x, \alpha) < 0 \forall (x, \alpha) \in I_1 x [0, 1],$$

$$c. \quad y'_1(x, 1) = y'_2(x, 1) \quad \forall x \in I_1$$

⁴ $\tilde{Y}, \tilde{K}, \tilde{C}$ representan subconjuntos borrosos de $\mathcal{R}^n$.

⁵ Seikkala derivative: $SD \tilde{Y}(x) = \frac{d\tilde{Y}}{dx}$ (Buckley y Feuring, 2000, p. 45)

$\tilde{Y}(x)$ es solución de la ecuación (2), si, además que exista $\frac{d\tilde{Y}}{dx} = SD\tilde{Y}(x)$, debe satisfacerla $SD\tilde{Y}(x) = f(x, \tilde{Y}, \tilde{A})$, $\tilde{Y}(0) = \tilde{C}$, $\tilde{C}(\infty) = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$ son los α -cortes de la condición inicial borrosa.

Los α -cortes de $f(x, \tilde{Y})$: $f(x, \tilde{Y})(\alpha) = [f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)]$
 $f_1(x, \alpha) = \min \{f(x, y, k) / y \in \tilde{Y}(x), k \in \tilde{A}_\alpha \forall x \in I_1, \forall \alpha \in [0, 1]$
 $f_2(x, \alpha) = \max \{f(x, y, k) / y \in \tilde{Y}(x), k \in A_\alpha \forall x \in I_1, \forall \alpha \in [0, 1]$
 $y'_1 = f_1(x, \alpha), y'_2 = f_2(x, \alpha), y_1(0, \infty) = c_1(\alpha), y_2(0, \infty) = c_2(\alpha)$

Si la FDO (2) cumple con las condiciones enunciadas en esta sección, se dice que tiene una solución BFS (*Buckley-Feuring solution*).

2.2.2.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden borrosas con condición inicial incierta

En este trabajo, se abordará un modelo dinámico que se resuelve a través de una ecuación diferencial de primer orden lineal, $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = a y(x) + b$ con $a \in \mathfrak{R} \wedge b \in \mathfrak{R}$, $x \in I_1$ con $0 \in I_1 \subseteq \mathfrak{R}$, $y \in I_2 \subseteq \mathfrak{R}$.

Este tipo de ecuaciones cumplen con la condición suficiente para la existencia de infinitas soluciones $y = g(x, c) = -\frac{b}{a} + C e^{ax} / C \in \mathfrak{R}$. Para una condición inicial $y(0) = C_0$, resulta una solución única $y = -\frac{b}{a} + (C_0 + \frac{b}{a}) e^{ax}$ (Parma y Fernandez, 2016). En primer lugar, se considera la condición inicial incierta $\tilde{Y}(0) = \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Surgen dos casos:

a. Coeficiente $a > 0$

$\frac{d\tilde{Y}}{dx} = a\tilde{Y} + b/a \in \mathfrak{R}^+ \wedge b \in \mathfrak{R}$, presenta condición inicial incierta expresada mediante un NBT $\tilde{Y}(0) = \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Si $a > 0$ se cumple la condición de existencia de la solución Buckley-Feuring ($BFS = \tilde{Y}(x)$)⁶.

Los alfa-cortes (Parma y Fernandez, 2016) son $\tilde{Y}(x, \alpha) = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)] \forall x \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ (6) con:

$$y_1(x, \alpha) = -\frac{b}{a} + c_1(\alpha) e^{ax}$$

$$y_2(x, \alpha) = -\frac{b}{a} + c_2(\alpha) e^{ax}$$

⁶ Si existe $\frac{d\tilde{Y}}{dx}(x) = SD\tilde{Y}(x)$, luego $BFS=\tilde{Y}$ es solución de la FDO si: $\frac{\partial f}{\partial y} > 0, \frac{\partial g}{\partial c} > 0, \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial a} > 0$ (Buckley y Feuring, 2000, p. 48)

Se puede verificar que $\tilde{Y}(x, \alpha) = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)] \forall x \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ define un NBT (3) como así también se verifica la existencia de $\frac{d\tilde{Y}}{dx}(x, \alpha) = SD\tilde{Y}(x)$ que también define un NBT (4).

