Cómo citar este artículo: Villamil-Rincón, D. L., Aldana-Bermúdez, E., & Wagner-Osorio, G. (2017). Análisis de contenido del concepto de área en educación superior. Rev.investig.desarro.innov, 8(2), 265-278.
doi: 10.19053/20278306.v8.n2.2018.7964

Análisis de contenido del concepto de área en educación superior

Content analysis of area concept in higher education

Diana Lucía Villamil-Rincón[1]
Eliécer Aldana-Bermúdez[2]
Graciela Wagner-Osorio[3]

Recibido: agosto 14 de 2017
Aceptado: octubre 16 de 2017

Resumen

En este artículo se propone una tarea que ayude en la construcción del concepto de área, en estudiantes de primer semestre de tecnología en topografía de la Universidad del Quindío. El diseño didáctico se realizó con base en el análisis de contenido del concepto de área a nivel universitario, tomando en cuenta los siguientes organizadores del currículo: La estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Se analizó una tarea de diagnóstico en la cual los estudiantes deben realizar el diseño de la figura para ubicar un jardín en un centro comercial. El área en la solución de la tarea no se expresa mediante un valor numérico ni con unidades de medida; el propósito es establecer una comparación del área de dos superficies cuadradas por medio de la razón entre ellas. Los resultados indican que se diseñó una tarea significativa para los estudiantes, ya que es una situación problema del concepto de área en el contexto topográfico. Los estudiantes deben emplear los conocimientos previos y la tarea representa un desafío al resolverla, ya que la falta de medidas en la representación gráfica obligan al estudiante a desarrollar un nivel de abstracción más complejo que la simple aplicación de un algoritmo.

Palabras clave: análisis de contenido, área, resolución de problemas, enseñanza de topografía.

Abstract

This article proposes a task to help first semester students of technology in topography at Quindío University to build the concept of area. The didactic design was based on the content analysis of area concept at university level, taking into account the following curriculum organizers: conceptual structure, representation systems and phenomenology. A diagnostic task was analyzed in which the students had to realize the design of the figure to locate a garden into a mall. The area of the task is not expressed by a numerical value or units of measurement. The aim is to establish a comparison between two squared areas by means of the ratio between them. The results show that a meaningful task was designed for students since it is a problem solving of the concept of area in the topographical context. The students must apply their previous knowledge to solve this challenging task because of the lack of measurements in the graphical representation which forces them to develop a more complex abstract level than to apply a simple algorithm.

Keywords: content analysis, area, problem solving, topography teaching.

1 Licenciada en Matemáticas, Estudiante de Maestría en Ciencias de la Educación, Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. E-mail: dlvillamil@uniquindio.edu.co
2 Licenciado en Matemáticas, Doctor en Educación Matemática, Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. E-mail: eliecerab@uniquindio.edu.co
3 Licenciada en Matemáticas y Computación, Magíster en Educación, Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. E-mail: gwagner@uniquindio.edu.co

1. Introducción

En relación con el objeto matemático área, la cultura egipcia se enfrentó a resolver el problema de las inundaciones del río Nilo, situación que generó la necesidad de establecer la medición de sus tierras cuyo uso del suelo era la agricultura. Con el propósito de asignar la misma cantidad de superficie afectada a los propietarios, los egipcios realizaban cálculos relacionados con el área de figuras planas, como: el cuadrado, triángulo, cuadrilátero y polígonos en general (Aldana-Bermúdez, & López-Mesa, 2016).

Históricamente, la primera definición del concepto de área aparece de manera formal a partir de los problemas de la cuadratura, tratados desde entonces en el ámbito del cálculo integral. Así se comprueba en los libros de cálculo el hecho que "en el siglo XVII, con el descubrimiento de nuevas curvas, los aspectos geométricos de estos problemas pasaron a un segundo plano y las técnicas de cálculo ocuparon su lugar, los problemas de cuadratura pasaron a ser simplemente problemas de cálculo de áreas y de volúmenes" (Pérez, 2008, p. 386).

