

## ESTUDIO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO - MATEMÁTICO DEL PROFESOR UNIVERSITARIO: UN MARCO TEÓRICO DE INVESTIGACIÓN

### STUDY OF THE DIDACTIC – MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF A UNIVERSITY TEACHER: A THEORETICAL FRAMEWORK OF RESEARCH

Omaida Sepúlveda-Delgado<sup>1</sup>

Recibido: febrero 7 de 2015  
Aceptado: mayo 23 de 2015

#### Resumen

En este artículo se presentan los elementos que constituyen el marco teórico que permite dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática, para una enseñanza idónea del objeto Grupo?. El término idoneidad didáctica se define en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, EOS, y hace referencia a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementan esta idoneidad didáctica. La *Faceta Epistémica* hace referencia a los conocimientos matemáticos del profesor sobre el contenido matemático, como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. La dimensión epistémica corresponde a uno de los componentes en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, CDM, definido en el EOS, que es un Marco Teórico de investigación en Didáctica de la Matemática.

**Palabras Clave:** Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor, Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, Objeto matemático Grupo, Fenomenología.

#### Abstract

This article describes the elements that constitute the theoretical framework to answer the research question: what basic and mathematic knowledge need the students of mathematical training of a group object suitable teaching? The term didactic suitability is defined in the theoretical framework of the Ontosemiotic approach of the Knowledge and Mathematical Instruction – EOS; and it is referred to the identification of potential improvements of the process of study which increase this didactic suitability. The Epistemic phase is referred to the mathematical knowledge of the teacher about the mathematical content, like an institutional order whose teaching is planned, implemented and evaluated. The epistemic dimension belongs to one of the components in the model of didactic -mathematical knowledge - CDM, defined in the EOS which is a theoretical framework of research in the Didactics of Mathematics.

**Keywords:** Didactic-Mathematical Knowledge of the teacher, Ontosemiotic approach of Knowledge and Mathematical Instruction, mathematical Object Group, Phenomenology.

<sup>1</sup> Licenciada en matemáticas, doctorando en educación, Profesora Titular, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia.  
E-mail: omaida.sepulveda@uptc.edu.co

## 1. Introducción

Un problema en Didáctica de la Matemática, en el campo de Formación de Profesores, es la identificación de los componentes del Conocimiento del Profesor, requeridos para una enseñanza efectiva de tópicos específicos de la matemática. Se han realizado investigaciones en torno a la determinación de los conocimientos que el profesor necesita para que su práctica sea efectiva y se facilite el aprendizaje de los estudiantes (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball, & Schilling, 2008; Godino, 2009). Sin embargo, pocos estudios se dirigen a caracterizar el Conocimiento Didáctico-Matemático - CDM de los profesores universitarios, respecto al objeto matemático Grupo. Por esta razón, se encuentra en la fase de desarrollo, la tesis doctoral titulada: *El conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario: Objeto Grupo*; en la cual se pretende evaluar este conocimiento sobre el objeto Grupo, de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) los cuales pueden ingresar a las universidades como profesores; además se tiene presente que el objeto Grupo se consideran para la enseñanza universitaria. Así, en el desarrollo de la tesis doctoral, se ha consolidado un marco teórico, objeto de reflexión en este artículo.

El modelo del CDM, desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, EOS (Godino, 2009) posibilita la indagación de los conocimientos del profesor universitario, desde una corriente de investigación didáctica y a través de un marco conceptual que permite comprender cómo es que los estudiantes de formación matemática y los profesores construyen los significados de los objetos matemáticos.

En las siguientes secciones se presentan los elementos teóricos que constituyen el marco teórico del estudio sobre la *Caracterización del CDM de los estudiantes de formación matemática correspondiente al objeto matemático Grupo*. Este marco teórico permite abordar la pregunta de investigación y entre los elementos que lo integran se encuen-

tran en primer lugar, el Pensamiento Matemático Avanzado como línea de investigación que profundiza en los procesos que se activan al momento de desarrollar las prácticas matemáticas que involucran al objeto de investigación. En segundo lugar, se describen algunas de las nociones del EOS (marco teórico desarrollado por Godino, Contreras, & Font, 2006; D'Amore, Font, & Godino, 2007; Godino, Batanero, & Font, 2007; Font & Contreras, 2008; Ramos & Font, 2008; Font, Planas, & Godino, 2010, Pino-Fan, 2013) que permiten realizar análisis pormenorizados de las prácticas desarrolladas por los estudiantes de formación matemática; seguidamente, se analiza la Fenomenología de Freudenthal (1983) como una herramienta que permite describir los fenómenos que organiza el objeto de investigación; se pasa a analizar la complejidad de los objetos matemáticos: complejidad que se debe tener presente en la indagación didáctica del significado de cualquier objeto matemático y finalmente, se presenta la conceptualización teórica de los elementos que constituyen el CDM de los estudiantes de formación matemática: motivo de análisis en la investigación de tesis doctoral en desarrollo.