b. Coeficiente $a < 0$

En este caso no se cumplen las condiciones para la existencia de la solución BFS. Para ello, resolvemos el sistema (5) reemplazando a “y” por “y₂” en “f₁” mientras que se sustituye a “y” por “y₁” en “f₂”. Es decir:

$$\begin{aligned} y'_1(x, \alpha) &= a y_2(x, \alpha) + b, & y'_2(x, \alpha) &= a + y_1(x, \alpha), \\ y_1(0, \alpha) &= c_1(\alpha), & y_2(0, \alpha) &= c_2(\alpha) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior y considerando $m = -a$, la solución es $\tilde{Y}(x, \alpha) = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)]$ (7) con:

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= \frac{b}{m} + \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\theta + \omega)e^{mx} + \frac{1}{2}\left[\gamma_1 + \gamma_3 + \alpha(\theta - \omega) - 2\frac{b}{m}\right]e^{-mx}, \\ y_2(x, \alpha) &= \frac{b}{m} - \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\theta + \omega)e^{mx} + \frac{1}{2}\left[\gamma_1 + \gamma_3 + \alpha(\theta - \omega) - 2\frac{b}{m}\right]e^{-mx}, \end{aligned}$$

Se presentan tres casos (Parma y Fernandez, 2016):

- Si $\theta = \omega$ entonces, $\tilde{Y}(x, \alpha)$ define un NBT
- Si $\theta < \omega$ entonces $\tilde{Y}(x, \alpha)$ define un NBT para $t > \frac{1}{2m} \ln \left[\frac{\omega - \theta}{\omega + \theta} \right]$.
- Si $\theta > \omega$ entonces $y_1(x, \alpha) = y_2(x, \alpha) = \frac{b}{m} + \left(-\frac{b}{m} + \gamma_2 \right) e^{-mx} \tilde{Y}(x, \alpha)$ define un NBT para $t > \frac{1}{2m} \ln \left[\frac{\theta - \omega}{\omega + \theta} \right]$.

2.2.2.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden borrosas con constante incierta

Dada $\frac{dy}{dx} = ay + b$, $x \in I_1 \subset \mathcal{R}_0^+$, $y \in I_2 \subset \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}$, $y(0) = \gamma/\gamma \in \mathcal{C} \subset \mathcal{R}^+$ con $a = \tilde{A} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) > 0$,

La ecuación se transforma en borrosa (Parma y Fernandez, 2016), $\frac{d\tilde{Y}}{dx} = \tilde{A} \tilde{Y} + b$, $y(0) = \gamma/\gamma \in \mathcal{C} \subset \mathcal{R}^+$ y su solución es BFS= $\tilde{Y}(x, \alpha) = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]$ (8):

$$\begin{cases} y_1(t, \alpha) = -\frac{b}{\beta_1 + \alpha(\beta_2 - \beta_1)} + \left\{ \gamma + \frac{b}{\beta_1 + \alpha(\beta_2 - \beta_1)} \right\} e^{[\beta_1 + \alpha(\beta_2 - \beta_1)]x} \\ y_2(t, \alpha) = -\frac{b}{\beta_3 - \alpha(\beta_3 - \beta_2)} + \left\{ \gamma + \frac{b}{\beta_3 - \alpha(\beta_3 - \beta_2)} \right\} e^{[\beta_3 - \alpha(\beta_3 - \beta_2)]x} \end{cases},$$

que define un número borroso triangular.

2.3 Modelo de ajuste de precio con factor especulativo

En este trabajo se estudiará un modelo de mercado de ajuste de precio para el caso en que los demandantes presenten una actitud especulativa ante variaciones de precios futuros (Cortés-López et al., 2012).

Es decir, el comprador, ante el aumento del precio, piensa consumir más para acumular mercadería, suponiendo que en el instante posterior saldrá más costoso. En otras palabras, el consumidor decide adelantar consumo con fines especulativos.

Por lo tanto, a la ecuación de la demanda, $Q_d = \eta - \beta p(t)$, le debemos agregar un término que contenga la derivada del precio. El comportamiento especulativo del comprador se identificará con el coeficiente $\varepsilon > 0$ y multiplicará a la derivada del precio, es decir: $\varepsilon p'(t)$.