Los antecedentes indican que las matemáticas se continúan enseñando de manera tradicional en las facultades de ingeniería (Álvarez, & Ruiz, 2010), y que los estudiantes tienen carencias formativas para plantear razonamientos o solucionar problemas (Castro-de Bustamante, 2007; Burbano-Pantoja, Valdivieso-Miranda, & Aldana-Bermúdez, 2017). En el estudio de D'Amore y Fandiño, (2007), para el caso particular del objeto matemático área, los autores concluyen que un alto porcentaje de los estudiantes establecen una dependencia estrecha entre el área y el perímetro, inclusive los estudiantes universitarios.

En las políticas institucionales de la educación superior, generalmente se establece una estrecha relación entre las matemáticas y la experiencia; esta relación debe ser analizada por el profesor para que logre "identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados)" (Gómez, 2002). En esta línea, Aldana y López, (2016), argumentan que es importante que el profesor conozca la evolución, el desarrollo y las nociones previas de un concepto matemático para posibilitar el diseño, planeación y aplicación de estilos adecuados de aprendizaje. Asimismo, en los registros de representación del concepto de área, visto desde la articulación de la resolución de problemas en el contexto de la formación universitaria, se movilizan de lo numérico a lo algebraico y gráfico; no obstante, Hernández-Suárez, Prada-Núñez, y Gamboa-Suárez, (2017), sugieren reforzar en los estudiantes el uso y articulación de diversos registros semióticos desde las estrategias didácticas.

En vista de lo anterior, en este artículo se realiza el análisis de contenido del concepto de área, articulado con la resolución de problemas en el contexto del programa de formación de tecnólogos en topografía de la Universidad del Quindío, como punto de partida en la organización de la enseñanza del objeto matemático, desde el análisis didáctico.

2. Marco teórico y metodología

2.1 Aspectos histórico-epistemológicos del área

Numerosas investigaciones en educación matemática dedican sus esfuerzos a llamar la atención en las dificultades que se presentan durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de área, desde la escuela primaria hasta la universidad (Camargo, & Acosta, 2012). La preocupación más común radica en el modo tradicional de enseñanza enmarcada por tres etapas: la definición del concepto a partir del recubrimiento de la figura mediante la unidad cuadrada, la introducción del método de la fórmula que representa cada figura para calcular el área y, finalmente, el uso de las unidades en el sistema métrico. Un autor que se muestra en desacuerdo con esta popular representación gráfica inicial de la noción del área es Spivak, (1992) al argumentar:

> (…) en geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, pero un poco de reflexión hace ver que raramente se da una definición aceptable de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región. Pero esta definición es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional π, pero no está claro en absoluto cuál es el significado de "π cuadrados". Incluso si consideramos un círculo de radio $1/\sqrt{\pi}$ cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado unidad puede llenar este círculo, ya que no parece posible dividir el cuadrado unidad en pedazos que puedan ser yuxtapuestos de manera que formen un círculo (p. 345-346).

Actualmente, los programas de formación universitaria que incluyen el cálculo integral en el diseño curricular contemplan el concepto de la integral definida para el cálculo de áreas (Camacho, Depool, & Garbín, 2008). Es usual que, a manera de introducción, se propongan ejercicios para calcular el área bajo la curva. Es así como el primer acercamiento que tendrá el estudiante al concepto se realiza mediante la descomposición de la región dada en regiones planas acotadas más pequeñas y con fórmula del área conocida. Generalmente, estas regiones son rectángulos que recubren la región por exceso o por defecto y resultan de dividir el intervalo de integración en otros de menor amplitud, para que así se tome la medida de la base y de la altura de los rectángulos. Este sencillo procedimiento, propuesto en los textos y comúnmente implementado en el aula por los maestros, tiene la intención de vincular la integral definida con la idea de área que, normalmente podría ser uno de los conocimientos previos que tienen los estudiantes universitarios.