## 2. Nociones Teóricas

El objeto de investigación corresponde al objeto matemático Grupo, que se estudia en la asignatura de Teoría de Grupos, y es de especial importancia para los estudiantes de formación Matemática, licenciados y matemáticos, y se define como sigue:

*Sea  $G$  un conjunto no vacío y  $*$  una operación binaria definida en  $G$ . Se dice que  $G$  es un grupo respecto de  $*$  o también que  $*$  da a  $G$  una estructura de grupo, si  $*$  cumple las siguientes propiedades:*

*G1.  $*$  es asociativa.*

*G2. En  $G$  existe un elemento identidad e respecto de  $*$*

*G3. Cada elemento de  $G$  es invertible.*

Al grupo se le denota por  $(G, *)$  y si no se presenta ambigüedad sobre la operación definida  $*$  se denota simplemente por  $G$ . Entre los grupos más usuales se tienen:  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $C$  con la operación binaria de la adición.

A continuación se describen las herramientas teóricas que permiten la caracterización del CDM de los estudiantes de Formación Matemática correspondiente al objeto matemático Grupo: tema de investigación para el cual se ha consolidado este marco teórico, objeto de reflexión.

## 2.1 Pensamiento Matemático Avanzado

La Teoría de Grupos es una de las materias fundamentales en el plan de estudios de los estudiantes de formación matemática; su aprendizaje involucra procesos cognitivos que tienen una componente psicológica, como: abstraer, demostrar, formalizar, generalizar, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, y sintetizar, propios del Pensamiento Matemático Avanzado.

Según Azcárate y Camacho (2003) el proyecto de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado, PMA, nace en España, en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (Azcárate, 1996), y se amplía a otras universidades; se trata de una línea de investigación que tiene entre sus objetivos profundizar en el estudio de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y que adquiere una progresiva importancia en los cursos superiores.

En este sentido, algunos de los procesos del PMA se analizan como parte de los objetos matemáticos primarios que conforman las configuraciones epistémicas que son las que se activan en los estudiantes al momento de desarrollar las prácticas matemáticas que involucran al objeto de investigación y que son motivo del análisis, para la exploración y caracterización del Conocimiento Didác-

tico- Matemático de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto matemático Grupo.

En la línea de PMA se considera que cuando el estudiante se enfrenta a una tarea, práctica matemática, en relación con un concepto matemático, la definición se activa para la resolución de la tarea, pero esto no es lo que ocurre: el estudiante no utiliza la definición y responde según la imagen que tenga del concepto (Aldana, 2011). Por tanto, el carácter adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto podría llevar a la aparición de errores e inconsistencias. En este aspecto, en el EOS, se consideran que lo que se activa en el estudiante, son configuraciones epistémicas, formadas por objetos matemáticos primarios, entre los que se incluyen también las definiciones, proposiciones, las propiedades entre otros, además de las definiciones. Estas configuraciones epistémicas se describen en la siguiente sección, al igual que los objetos matemáticos primarios que las conforman.

## 2.2 Enfoque OntoSemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

### 2.2.1 Origen

La problemática que motivó el surgimiento del *Enfoque OntoSemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*, EOS, se relacionaba con la fundamentación teórica para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Para dar respuesta a esta problemática, surge el EOS (Godino & Batanero, 1994; 1988; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, & Ordóñez, 2005; Godino, Batanero, & Roa, 2005; Godino, Contreras, & Font, 2006; Godino, Batanero, & Font, 2007). Entre las teorías que inicialmente fueron la base para este enfoque se encuentra: la Didáctica Fundamental de las Matemáticas, DFM (Gascón, 1998), caracterizada por problematizar la propia Matemática, que es considerada como punto de entrada para la indagación didáctico-matemática (de aquí se derivan las dimensiones cognitiva e instruccional, del análisis didáctico para este enfoque). *La epistemología*

*matemática* es objeto de reflexión y análisis para la DFM, con los supuestos epistemológicos de las matemáticas de la Teoría de las Situaciones Didácticas, TSD (Brousseau, 1986; 1978), como punto de partida de la DFM.