Para el caso de un comprador que especula con demandar más cuando aumenta el precio ($p'(t) > 0$), el término $\varepsilon p'(t)$ será también positivo, ya que $\varepsilon > 0$, y representará el agregado a la demanda estándar $Q_d = \eta - \beta p(t)$. Por lo tanto, el nuevo modelo con especulación del demandante será:

$$\begin{cases} Q_d = \eta - \beta p(t) + \varepsilon p'(t) & \eta, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \\ Q_s = -\gamma + \delta p(t) & \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \\ p'(t) = j(Q_d - Q_s) & j > 0 \end{cases},$$

Para la condición inicial, $p(0) = p_0$

Se reemplaza en la 3a ecuación la oferta y la demanda, y se llega a una ecuación diferencial de primer orden lineal:

$$\begin{aligned} p'(t) &= j(\eta - \beta p + \varepsilon p'(t) + \gamma - \delta p), \\ p'(t) - j\varepsilon p'(t) &= j(\eta + \gamma) + j(-\beta - \delta)p, \\ (1 - j\varepsilon) p'(t) &= j(\eta + \gamma) + j(-\beta - \delta)p, \end{aligned}$$

$$p'(t) + j \frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} p = j \frac{\eta + \gamma}{1 - j\varepsilon}, \text{ ecuación de primer orden lineal}$$

La trayectoria temporal del precio para la condición inicial, $p(0) = p_0$, es:

$$p(t) = [p_0 - p_e] e^{-j \left(\frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} \right) t} + p_e \text{ donde } p_e = \frac{\eta + \gamma}{\beta + \delta}$$

El precio converge para $\frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} > 0$. Como $\beta, \delta, \varepsilon, j \in \mathbb{R}^+$, $\beta + \delta > 0$. Para que $1 - j\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{j}$.

Para el caso de $\varepsilon < 0$, el comprador tiene un perfil estándar, que reduce el consumo del bien, no solo por su precio, sino por la velocidad a la que varía el precio.

3 APLICACIÓN Y RESULTADOS

Un mercado de bienes en donde los demandantes especulan y compran más hoy ante la expectativa de un aumento futuro de precios, es el mercado de combustibles en países con alta volatilidad de precios, como ocurre a menudo en Argentina. Cuando se espera un aumento en el precio de la nafta o el gasoil (por anuncios de ajustes en tarifas, subidas en los precios internacionales del petróleo o devaluaciones de la moneda), los consumidores tienden a cargar más combustible de lo habitual o, incluso, llenar bidones adicionales para almacenarlo.

Sin ir más lejos, en octubre de 2023, ante rumores de un inminente aumento en los precios de los combustibles en Argentina debido a la eliminación de subsidios y ajustes poselecciones, los consumidores acudieron masivamente a las estaciones de servicio para cargar combustible. Muchos completaron sus tanques y algunos incluso compraron bidones para tener un “stock” y evitar pagar precios más altos en el corto plazo. En este caso, los compradores anticipan que el precio subirá, lo que los lleva a incrementar su demanda actual. Asimismo, almacenan más de lo que necesitan en el momento, generando incluso problemas logísticos (como desabastecimiento temporal).

En esta sección, se presentarán tres casos de estudio y se hará, para cada uno, su correspondiente análisis de estabilidad (Fernandez y Parma, 2024).

3.1 Caso 1. Condición inicial incierta, $a < 0$.

Si las funciones de oferta y demanda están dadas por:

$$Q_d = 300 - 2p(t) + 4p'(t) \quad Q_s = -50 + 3p(t)$$

Supongamos que no se conoce con precisión el valor del precio en $t = 0$, es decir, por falta de información, no se conoce el precio del combustible con exactitud. De todas maneras, se sabe que el valor mínimo que puede tomar el combustible es de 40 unidades monetarias y el máximo es de 60 unidades monetarias. Además, el valor más probable del precio inicial del combustible es de 50 unidades monetarias. Entonces, podemos expresar a $p(0) = \tilde{y}_0$, donde $\tilde{y}_0$ es un NBT, $\tilde{y}_0 = (40, 50, 60)$.

El proceso de ajuste intertemporal se lleva a cabo a partir de una corrección equivalente a la quinta parte del exceso de demanda. Entonces:

$$Q_d = 300 - 2p(t) + 4p'(t) \quad Q_s = -50 + 3p(t) \quad \tilde{P}(0) = (40, 50, 60) \quad j=0.2$$

Por lo tanto, sustituyendo por los datos del modelo en la ecuación (8):

$$p'(t) = 0.2(-2p(t) + 300 + 4p'(t) - 3p(t) + 50) \\ p'(t) = -5p(t) + 350,$$

Como la condición inicial es incierta, estamos ante la presencia de una ecuación diferencial borrosa y queda expresada:

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = -\tilde{5}\tilde{P}(t) + 350/\tilde{P}(0) = (40, 50, 60)$$