Una vez definidos los aspectos histórico-epistemológicos del área de una superficie y su importancia en el contexto de la investigación, se continúa con los tres organizadores del currículo propios del análisis de contenido desde el análisis didáctico, para describir de manera estructurada y sistemática el contenido matemático que permita identificar los contextos de tipo natural, social y matemático, que pueden ser modelados.

2.2 Análisis didáctico

La exposición oral o escrita es un recurso que utiliza el maestro de matemáticas para que los estudiantes comprendan un concepto, siendo importante que su discurso sea claro para evitar generar confusiones cuando se enseña (Murcia, & Henao, 2015). Esta claridad requiere de una planificación de la clase o de la unidad didáctica a partir de las hipótesis y expectativas que tenga el docente acerca de las actuaciones de sus estudiantes. En este sentido, desde la postura de Gómez (2007, p. 30) el análisis didáctico en las matemáticas escolares "representa la visión ideal" para que el profesor diseñe, lleve a la práctica y evalúe las actividades propias de la enseñanza y del aprendizaje.

Para iniciar el ciclo del análisis didáctico, el profesor debe determinar la comprensión de los conocimientos previos que los estudiantes necesitan para aprender un nuevo tema; igualmente, debe determinar los contenidos y los objetivos de aprendizaje. El análisis didáctico se conforma por cuatro análisis relacionados entre sí: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. La noción de contenido en el análisis didáctico se refiere a "las posibilidades de interpretación que pueden darse para los contenidos del programa en términos del conocimiento matemático escolar" (Gómez, 2007, p. 38).

Los conocimientos necesarios para el profesor sobre los diferentes significados de los temas se encuentran en la literatura y son el referente para que el maestro planifique el contenido que va a enseñar en una clase o en una unidad didáctica, de acuerdo al contexto institucional. En otras palabras, el propósito del análisis de contenido en la planificación de las matemáticas escolares es que el maestro haga una organización conceptual de los significados diversos propios del concepto matemático que va a enseñar, para luego hacer una delimitación de los significados que considere pertinentes para diseñar las tareas durante el análisis de instrucción.

En palabras de Sepúlveda-Delgado (2015) esta faceta desde lo epistémico hace referencia a los conocimientos matemáticos del profesor sobre el contenido matemático, como objeto instruccional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. Para lograr dicho objetivo del análisis de contenido el maestro organiza los significados del concepto matemático mediante tres herramientas conceptuales y metodológicas: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología.

A continuación se presentan los significados del concepto de área a partir de la información hallada y que se organizan mediante las tres herramientas del análisis de contenido.

2.3 Estructura conceptual

La información proveniente de diferentes textos de matemáticas escolares a nivel universitario permite organizar la estructura conceptual del área de la siguiente manera:

Definición como función de conjunto

Apostol (1984), presenta el concepto de área como función de conjunto como sigue:

> (…) cuando asignamos un área a una región plana, asociamos un número a un conjunto S del plano. Desde el punto de vista puramente matemático, esto significa que se tiene una función a (función área) que asigna un número real a(S) (el área de S) a cada conjunto S de una cierta colección de conjuntos dada. Una función de esta naturaleza, cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama función de conjunto. El problema básico es este: Dado un conjunto plano S, ¿qué área asignaremos a S? (p. 71).

El método que plantea Apostol (1984), para dar respuesta al interrogante anterior consiste en definir las propiedades del área como axiomas, de esta manera “cualquier conjunto que satisfaga esos axiomas se llamará función de área” (p. 71).

Definición axiomática del área

Supongamos que existe una clase *M* del conjunto del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es *M* con las propiedades siguientes:

i) Propiedad de no negatividad.

Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S) \geq 0$.

ii) Propiedad aditiva.

Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a M, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene:

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

iii) Propiedad de la diferencia.