De la TSD, toman el postulado que establece que *para cada objeto matemático existe una situación matemática* o una colección de situaciones, cuya resolución ha dado origen y sentido al objeto, y que, por tanto, el aprendizaje del objeto debe partir de tales situaciones, o de adaptaciones apropiadas a las mismas. La TSD asume de manera explícita que *los objetos matemáticos, cuya naturaleza no se explicita, son emergentes de las prácticas matemáticas*, siendo este uno de los postulados esenciales de las aproximaciones antropológicas (Wittgenstein) y pragmatistas (Pierce, 1978) en la filosofía de las matemáticas.

La teoría Antropológica de la Didáctica, TAD, que tiene sus inicios en 1990, como una evolución y extensión a la noción de Transposición Didáctica; adopta de manera explícita una epistemología matemática sobre bases antropológicas. Entre las nociones de la TAD, que toma el EOS, se tienen: práctica matemática, praxema, objeto matemático, relación institucional y personal del objeto; posteriormente se introducen las nociones de técnica, tecnología y teoría, que con la noción de tarea configuran la noción central de praxeología. Bajo este enfoque EOS se elaboró una epistemología matemática explícita y más detallada sobre la cual fundamentar los estudios de los fenómenos didácticos y matemáticos (Godino, 2012, p. 51).

Otra propuesta teórica que se integra en el EOS, corresponde a la Dialéctica *Instrumento - Objeto y el Juego de Marcos, DIO* (JM de Douady, 1986), que también incluye una posición epistemológica sobre las matemáticas de naturaleza antropológica. Para Douady los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: posibilitan la acción (instrumento) y son conceptualizados como entidades reutilizables en otros procesos similares, no se vinculan necesariamente a una situación determi-

nada, y pueden formar parte de un discurso más general: objeto (Godino, 2012).

Otra teoría que integra el EOS por sus herramientas de naturaleza epistémica, es La Teoría de los Campos Conceptuales, TCC (Vergnaud, 1990), que constituye uno de los programas cognitivos en Didáctica de la Matemática. La primera descripción de Vergnaud sobre un *campo conceptual* es la de conjunto de situaciones. Pero junto a las situaciones se consideran los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones (Godino, 2012, p. 51).

El EOS surge así del análisis e integración de diversas teorías, al considerar que no hay una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida entre ellas al problema epistemológico (en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este problema PE (problema epistemológico) corresponde a preguntas tales como: ¿qué es un objeto matemático? O de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, grupo) en un contexto o marco institucional determinado?.

El PE se relaciona con el objeto matemático como entidad cultural o institucional, y se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica. El PC (problema cognitivo) responde a la pregunta ¿qué significa un objeto matemático, *para un sujeto en un momento y circunstancias dadas*? Para dar respuesta a estas preguntas de naturaleza ontosemiótica, Godino et al, (1994) parten de la noción de *objeto* propuesta por Chevallard (1991) clarifica algunas otras nociones de la TAD, las hacen operativas, determinan semejanzas, diferencias y las relacionan con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente: nociones como *concepción y significado* (Godino, 2012, p. 52). En el EOS se proporciona una respuesta clara a la pregunta ¿qué significa el objeto Grupo?.

Para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en Didáctica de la Matemática en el EOS, se conformaron las nociones de *Sistema de Prácticas*, *Configuración de Objetos y Procesos*, (Godino et al., 2007; Font, Godino, & Gallardo, 2013). Estas herramientas teóricas permiten formular el problema epistémico (conocimiento institucional, socio-cultural) y cognitivo (conocimiento personal) de la didáctica de la matemática en los siguientes términos:

¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales y las configuraciones de objetos y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas?: Significado institucional de referencia.

¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tarea matemática?: Significado personal.

¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional?: Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del estudiante.

Este enfoque teórico pretende así comparar, coordinar e integrar las teorías: TSD, TCC, DIO-JM, TAD, Teoría de los Registros de Representación Semiótica, TRRS (Duval, 1996); teorías que permiten abordar los problemas didáctico-matemáticos. El EOS, es así un marco teórico que incluye las herramientas necesarias y suficientes y que responde al *Problema de la epistemología de la didáctica de la matemática* - PEDM: Dadas las teorías  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ , focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ¿es posible elaborar una teoría **T** que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las  $T_i$ ? (Godino et al., 2006; Godino, 2012, p. 52).

Las nociones de *Práctica matemática y objeto matemático* introducidas por Chevallard (1991; 1992), se conectan en el EOS con las ideas centrales de

la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). *Una práctica matemática* es una acción o manifestación, verbal o escrita, operativas y discursivas - que pueden ser de un sujeto personal, o pueden ser compartidas en una institución (Godino, 2002). Y se considera como *objeto matemático* a una entidad emergente e interviniente en las prácticas matemáticas. Se entiende por objeto alguno de los elementos: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación-problema. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones- problemas) se entiende como emergente de una práctica cuya finalidad es la resolución de una situación - problema (Godino et al., 1994; 1998).