Los alfa-cortes para la condición inicial borrosa son:

$$[c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [4 + \alpha(\gamma_2 - \gamma_1), \gamma_3 - \alpha(\gamma_3 - \gamma_2)] = [40 + 10\alpha, 60 - 10\alpha]$$

Como $\alpha < 0$, la solución de la ecuación borrosa es (7):

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= \frac{b}{m} + \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\theta + \omega)e^{mx} + \frac{1}{2}\left[\gamma_1 + \gamma_3 + \alpha(\theta - \omega) - 2\frac{b}{m}\right]e^{-mx}, \\ y_1(x, \alpha) &= \frac{b}{m} - \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\theta + \omega)e^{mx} + \frac{1}{2}\left[\gamma_1 + \gamma_3 + \alpha(\theta - \omega) - 2\frac{b}{m}\right]e^{-mx}, \\ p_1(t, \alpha) &= 70 - 20e^{-5t} + 10(\alpha - 1)e^{5t}, \\ p_2(t, \alpha) &= 70 - 20e^{-5t} + 10(1 - \alpha)e^{5t}, \end{aligned}$$

Como $\theta = \omega = 10$:

Entonces $\tilde{P}(t, \alpha) = [p_1(t, \alpha), p_2(t, \alpha)] \forall t \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ define un NBT y, por lo tanto, existe solución $\tilde{P}(t)$ de la ecuación diferencial borrosa que define el modelo. En efecto, se verifica (3):

$$p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 70 - 20e^{-5t}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = 10e^{5t} > 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = -10e^{5t} < 0$$

En la Figura 1, se observa la trayectoria temporal del precio para alfa cortes de nivel 0, 0.5 y 1.

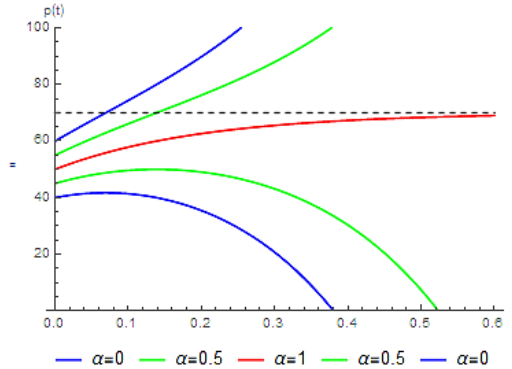


Figura 1. Trayectoria temporal del precio borroso para $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$.

Para $\alpha = 1$, $p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 70 - 20e^{-5t}$. En este caso, cuando $t \rightarrow +\infty$, resulta que la trayectoria del precio se estabiliza en $p=70$.

Por el contrario, para todo $\alpha \neq 1$, todas las trayectorias temporales divergen.

Si analizamos la trayectoria temporal del precio para el caso de una condición inicial nítida ($P(0) = 50$), resulta: $p(t) = 70 - 20e^{-5t}$. La misma, coincide con el valor más posible en contexto de incertidumbre, donde $p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 70 - 20e^{-5t}$. Ambos casos convergen a $p = 70$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Se observa que, en este caso, la trayectoria

del precio es estable ya que cumple la condición $\varepsilon < \frac{1}{j}$. En efecto, para el caso estudiado, $\varepsilon = 4, j = 0.2$, entonces verifica $4 < 5$.

Con la condición inicial imprecisa definida en el ejemplo, el precio solo presenta una trayectoria estable en el caso nítido. En cualquier otro caso, la trayectoria es inestable.

3.2 Caso 2. Condición inicial incierta, $a > 0$.

Si las funciones de oferta y demanda están dadas por:

$$Q_d = 20 - 2p(t) + 10p'(t) \quad Q_s = -10 + 3p(t)$$

Consideramos las mismas condiciones iniciales que en el Caso 1:

$p(0) = \tilde{\gamma}_0$, donde $\tilde{\gamma}_0$ es un NBT, $\tilde{\gamma}_0 = (40, 50, 60)$ y el mismo coeficiente de ajuste $j=0.2$.