Si S y T pertenecen a M, siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ está en M, y se tiene:

$$a(T - S) = a(T) - a(S)$$

iv) Invariancia por congruencia.

Si un conjunto S pertenece a M, y T es congruente a S, también T pertenece a M, y tenemos:

$$a(S) = a(T)$$

v) Elección de escala.

Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces:

$$a(R) = hk$$

vi) Propiedad de exhaución.

Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que $S \subseteq Q \subseteq T$. Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades $a(S) \leq c \leq a(T)$, para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan lo anterior, entonces Q es medible y $a(Q)=c$.

Definición geométrica del área

A pesar del carácter riguroso que se le adjudica a la matemática de la antigua Grecia, las magnitudes tales como el área no eran expresadas mediante un valor numérico, mucho menos se trataba con unidades de medida, por lo tanto:

> (…) no hay números involucrados en el discurso; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter algo lúdico. Esta característica es común a todas las demostraciones de áreas que encontramos en los libros I y II. (Jiménez, 2010, p. 184).

El objeto matemático del área fue estudiado por los antiguos griegos bajo la certeza que ofrece la geometría y las representaciones estrictas de las figuras, mas no tuvieron como propósito formular una definición del área para enfrentarse a los problemas de la cuadratura, puesto que "lo que Euclides y cientos de los mejores matemáticos de las generaciones posteriores hicieron fue emplear propiedades que las figuras sugerían como evidentes, intuitivamente tan evidentes que no podían darse cuenta que las estaban utilizando" (Kline, 1992, p. 126). De acuerdo a Corberán (1996, p. 44) los procedimientos geométricos más frecuentes se realizan por la "comparación directa o indirecta de las superfices". Estos procedimientos proponen actividades que involucran la superposición o un recorte a "trozos" de una o de las dos superficies con el fin de establecer una comparación del área considerada como el "espacio ocupado por una región". Respecto a los procedimientos geométricos, Corberán (1996), argumenta que "facilitan la conservación del área de una superficie y en consecuencia propician un estudio comprensivo de las propiedades del área" (p. 44).

Definición de región poligonal

En los textos escolares de geometría se definen previamente los polígonos para que al momento de presentar el objeto matemático del área el estudiante haya adquirido este conocimiento previo. De manera general, se encontró que se define previamente la región triangular como "el conjunto de puntos que resultan de unir un triángulo y su interior" (Barnett, & Uribe, 1990, p. 381), también como "la unión de un triángulo y sus puntos interiores" (Londoño, 2006, p. 352).

Posteriormente, los autores coinciden en definir la región poligonal. Para Barnett y Uribe, (1990, p. 381) es "la unión de un número finito de regiones triangulares en un plano y tales que si dos de ellas se cortan, entonces lo hacen en un punto o un segmento", en palabras de Londoño, (2006, p. 352) corresponde a "la unión de un polígono y sus puntos interiores. Una región poligonal podemos dividirla en un número finito de regiones triangulares de tal manera que la intersección (si existe) entre dos cualesquiera de ellas sea un punto o un segmento". A nivel universitario, en el libro de Cálculo y geometría analítica de Larson, Hostetler y Edwards (s.f, p. 293) los autores dedican la sección 4.2 del capítulo 4 llamado Integración para definir el área antes de examinar el estudio de los procesos relacionados con la integral. Para determinar el área de un triángulo, se forma un rectángulo de área doble, de esta manera se define el área a partir del área de la región triangular, puesto que "una vez que sabemos hallar el área de un triángulo, el área de los polígonos se calcula dividiéndolos en triángulos" (p. 293). Se deduce que a pesar del tratamiento dado al área, los autores no proporcionan una definición propia de región poligonal.