El EOS, en consonancia con el Interaccionismo Simbólico, considera como objeto o entidad matemática a todo lo que puede ser indicado, lo que puede señalarse o a lo cual se hace referencia, cuando se hace, se comunica o se aprende matemática. En la descripción de la actividad matemática se hace referencia a muchos y diversos objetos, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos (Godino, 2002, p. 55). Por su parte, Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde una perspectiva proceso-producto y para esto consideran los procesos duales: Institucionalización-Personalización; Generalización-Particularización; Descomposición/análisis- Composición/reificación; Materialización-Idealización; Representación- Significación.

La noción de *Sistema de prácticas personales* permite describir los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto de manera global concretada con la trama de funciones semióticas, relaciones, que el sujeto puede establecer en las que el objeto se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Las nociones de *Significado institucional y personal de un objeto matemático*, se desarrollan y precisan en términos de los sistemas de prácticas en las que un objeto

matemático es determinante para su realización y se relacionan con las nociones de conocimiento y comprensión (Godino & Batanero, 1994, p. 334; 1998).

En el enfoque ontosemiótico, una de las formas de entender el significado de un objeto desde la perspectiva pragmatista, es en términos de los sistemas de prácticas en los que dicho objeto interviene: significado sistémico. Los sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se distinguen los diferentes significados cuando se abordan distintos problemas (Pino-Fan et al., 2013, p. 42). Algunos Sistemas de prácticas se consideran como primarios, por su carácter extensivo (particular), esto hace referencia a que resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Los sistemas de prácticas primarios se agrupan en sistemas más genéricos en los cuales se pueden abordar situaciones-problemas más generales. Este proceso continúa por niveles, hasta llegar a la formalización del objeto matemático. La consideración conjunta de los elementos y sus relaciones, conforman el *Significado epistémico global* del objeto matemático.

Entonces, *reconstruir el significado global* del objeto matemático de investigación, significa identificar los sistemas de prácticas en los cuales se utiliza y los cuales llevan asociados cada uno, una configuración epistémica que viene a constituir un significado parcial del objeto matemático (Godino, 2009, p. 22). El *sentido* del objeto, se interpreta en este enfoque, como un significado parcial y se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a contextos de uso determinado. El uso del término sentido en la Teoría de Situaciones Didácticas, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge y le da su sentido (se describe como significado situacional). En el EOS, esta correspondencia es crucial ya que es la razón de ser del objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero además tiene en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre el objeto y los otros

componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que se considera que proviene el objeto, entendido en términos cognitivos o en términos epistémicos (Godino et al., 2006).

El término de *Configuración epistémica*, se compone de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en los diferentes contextos de su uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas, las cuales llevan asociadas un significado parcial diferente de dicho objeto matemático (Godino et al., 2006). Las configuraciones epistémicas son las que permiten reconstruir el significado global de referencia definido a partir de las nociones de significado global-holístico u holosignificado, que comprende los diferentes significados parciales del objeto matemático.

Así, el *significado de referencia* se conforma por los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. En una institución educativa, el significado de referencia es una parte del significado holístico del objeto matemático. La identificación de los significados parciales, se hace mediante la descripción sistemática (análisis semiótico) de los objetos primarios que intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto matemático. En el análisis de las configuraciones epistémicas, cada objeto interviniente en una práctica matemática, puede verse desde distintas facetas duales. Para determinar los diferentes niveles de generalización entre las configuraciones, se trabajan los aspectos intensivos-extensivos: general- particular.

Finalmente, el término *Configuración Cognitiva* hace referencia al sistema de objetos matemáticos primarios que están involucrados en las prácticas matemáticas personales llevadas a cabo para resolver un problema específico (Godino et al., 2007) y la *Configuración Didáctica*, se relaciona con la secuencia interactiva en un proceso instruccional, que tiene lugar a propósito de una situación-problema. Una Configuración Didáctica se compone

de una configuración epistémica, esto es la situación-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos en interacción (Font et al., 2010, p. 3).

### 2.2.2 Análisis semiótico

El análisis semiótico de un texto matemático y en general de la actividad matemática, contempla los siguientes elementos: 1) las notaciones y sus representaciones (Lenguaje); 2) las situaciones-problemas; 3) las definiciones; 4) los procedimientos y las técnicas; 5) las proposiciones, propiedades y teoremas y 6) los argumentos. Estos elementos u objetos primarios, se articulan formando configuraciones epistémicas; estas configuraciones se constituyen en las herramientas que permiten describir la complejidad de los objetos matemáticos y las prácticas de donde emergen estos objetos (Godino, 2002, p. 14).