Por lo tanto, sustituyendo por los datos del modelo en la ecuación:

$$\begin{aligned} p'(t) &= 0.2(20 - 2p(t) + 10p'(t) - 3p(t) + 10), \\ p'(t) &= p(t) - 6, \end{aligned}$$

Como la condición inicial es incierta, estamos ante la presencia de una ecuación diferencial borrosa y queda expresada:

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \tilde{P}(t) - 6/\tilde{P}(0) = (40, 50, 60),$$

En este caso, tenemos una EDO de primer orden lineal $\frac{dp}{dt} = ap(t) + b$, $a > 0 \wedge b \in \Re$ con condición inicial determinada con un NBT: $y(0) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Según (6), la solución es:

$$\begin{aligned} p_1(t, \alpha) &= 6 + 34e^t + 10e^t\alpha, \\ p_2(t, \alpha) &= 6 + 54e^t - 10e^t\alpha, \end{aligned}$$

$\tilde{P}(t, \alpha) = [p_1(t, \alpha), p_2(t, \alpha)] \forall t \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ define un NBT y, por lo tanto, existe solución $\tilde{P}(t)$ de la ecuación diferencial borrosa que define el modelo. En efecto, se verifica (3):

$$\begin{aligned} p_1(t, 1) = p_2(t, 1) =, \quad p_1(t, 1) = p_2(t, 1) &= 6 + 44e^t, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = 10e^t > 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} &= -10e^t < 0 \end{aligned}$$

En la Figura 2, la trayectoria temporal para alfa cortes de nivel 0 y 1.

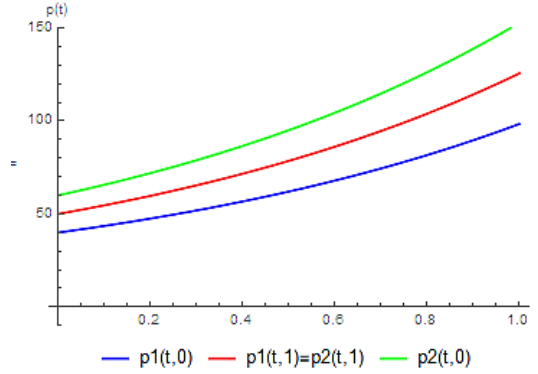


Figura 2. Trayectoria temporal del precio borroso para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

Se observa en la Figura 2, que para $\alpha = 1$, $p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 6 + 44 e^t$ que resulta una trayectoria divergente. Lo mismo ocurre $\alpha = 0$ y para $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Si analizamos la trayectoria temporal para el caso con condición inicial nítida ($P(0) = 50$), valor más posible, en contexto de incertidumbre, coincide con $p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 6 + 44 e^t$. Se observa que en este caso la trayectoria del precio es divergente ya que no cumple la condición $\varepsilon < \frac{1}{j}$. En efecto, para el caso estudiado, $\varepsilon = 10$, $j = 0.2$, entonces $10 > 5$.

A su vez, para $t \rightarrow +\infty$, $p_2(t, 0) - p_1(t, 0) \rightarrow +\infty$, es decir, la borrosidad crece cuando $t \rightarrow +\infty$.

En este caso, no existe ninguna trayectoria temporal del precio que sea estable.

3.3 Caso 3. Parámetro a incierto y positivo

Consideramos nuevamente el modelo anterior:

$$\begin{cases} Q_d = \eta - \beta p(t) + \varepsilon p'(t) & \eta, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \\ Q_s = -\gamma + \delta p(t) & \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \\ p'(t) = j(Q_d - Q_s) & j > 0 \end{cases},$$

Se sabe que $\eta=200$, $\gamma = 800$, el parámetro de especulación del demandante es $\varepsilon = 2$ y el coeficiente de ajuste es $j = 1$.

Por otro lado, las reacciones de tanto oferentes como demandantes de combustible ante el nivel de precios resultan diversas dentro de cada grupo, por lo que no se conocen con precisión. Es decir, β y δ , se expresan mediante dos NBT $\tilde{\beta} = (3, 4, 5)$ y $\tilde{\delta} = (2, 6, 8)$.

Supongamos que, a diferencia de los casos anteriores, se conoce el valor del precio en $t = 0$, que es 300, es decir $p(0) = 300$.

Comenzamos obteniendo la solución del modelo nítido:

$p'(t) = j \frac{\eta+\gamma}{1-j\varepsilon} - j \frac{\beta+\delta}{1-j\varepsilon} p(t) = f(t, p(t), a)$, $a = -j \frac{\beta+\delta}{1-j\varepsilon}$ ecuación de primer orden lineal.

Su solución es: $p(t) = [p_0 - p_e]e^{-j(\frac{\beta+\delta}{1-j\varepsilon})t} + p_e$, donde $p_e = \frac{\eta+\gamma}{\beta+\delta}$.

Para simplificar, se sustituye en la ecuación diferencial anterior por los parámetros nítidos.