La definición del objeto matemático del área dada por Londoño (2006, p. 353) es la siguiente: "Las superficies planas tienen una extensión, y la medida de la extensión es un número real que se llama área de la región plana", mientras que se llama área de una figura a "la medida de la superficie ocupada por dicha figura" en el texto de Barnett y Uribe (1990, p. 380). Se observa que en la definición anterior se le asigna un valor numérico al área para que adquiera las características propias de una magnitud que se puede medir.

Definición del área por recubrimiento

En la mayoría de los textos escolares estudiados, se asigna una unidad de medida de áreas de regiones poligonales, denominada cuadrado unitario o unidad cuadrada denotada U^2. En el texto escolar de Escobar (s.f, p. 260) se define el área correspondiente a un cuadrado cuyo lado tiene por medida uno, se le llama área unitaria y por tanto su área mide uno". En el caso de Barnett y Uribe (1990, p. 381) se propone la siguiente actividad: dibujar en una hoja de papel tres regiones y contar la cantidad de cuadritos en cada una, resultando así el área de cada figura. Cada cuadrito lo denomina "cuadrado unitario o unidad cuadrada" (p. 382). La medición del área de una región según Londoño (2006, p. 353) requiere la selección arbitraria de una "unidad de área":

> (…) la unidad de área está relacionada con la unidad de distancia por conveniencia. Así, si la distancia está en centímetros, el área se medirá en centímetros cuadrados; si la distancia está en metros, el área se medirá en metros cuadrados, y en general para cualquier unidad (U) de distancia, el área se medirá en la correspondiente unidad cuadrada (U^2). La unidad de área es entonces la región del plano limitado por un cuadrado cuyo lado mide U. (Londoño, 2006, p. 353).

Definición del área como magnitud

El área es considerada como magnitud ya que es una propiedad que se puede medir. Si se compara el área con la longitud, la magnitud área es más variada y compleja puesto que es un objeto bidimensional en el sentido fenomenológico (Freudenthal, 1983, p. 373). En este sentido, el área corresponde a la medida de la cantidad de la superficie, por lo que el área es un número relacionado con una unidad de medida, es por ello que la expresión calcular el área de la superficie resulta más adecuada.

En el Sistema Internacional se definen las unidades estándares para las magnitudes, esto permite que los resultados de las mediciones sean comprendidos a nivel internacional por ser expresados en unidades que las personas ya reconocen, debido a la necesidad de tener un referente estándar de medición que pueda ser usado en los problemas que se deben solucionar. La manera estándar de expresar mediciones facilita la comunicación de una medida de manera precisa para que otra persona comprenda el resultado de la medición. En el sistema métrico es común que se definan los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado. Se ha encontrado también que en los libros de texto escolares es común que $1cm^2$ se represente como un cuadrado de lado 1 cm, lo que conlleva a asociar el área con una forma geométrica específica de una superficie. De acuerdo a Corberán (s.f, p. 12) esta representación ocasiona que los estudiantes entiendan de manera equivocada que $1/2cm^2$ se representa con un cuadrado cuyo lado mide 1⁄2 cm, dando lugar a la creencia de que la razón entre las dimensiones lineales de dos superficies y la razón entre sus áreas serán iguales. De manera equivalente se representa la definición para $1m^2$. Por ello, esta manera en que el profesor normalmente define $1m^2$ resulta inconveniente, sin una planeación asertiva que evite posibles concepciones erróneas en los estudiantes a la hora de institucionalizar el concepto.

Definición del área como fórmula

En los textos escolares de geometría euclidiana se definen fórmulas para diferentes polígonos tales como los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos regulares y finalmente de las regiones circulares. En el libro de Larson, Hostetler y Edwards, (s.f, p. 293) los autores explican que en geometría euclidiana se defienen las fórmulas de las regiones poligonales a partir de la definición del área de un rectángulo, por ser "la región plana más simple". Se considera también la manera apropiada de expresarlo, con el hecho de que "aunque suele decirse que la fórmula para el área del rectángulo es A=bh es más apropiado decir que eso es la definición del área del rectángulo". De manera similar Freudenthal (1983, p. 383) hace referencia a la expresión "área = length times width" para "figuras rectilíneas delimitadas" como es el rectángulo, que se puede obtener sin aproximaciones mediante operaciones y la congruencia de triángulos. Lo anterior indica que los autores consideran al rectángulo como la región poligonal a partir de la cual se define el área de las demás regiones. En cuanto a la definición del área mediante fórmulas, Corberán (1996) explica que:

> (…) no podemos olvidar que detrás de una fórmula se esconde la relación entre magnitudes de diferente naturaleza, una bidimensional (el área) y otras unidimensionales (longitudes), idea conceptualmente compleja y difícil de comprender para una mayoría de estudiantes, incluso de secundaria, si no se les ha preparado para ello (p. 50).

Definición del área en el cálculo integral

En el análisis de textos escolares universitarios de cálculo es usual encontrar una relación entre el objeto matemático del área con la definición de la integral. El método de exhaución es propuesto para realizar un cálculo aproximado del área de diferentes superficies planas. Este método es considerado en la investigación de Corberán (1999, p. 52) como una propuesta para introducir los procesos infinitos que puede mejorar la comprensión del cálculo integral y asegura que:

> (…) en definitiva estamos convencidos del interés de este método, por considerarlo un buen método de cálculo, tan bueno como uno desee en cuanto a aproximación se refiere, y porque el método que utiliza para aproximar el área de la superficie dada se basa en un proceso que resulta más natural para los alumnos y por lo tanto más comprensible para ellos. (p. 52).

Larson, Hostetler y Edwards, (s.f, p. 293) definen el cálculo de regiones poligonales a partir del método de exhaución de Arquímedes como "un proceso de límite en el que el área se encierra en polígonos, unos inscritos y otros circunscritos a la región en cuestión".

Algunas de las definiciones del área de una región plana que se encuentra en los libros de cálculo es la siguiente:

En Larson *et al* (s.f, p. 298): Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$

En Stein (1984, p. 260-261): El área es la integral definida de las longitudes de las secciones". En lenguaje práctico, si se saben calcular integrales definidas se saben calcular las áreas.

En Leithold (1998, p. 343): Si f una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de R.

2.4 Sistemas de representación

En el análisis didáctico, los sistemas de representación se refieren a "los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto" y su importancia en el análisis del contenido se debe a que: Organizan los símbolos mediante los cuales se hace presente el concepto, aportan distintos significados para cada concepto y un mismo concepto tiene sistemas de representación complementarios (Gómez, 2007, p. 42).

Para el objeto matemático área se consideran diferentes sistemas de representación, tales como: numérico, verbal, gráfico, simbólico, geométrico y manipulativo.

En el sistema de representación numérico se expresa mediante la suma de áreas de diferentes polígonos y el valor del área como una magnitud medible. En el sistema de representación verbal se manifiesta en los enunciados de los problemas a resolver, la comunicación del algoritmo de la solución, la explicación de los procedimientos para resolverlos y la justificación de los resultados. El sistema de representación gráfico emplea las figuras, las regiones poligonales, las áreas sombreadas, el área por recubrimiento y el plano topográfico de un predio. Las fórmulas que definen las propiedades del área, así como la fórmula para calcular el área de un polígono o de una región circular se tienen en cuenta en el sistema de representación simbólico en el que se utilizan expresiones algebraicas. El sistema de representación geométrico se relaciona con las construcciones auxiliares para resolver un problema, la simetría y la descomposición del polígono.

En el sistema de representación manipulativo se utilizó el Geogebra como herramienta tecnológica. En definitiva, los registros de representación del concepto de área visto desde el propósito de este estudio, como articulación de la resolución de problemas en el contexto de la formación de un topógrafo, se movilizan de lo numérico, a lo algebraico y gráfico, y desde ese punto de vista surge la integral definida como conjunto de áreas casi indivisibles que se aproximan a una curva para dar paso a una representación de tipo analítico con el límite de esas sumas resultando un valor real.