El lenguaje, según Godino (2002) se encuentra constituido por los términos, las expresiones, las notaciones, las gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y matemático) se describen otros objetos lingüísticos. Las situaciones, corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios; son las tareas que inducen la actividad matemática. Los procedimientos, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, son las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas. Los conceptos, son dados por las definiciones o descripciones, por ejemplo: número, punto, recta, función. Las proposiciones, son las propiedades o los atributos de los objetos mencionados, y suelen darse como enunciados y las argumentaciones, pueden ser deductivas o de otro tipo y se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos seis tipos de objetos se califican en el EOS como matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática y son los constituyentes

primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, las teorías. Las entidades lingüísticas, tienen un papel representacional -se ponen en lugar de las restantes- e instrumental, o sea que se ven como instrumentos de la actividad matemática. Las situaciones - problemas, son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones (procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin (Godino, 2002, p. 5).

Se define el *análisis semiótico* de un texto matemático como la descomposición en unidades llamadas semióticas, junto con la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas (relaciones) que se establecen entre los mismos por parte de los diferentes sujetos. El criterio para definir las unidades de análisis es el cambio del elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerados; se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, al empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad; o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, en la delimitación de las unidades de análisis, se tienen en cuenta los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en este enfoque teórico (Godino, 2002, p. 14).

El análisis semiótico según Godino (2002) es la indagación sistemática de los significados puestos en juego a partir de la transcripción de un proceso instruccional o de un texto matemático, de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto para un interpretante potencial. Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas, el análisis permite caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones.

### 2.2.3 Complejidad de los objetos matemáticos

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista o empirista se consideraba un objeto

matemático con existencia independiente de las personas, en el EOS, se explica como un objeto virtual o ficticio que emerge de las diferentes maneras de ver, hablar, operar; esto es, el objeto es el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícitamente o implícitamente el par (prácticas matemáticas, configuración epistémica que las activa). Este objeto virtual primero se considera como la referencia global de una configuración epistémica y después como el conjunto de varias configuraciones epistémicas (Godino, 2002) evidenciando así, la complejidad de los objetos matemáticos.

En el EOS se considera que los objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas, según el juego del lenguaje en el que participan (Wittgenstein, 1953), pueden ser considerados desde diferentes maneras de estar participando; estas formas se agrupan en las siguientes facetas o dimensiones duales: unitaria-sistémica; expresión-contenido; ostensivo-no ostensivo; personal- institucional; extensivo - intensivo.

#### 2.2.4 Fenomenología

El análisis didáctico según Rico (1997), tiene el objetivo de facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su actuación, mediante cuatro tipos de análisis parciales: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). De acuerdo a Rico (1997) para el desarrollo del análisis didáctico, se establecen unos organizadores del currículo entre los cuales se encuentra, en primer lugar, el estudio de los errores y dificultades detectados en el aprendizaje de las matemáticas, que se presentan para cada tópico, así como los problemas y obstáculos de aprendizaje que se detectan o se plantean sobre cada concepto. En segundo lugar se encuentran las representaciones de cada sistema conceptual, junto con algunas modelizaciones usuales de los conceptos. En tercer lugar, se encuentra *la fenomenología* de los conocimientos implicados y las apli-

caciones prácticas de cada bloque de contenidos; en cuarto lugar, se encuentra la diversidad de los materiales de tipo manipulativo; los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico y el estudio de la evolución histórica de cada campo e incluso de cada concepto.

El término fenomenología se compone del *noúmeno*, que se refiere a lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y *phainomeno*, también de origen griego que significa lo que parece. Los fenómenos se consideran entonces que son las apariencias o lo que se nos parecen de las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo de los noúmenos era el que se calificaba de real. La contraposición entre fenómeno y noúmeno es una contraposición entre mundos, el de los fenómenos que es el de la apariencia, de la experiencia y el noúmeno que es lo sensible, lo inteligible.