Como $1 - j\varepsilon = 1 - 2 = -1$. Si denomina $a = \beta + \delta$, entonces: $p'(t) = a p(t) - 1000 = f(t, p, a)$,

Entonces $p(t) = g(t, a, c) = c e^{at} + p_e$, $a = \beta + \delta$, $p_e = \frac{\eta+\gamma}{\beta+\delta}$ es la solución general y,

$p(t) = [300 - p_e]e^{at} + p_e$, es la solución particular para $p(0) = 300$,

Como β y δ , que vienen dados por dos NBT, obtenemos una FDO:

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \tilde{A}\tilde{P} - 1000$$

Como $\tilde{\beta} = (3, 4, 5)$ y $\tilde{\delta} = (2, 6, 8)$, $\tilde{A} = \tilde{\beta} + \tilde{\delta} = (5, 10, 13) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, sus α -cortes son:

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [\gamma_1 + \alpha(\gamma_2 - \gamma_1), \gamma_3 - \alpha(\gamma_3 - \gamma_2)] = [5 + 5\alpha; 13 - 3\alpha],$$

$$\tilde{p}_e(\alpha) = \frac{[1000, 1000]}{\beta + \delta} = \frac{[1000, 1000]}{[5 + 5\alpha; 13 - 3\alpha]} = \left[\frac{1000}{13 - 3\alpha}; \frac{1000}{5 + 5\alpha} \right]$$

Según (8), resulta:

$$p_1(t, \alpha) = \left[300 - \frac{1000}{5 + 5\alpha} \right] e^{(5+5\alpha)t} + \frac{1000}{5 + 5\alpha},$$

$$p_2(t, \alpha) = \left[300 - \frac{1000}{13 - 3\alpha} \right] e^{(13-3\alpha)t} + \frac{1000}{13 - 3\alpha},$$

$\tilde{P}(t, \alpha) = [p_1(t, \alpha), p_2(t, \alpha)] \forall t \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ define un NBT. En efecto, se verifica (3):

$$p_1(t, 1) = p_2(t, 1) = 200 e^{10t} + 100,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = -\frac{5000}{(5 + 5\alpha)^2} + \frac{5000 e^{t(5+5\alpha)}}{(5 + 5\alpha)^2} + 5 e^{t(5+5\alpha)} t \left(300 - \frac{1000}{5 + 5\alpha} \right),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = \frac{3000}{(13 - 3\alpha)^2} - \frac{3000 e^{t(13-3\alpha)}}{(13 - 3\alpha)^2} - 3 e^{t(13-3\alpha)} t \left(300 - \frac{1000}{13 - 3\alpha} \right),$$

Si bien no se pudo llevar a cabo un análisis analítico de los signos de $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}$, en la Figura 3 se realizan los gráficos de $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \forall t \in I_1 = [0, m] \forall \alpha \in [0, 1]$ considerando

“m=2” visualizando el cumplimiento de las condiciones $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} > 0$ y $\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} < 0$, en consecuencia $\tilde{P}(t, \alpha) = [p_1(t, \alpha), p_2(t, \alpha)] \forall t \in I_1 \forall \alpha \in [0, 1]$ definiría un NBT.

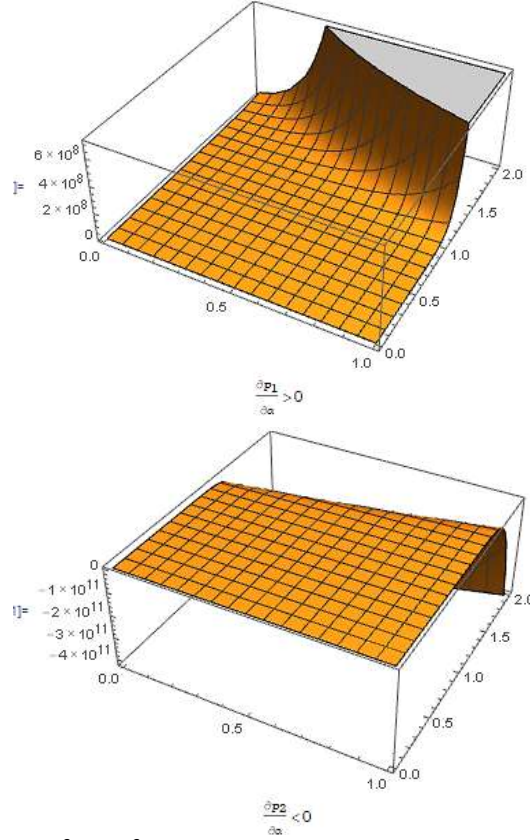


Figura 3. Gráfico de $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}$

Se observa en la Figura 4, que los alfa cortes de la trayectoria del precio son divergentes $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Esto ocurre ya que no cumple la condición $\varepsilon < \frac{1}{j}$. En efecto, para el caso estudiado, $\varepsilon = 2$, $j = 1$, entonces $2 > 1$

A su vez, para $t \rightarrow +\infty$, $p_2(t, 0) - p_1(t, 0) \rightarrow +\infty$, es decir, la borrosidad crece cuando $t \rightarrow +\infty$.