2.5 Fenomenología

En la topografía el concepto de área es de suma importancia cuando se proyecta un terreno sobre un plano horizontal imaginario que corresponde a la superficie media de la Tierra. Para desarrollar un proyecto de urbanismo es primordial que el topógrafo realice un levantamiento planimétrico del predio y a partir del plano resultante el arquitecto elabora el diseño. En este proceso es fundamental tener presente tres tipos de área (Decreto No. 4259, 2007):

i) Área bruta: Es el área total del predio o predios objeto de la licencia de urbanización o sujetos a plan parcial.

ii) Área neta urbanizable: Es el área resultante de descontar del área bruta, las áreas para la localización de la infraestructura para el sistema vial principal y de transporte, las redes primarias de servicios públicos y las áreas de conservación y protección de los recursos naturales y paisajísticos.

iii) Área útil: Es el área resultante de restarle al área neta urbanizable, el área correspondiente a las zonas de cesión obligatoria para vías locales, espacio público y equipamientos propios de la urbanización.

Un objeto al que se asigna un área, debe tener longitud y anchura, que en el sentido fenomenológico debe ser un objeto bi-dimensional (Freudenthal, 1983, p. 373). Sin embargo, la topografía se encarga de la medición de terrenos generalmente irregulares, donde la longitud y la anchura no son eficientes cuando los linderos no son lineales. En consecuencia, algunos métodos que han sido utilizados para realizar el cálculo del área en estos casos son: El planímetro, coordenadas de los vértices, regla trapezoidal, regla de Simpson, líneas de dar y tomar, método de las dobles longitudes. Debido al avance de la tecnología, los métodos anteriores resultan poco convencionales hoy en día, puesto que la estación total es un instrumento óptico tecnológico de medición electrónica, que calcula el área de un terreno directamente cuando se realiza el trabajo de campo.

2.6 Metodología

El análisis didáctico configura los procedimientos del diseño metodológico de la investigación, ya que proporciona los instrumentos para la organización y el análisis de los datos. Con esta información, se hace el análisis cualitativo de los caminos de aprendizaje del análisis cognitivo, para describir cómo los estudiantes articulan la resolución de problemas con el concepto de área en la tarea diseñada durante el análisis de instrucción, según las respuestas en los diferentes instrumentos y procedimientos de evaluación formativa que conforman el análisis de actuación en esta investigación, los protocolos de las entrevistas y la representación en un mapa conceptual que elaboran los estudiantes.

Esta investigación es de tipo cualitativa e interpretativa correspondiente al estudio de caso, que es pertinente para comprender los fenómenos educativos que ocurren en un contexto. La investigación se adelantó en la universidad del Quindío, Armenia, en el programa de tecnología en topografía, debido a que en el microcurrículo de geometría plana se incluye el objeto matemático. La población corresponde a dos grupos de estudiantes del primer semestre, que tienen conocimientos previos del área adquiridos en su formación en básica secundaria. El proceso de investigación del estudio de casos se desarrolló mediante las cinco fases, de acuerdo a la propuesta de Montero y León, citada por Bisquerra (2009, p. 315): Selección y definición del caso, la elaboración de una lista de preguntas, la localización de las fuentes de datos, el análisis e interpretación, la elaboración del informe.