Identificar los conceptos matemáticos con noúmeno, los situaría fuera del campo de nuestra experiencia hecho que va en contradicción con las ideas de Freudenthal (1983) al presentar al concepto matemático como un medio de organización de fenómenos, que posteriormente pasan a formar parte de otro campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático. Así, los conceptos no caen fuera de la experiencia ni están en un mundo diferente del mundo de los fenómenos que organiza: los fenómenos son objetos de la experiencia matemática y se establecen las cadenas (fenómenos, medio organización 1), (medios de organización 1, medios de organización 2) y esta cadena continúa (Puig, 2001, p. 2). Hacer Fenomenología, es describir cada una de estas series o pares, es decir, determinar los fenómenos para los cuales el concepto es un medio de organización, teniendo en cuenta que la actividad matemática no permanece en el nivel inferior (fenómeno, medio de organización) sino que el proceso de creación de los objetos matemáticos es un proceso por medio del cual los medios de organización se convierten en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos; los objetos matemáticos se incorporan a nuestra experiencia,



y entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso continúa reiterativamente (Puig, 2001, p. 5).

Se define la Fenomenología (Freudenthal, 1983), como el método de análisis de los contenidos matemáticos y el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático corresponde a la descripción del objeto matemático. El análisis fenomenológico se hace con una intención didáctica, como un análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular y se entiende en este contexto como un componente del análisis didáctico (Rico, 1997, p. 61) cuyo objetivo es servir de base para organizar la enseñanza de las matemáticas; y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas (Freudenthal, 1983).

A continuación se analizan algunos modelos del Conocimiento del profesor y de especial importancia el modelo del CDM desarrollado en el EOS; modelo que se establece en la investigación a la cual corresponde la descripción de este marco teórico.

### 3. Modelos del Conocimiento del Profesor

La Didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje lo cual implica un contenido, estudiantes, profesor y medios tecnológicos. Estos procesos se realizan en una institución educativa que condiciona y hace posible el proceso educativo. El estudio corresponde a sistemas heterogéneos y complejos que necesitan de modelos teóricos específicos para el análisis de cada uno de sus componentes. Los componentes del sistema interactúan entre sí, y se hace necesario identificar y tener en cuenta las diversas facetas que intervienen en estas interacciones. Se presenta en esta sección el modelo del CDM; modelo que define facetas o componentes del Conocimiento del Profesor, para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, 2009, p.15).

Algunos de los teóricos en el estudio del *Conocimiento del Profesor* para una enseñanza efectiva, encontrados en la literatura son: Shulman (1987) quien define siete categorías del Conocimiento del Profesor: *Conocimiento del contenido*; Conocimiento pedagógico general; Conocimiento del currículo; *Conocimiento pedagógico del contenido*, CDC o PCK; Conocimiento de los estudiantes y sus características; Conocimiento de los contextos educativos y Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. También, se encuentra, Ball et al, (2000; 2001; 2008) con el modelo denominado *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, MKT, y finalmente, Godino (2009, p. 20) quien propone el modelo integrador CDM, del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor.

Ball y colaboradores (2000; 2005; 2008) por su parte, caracterizan el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, MKT, basándose en las componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman y distinguen dos categorías: Conocimiento del contenido y Conocimiento didáctico del contenido. Cada una de estas categorías presenta subdivisiones. El *Conocimiento del Contenido*, se conforma por las subcategorías: Conocimiento Común del Contenido, CCK, que corresponde al conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza (Ball, Thames, & Phelps, 2008), e incluye el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades; El Conocimiento Especializado del Contenido, SCK, hace referencia al conocimiento matemático y a la habilidad exclusiva para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400-401). El profesor para desarrollar las tareas de enseñanza, requiere de un conocimiento que le permita participar en tal actividad, incluyendo poder representar las ideas de manera clara a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas, entre otras actividades (Ball, Hill, & Bass, 2005); y El Conocimiento en el Horizonte Matemático, HCH, que se define como

el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo (Ball et al., 2008): se considera como el conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los diferentes niveles escolares. Para Martínez, Giné, Figueiras y Deulofeu (2011), puede entenderse como aquellas relaciones que enlazan los conocimientos previos y los futuros, que permiten estudiar propiedades de un concepto o procedimientos en situaciones nuevas o más complejas (Rojas, Flores, & Ramos, 2013).

Ball et al, (2008) y Hill, Ball, y Schilling, (2008) describen el *Conocimiento Didáctico del Contenido*, como la composición de tres subdominios del conocimiento: El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes - KCS, que corresponde al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular (Hill et al., 2008), es el conocimiento que se utiliza en las tareas de enseñanza y que implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos; incluye el conocimiento de los errores comunes y las dificultades más habituales de los estudiantes; El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza - KCT, se relaciona con el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático (Ball et al., 2008) e incluye saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y de las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas y El Conocimiento del Currículo - KCC, que se define como el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza y que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes.