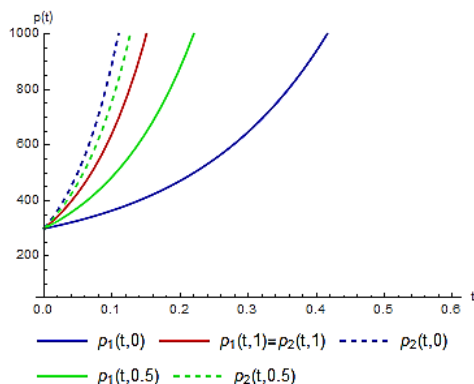


Figura 4. Trayectoria temporal del precio borroso para $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$.

En este caso, tampoco existe ninguna trayectoria temporal del precio que presente un comportamiento estable.

4 CONCLUSIONES

La incertidumbre presente en la realidad macroeconómica subraya la necesidad de ajustar los modelos tradicionales para tratar estos fenómenos. Debido a que algunas variables no pueden ser precisadas y ciertos parámetros no tienen valores concretos, es esencial utilizar herramientas que aborden casos específicos como ejemplos particulares dentro de un contexto más amplio y con características inciertas.

Este estudio implementó un modelo para observar la evolución temporal de los precios cuando los compradores adoptan una postura especulativa. Se contextualizó el modelo presentando un ejemplo de mercado con especulación. Se mostró que en el mercado de combustible no solo los demandantes pueden presentar una actitud especulativa, sino que, además, ciertas variables pueden resultar inciertas, ya sea por falta de información o por diversidad en la actitud de tanto compradores como vendedores. Asimismo, se examinaron varios escenarios y se constató que la incertidumbre puede impactar la estabilidad del modelo. Por ejemplo, se observó que cuando el coeficiente de ajuste es positivo, la trayectoria del precio puede ser divergente en situaciones de incertidumbre en las condiciones iniciales. Esto sugiere que las predicciones basadas en parámetros inciertos deben manejarse con cautela, ya que pueden llevar a resultados no intuitivos y a una mayor volatilidad en los precios.

Además, se demostraron condiciones bajo las cuales los precios pueden estabilizarse a pesar de la incertidumbre inicial, particularmente, cuando se cumplen ciertas restricciones en los coeficientes de ajuste y especulación. Estos hallazgos subrayan la importancia de considerar la borrosidad en los modelos económicos para obtener resultados más robustos y representativos de la realidad.

Adicionalmente, se identificaron condiciones bajo las cuales la trayectoria del precio se estabiliza. Por ejemplo, cuando el coeficiente de ajuste j y el coeficiente de

especulación ε cumplen con la condición $\varepsilon < 1/j$, el precio tiende a estabilizarse en un valor de equilibrio a lo largo del tiempo. Sin embargo, si esta condición no se cumple, la trayectoria del precio puede volverse divergente, lo que sugiere que la especulación puede introducir una volatilidad adicional en el mercado.

Se presentaron estudios de caso con condiciones iniciales inciertas y se analizó la convergencia de las trayectorias de precio. En uno de los casos, con condiciones iniciales inciertas y un coeficiente de ajuste positivo, se observó que las trayectorias temporales divergían a medida que aumentaba la incertidumbre. En contraste, para condiciones iniciales nítidas, las trayectorias de los precios mostraron una convergencia hacia el valor de equilibrio. También se presentó un caso en donde el parámetro a era borroso. En este caso, el modelo no era estable, en cualquier caso, por no cumplir la condición $\varepsilon < 1/j$.

La aplicación de ecuaciones diferenciales borrosas en modelos económicos ofrece una herramienta poderosa para abordar la incertidumbre y la especulación en el mercado. Los resultados obtenidos en este estudio subrayan la necesidad de incorporar estas técnicas en la modelización económica para mejorar la precisión y robustez de las predicciones en contextos inciertos.