En el EOS se define el modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor*, CDM; este modelo de conocimiento del profesor concierne a la fusión de las nociones MKT, Mathematical Knowle-

dge for Teaching, de Ball y Colaboradores y del modelo PCK, Pedagogical Content Knowledge o CDC, Conocimiento Didáctico del Contenido, de Shullman y Colaboradores (Godino, 2009). El CDM del profesor se encuentra compuesto por la trama de relaciones que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos, para implementar procesos de instrucción eficaces que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino, 2013, p.19).

Este CDM del profesor distingue las siguientes seis categorías o facetas del conocimiento: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y ecológica. Para cada faceta se distinguen componentes y herramientas que permiten análisis pormenorizado del CDM (Godino, 2009, p. 20). La Faceta Epistémica, hace referencia a los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases del proceso de estudio: preliminar, diseño, implementación y evaluación. Estos significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos. La Faceta Cognitiva se relaciona con los conocimientos personales de los estudiantes y la progresión de los aprendizajes, desarrollo de los significados personales. La Faceta Afectiva tiene en cuenta los estados afectivos: actitudes, emociones, creencias, valores, del alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. La Faceta Mediacional corresponde a los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos. La Faceta Interaccional tiene en cuenta los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación, orientada a la fijación y negociación de significados; y finalmente, la Faceta Ecológica que se refiere al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc., que soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, 2009, p. 22).

La Faceta epistémica del CDM hace referencia al conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto insti-

tucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. El modelo CDM distingue tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático; categorías que son similares a las del modelo MKT pero que se han redefinido y reestructurado (Pino-Fan et al., 2013). Estas categorías son: 1) Conocimiento común del contenido; 2) Conocimiento ampliado del contenido y 3) Conocimiento especializado. La categoría del *Conocimiento especializado* se subdivide en: Conocimiento del contenido especializado; Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y Conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje.

Los *Niveles de análisis* en el EOS para cada una de las facetas permiten el análisis pormenorizado de los procesos de instrucción matemática y de igual forma el análisis de las categorías del CDM, del profesor y corresponden a: Nivel 1: Prácticas matemáticas y didácticas, (operativas, discursivas y normativas.) Se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 1994). La aplicación de este nivel corresponde a la descripción de la secuencia de las prácticas matemáticas en la solución de un problema. El EOS, asume una concepción pragmatista - antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta en este enfoque como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Estos sistemas permiten describir las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje (Godino, 2009, p. 20).

Nivel 2: Configuraciones de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas en los diversos contextos de su

uso. Corresponde al segundo nivel de análisis. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos y sus tipologías (Font et al., 2010). Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado, que articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemáticos y de representación de los restantes objetos matemáticos; permite describir los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de posibles conflictos (Sepúlveda, 2014) en su realización. También permite la reconstrucción del significado global de referencia de un objeto matemático mediante la identificación de los significados parciales de la noción (Font et al., 2010).

Nivel 3: Normas y metanormas. En este nivel se identifican las reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones (Godino, 2009); 4) Idoneidad: en este nivel, se identifican las potenciales mejoras para el proceso de instrucción que puedan incrementar la idoneidad didáctica (Godino, 2009, p. 22).

#### 4. Conclusiones

En este artículo se presentaron elementos teóricos y metodológicos que posibilitan la realización del estudio de tesis en el Doctorado en Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en convenio con RUDECOLOMBIA, titulado: *Conocimiento Didáctico del Profesor Universitario: Significado Global del Objeto matemático Grupo*; estudio que se realiza con los estudiantes de formación matemática de esta universidad. En el

trabajo de tesis doctoral en desarrollo, se encuentra en primer lugar, el estudio epistemológico, fenomenológico e histórico del objeto Grupo. Este estudio se efectúa a partir del análisis semiótico y de contenido de los libros de texto (5 libros seleccionados); de los planes de estudio y de investigaciones en Didáctica del Álgebra Abstracta. El análisis semiótico y de contenido es la técnica desarrollada en el EOS, que permite describir el objeto matemático a través de configuraciones epistémicas de objetos, donde se tiene presente que lo que se puede hacer con el objeto Grupo queda determinado por cada una de las configuraciones en la que dicho objeto se presenta.

En el EOS, los objetos matemáticos emergen en el tiempo desde varios *sistemas de prácticas matemáticas* diferentes, y por tal razón, el objeto se puede considerar como singular y plural. Singular por razones de simplicidad y plural porque, en cada subconjunto de prácticas, la configuración de objetos en la cual se presenta varía, posibilitando prácticas diferentes (Font, Godino, & Gallardo, 2013). Según Font et al., (2013) el objeto se puede ver como uno y muchos a la vez. Se considera de manera unitaria, como emergente de sistemas de prácticas diferentes: en este caso es el objeto asociado al sistema de pares (prácticas matemáticas, configuraciones que las activan.) Esta asociación explica que el objeto se puede definir de diferentes maneras equivalentes y que se puede representar por diferentes representaciones pero por otra parte, se puede considerar que en cada configuración el objeto asociado es diferente.

A partir del análisis semiótico y de contenido del objeto de investigación, del análisis de los planes de estudio de los estudiantes de Formación Matemática y de las investigaciones en Tópicos de Teoría de Grupos, se obtiene el *Significado Global de Referencia* del objeto matemático Grupo. A partir de este estudio se está diseñando el cuestionario que permitirá evaluar el *CDM referente a la faceta epistémica* del objeto de inves-

tigación; conocimiento real que poseen los estudiantes de formación matemática sobre dicho objeto. Esta faceta epistémica del Conocimiento del Profesor de matemáticas, corresponde a lo que en los modelos descritos denominan: los conocimientos sobre el contenido.

Por tanto, en este artículo se presenta el EOS como uno de los marcos teóricos que proporciona las herramientas necesarias para el análisis del CDM del estudiante de formación matemática. Este estudio es de importancia para los programas de formación matemática ya que pretende la caracterización del Conocimiento del Profesor en formación, y se espera también la determinación de criterios relevantes para los planes y programas encaminados a la búsqueda de una mejora en la calidad de la Educación Superior para los programas de formación inicial de profesores.

En conclusión, el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, surge como resultado del análisis realizado, primero al modelo propuesto por Shulman y colaboradores (1986; 1987) denominado *Conocimiento Base para la enseñanza*, donde la categoría del *Conocimiento Didáctico (Pedagógico) del contenido*, toma especial interés por la comunidad de investigadores. Posteriormente el grupo de Ball y Colaboradores (2000; 2001; 2008) continuando con las ideas de Shulman, define el modelo *Conocimiento para la enseñanza de las matemáticas*; donde define las categorías de *Conocimiento común del contenido* y *Conocimiento Pedagógico del contenido*: retomando las ideas de Shulman y Colaboradores. Siguiendo con esta línea de trabajo Godino (2009) retoma las categorías de Ball y Colaboradores, las operativiza de tal manera que con algunas de las herramientas del enfoque onto-semiótico, es posible llegar a realizar análisis pormenorizados que permiten evaluar parcialmente el *Conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores*, para este caso universitarios tanto para el caso de formación inicial como para el caso de profesores en ejercicio. Se entiende que

este CDM, es muy complejo al igual que el conocimiento matemático.

## Referencias

- Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"* (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, Castilla y León, España.
- Azcarate, C. (1996). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. En Bishop, A., Clements, A., Keitel, CH., Kilpatric, J. & Labord, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2(1), 235-240.
- Azcarate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), 135-149.
- Ball, D. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.
- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. Research on teaching mathematics. *Handbook of research on teaching*, (4th ed.), 433-456.
- Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 14-22.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *La revue Francaise del Pédagogie*, 45.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et methods de la didactique des mathématique*. Thèse d'Etat, Université de Bourdeaux-I. Talence: IREM de Bourdeaux.
- Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*, Paris, La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. (2a Edición en colaboración con Marie-Alberte Joshua), Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, Editions.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordoñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Mathematiques*, 25(2), 151-186.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVIII, N° 2, 49-7.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2). pp. 5-31.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques?. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-380.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V., Godino, J.D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational studies in mathematics*, 82(1), 97-124.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Riedel, P.C.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didáctica des Mathématiques*, 18/1(52), 7-33.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Seminario interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SIIDM), Jornadas de Baeza.

Godino, J.D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J.D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática*, 20, 3-31.

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.),

*Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247- 265.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. España.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-437). Ciudad Real: SEIEM.

Peirce, C. S. (1978) *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Cambridge, MA, The Belknap Press of Harvard University Press.

Pino - Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada: España.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, 8(2), 1-49.

Puig, L. (2001). Hans Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dor-

drecht: Reidel (Traducción). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV.

Ramos, A. B., & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*, 11(2), 233- 265.

Rico, L. (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: *Síntesis*.

Sepúlveda, O. (2014). *Conflictos semióticos de los estudiantes de Licenciatura en matemáticas de la UPTC; con los conocimientos previos: GCD, Divisibilidad e inducción matemática, necesarios para la comprensión del objeto matemático Grupo*. Trabajo

de ascenso al escalafón docente. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia: Tunja.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review*, 57(1), 1-22.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas (Philosophische Untersuchungen)*. Londres: Kegan Paul.