Finalmente, en trabajos posteriores se realizarán nuevas pruebas y análisis con el fin de contribuir al análisis de diversos escenarios con y sin incertidumbre. Además, se propondrá el uso de otros tipos de ecuaciones diferenciales borrosas para modelizar otras problemáticas de las ciencias económicas.

FINANCIACIÓN

Investigación adscrita a la Red Sistemas Inteligentes y Expertos. Modelos Computacionales Iberoamericanos (SIEMCI), número de proyecto 522RT0130 en Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo (CYTED). Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto UBACYT 2023 20020220400091BA "Aplicación de modelos fuzzy y algoritmos en sistemas inteligentes para estudiar el Bienestar Económico".

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos asociados a esta investigación pueden ser solicitados al primer autor por correo electrónico.

CONFLICTOS DE INTERESES

Los autores declaran no poseer conflictos de interés.

REFERENCIAS

- Buckley, J. J. (1992a). Solving fuzzy equations in economics and finance. *Fuzzy Sets and Systems*, 48(3), pp.289-296. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90344-4](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90344-4)
- Buckley, J. J. (1992b). Solving fuzzy equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 50(1), pp.1-14. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90199-E](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90199-E)
- Buckley, J., Eslami, E., & Feuring, T. (2002). *Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering*. Siegen, Physica-Verlag.
- Buckley, J., & Feuring, T. (2000). Fuzzy Differential Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 110(1). 43-54. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00141-9)

- Buckley, J. J., & Feuring, T. (2001). Fuzzy initial value problem for Nth-order linear differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 121(2), 247-255. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00028-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00028-2)
- Carlsson, C., & Fullér, R. (2010). *Fuzzy reasoning in decision making and optimization*. Physica-Verlag, Heideberg.
- Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática* (4a. ed.). Editorial: McGraw-Hill, México.
- Cortés-López, J. C., Romero-Bauset, J. V., Roselló-Ferragud, M. D. y Villanueva-Micó, R. J. (2012). Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación. Departamento de Matemática Aplicada, Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar. Universidad Politécnica de Valencia. <file:///C:/Users/Juan%20Carlos/Desktop/un%20modelo%20de%20oferta%20y%20demanda%20continuo%20con%20especulacion.pdf>
- Escobar, A. (2010). Oferta y demanda: un modelo matemático con ecuaciones diferenciales. *Revista Tendencias*, 11(2), 7-34.
- Fernandez, M. J. (2012). *Medidas de pobreza. Un enfoque alternativo*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires. http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/econ/collection/tesis/document/1501-1223_FernandezMJ?p.s=TextQuery
- Fernandez, M. J. y Parma, A. (2024). *Modelo de mercado con especulación: aplicación de ecuaciones diferenciales borrosas*. Conference Proceedings of the International Congress on Innovation and Sustainable, Mazatlán, México, pp. 307–311. <https://iconis.org/download/iconis-viii-proceedings-2/>
- Kaufmann, A. (1973). Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs. Fuzzy sets theory. (Vol. 3). Masson.
- Klir, G. J. & Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall.
- Lazzari, L. L. (2010). *El comportamiento del consumidor desde una perspectiva fuzzy. Una aplicación al turismo*. Edicon, Fondo Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas de la Ciudad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Lupin, B. (2014). *Aplicación de Ecuaciones Diferenciales en la Economía Experimental*. IV Seminario Docencia, Investigación y Transferencia en las Cátedras Matemática para Economistas. CMA, IADCOM, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.
- Mazandarani, M. & Xiu, L. (2021). A review on fuzzy differential equations. *IEEE access*, 9, 62195-62211. DOI 10.1109/ACCESS.2021.3074245
- Mondal, S. & Roy, T. (2013) First Order Linear Non Homogeneous Ordinary Differential Equation in Fuzzy Environment. *Mathematical Theory and Modeling*, 3(1), 85-95. <https://www.iiste.org/Journals/index.php/MTM/article/view/4175>
- Parma, A. y Fernandez, M. J. (2016). Ecuaciones diferenciales borrosas lineales de primer orden y su aplicación al modelo de Sachs. *Análisis Económico*, vol. XXXI(78). pp. 93-124. <https://analisiseconomico.azc.uam.mx/index.php/rae/article/view/44>
- Pedrycz, W., Ekel, P., & Parreiras, R. (2011). Fuzzy multicriteria decision making, Models, Methods and Applications. John Wiley and Sons. Chichester.
- Spiegel, M. R. y García, H. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice Hall.
- Tanaka, K. (1997). *An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications*. Springer-Verlag, Nueva York.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)