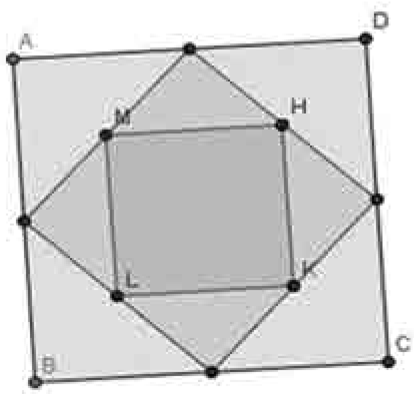
3. Resultados y discusión

En esta etapa de la investigación se ha seleccionado y analizado la tarea de diagnóstico denominada: El Jardín, considerando el análisis de contenido en el que se organizan los diferentes significados del objeto matemático, mediante los tres organizadores del currículo, involucrados en una situación problema del área en el contexto topográfico. Luego, se realiza el análisis cognitivo para prever las posibles actuaciones de los estudiantes mediante los caminos de aprendizaje que se activan cuando se enfrenten a la tarea y contribuyen al desarrollo de ciertas competencias matemáticas; esto ya que, según García-Quiroga, Coronado y Giraldo-Ospina, (2017), las competencias se han consolidado como un importante organizador curricular que debe estudiarse a profundidad. Estos caminos representan las expectativas del maestro frente al ideal de razonamiento de los estudiantes.

En otras palabras, mediante el análisis de contenido del área y el análisis cognitivo que son previamente establecidos, se selecciona y analiza la tarea del objeto matemático durante el análisis de instrucción. Es así como se diseña una tarea que sea significativa para los estudiantes de acuerdo con el contexto universitario, en la que apliquen los conocimientos previos necesarios y que represente un desafío al resolverla, puesto que el sistema de representación gráfico presenta ausencia de valores numéricos o medidas, lo que implica que el estudiante tenga una visión más abstracta que realizar un algoritmo.

La tarea de diagnóstico consiste en una situación problema cuya figura es una adaptación de Freudenthal (1983, p. 382):

En el primer piso de un centro comercial se quiere realizar el diseño de la figura para ubicar un jardín. Se conoce que $m(\overline{AB}) = x$, además los vértices de los cuadrados son los puntos medios de cada segmento. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado ABCD y el área del cuadrado HKLM que el topógrafo de la obra necesita para localizar el jardín?.



Adaptación de la figura
(Freudenthal, 1983, p. 382)

Figura 1. Tarea diagnóstica El Jardín.

En lo que tiene que ver con el análisis de contenido, el área en la solución de la tarea no será expresada mediante un valor numérico ni con unidades de medida, el propósito es establecer una comparación del área de las dos superficies cuadradas por medio de la razón entre ellas. A continuación se muestra la solución de la tarea para lo cual se tiene en cuenta la definición geométrica del área.

Inicialmente, se nombran los puntos de la figura que no tienen notación, mediante una letra mayúscula diferente a las que ya aparecen. Así, el punto medio de $\overline{AD}$ es P, el punto medio de ($\overline{CD}$) es Q, el punto medio de $\overline{BC}$ es R, el punto medio de $\overline{AB}$ es S.

Luego, se establece que la medida de los segmentos formados por los puntos medios del cuadrado ABCD equivale a $x/_2$.

Después se calcula la medida de uno de los lados del cuadrado PQRS, mediante el teorema de Pitágoras puesto que son triángulos rectángulos, en el ΔAPS:

$$\overline{PS}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AS}^2$$

$$\overline{PS}^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\overline{PS}^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}$$

$$\overline{PS}^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{\overline{PS}^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2}}$$

$$\overline{PS} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Teniendo en cuenta que los vértices del cuadrado HKLM son puntos medios, entonces:

$$\overline{MP} = \overline{HP} = \frac{\overline{PS}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}x$$

Ahora se halla la medida de uno de los lados del cuadrado HKLM, mediante el teorema de Pitágoras, en el ΔHMP:

$$\overline{HM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{HP}^2$$

$$\overline{HM}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2$$

$$\overline{HM}^2 = \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8}$$

$$\overline{HM}^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\sqrt{\overline{HM}^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}}$$

$$\overline{HM} = \frac{x}{2}$$

Puesto que se conoce que el área de un cuadrado es igual a la medida del lado elevada a la dos, es decir $A = l^2$, entonces se calcula el área del jardín representada por el cuadrado ABCD y el cuadrado HKLM, como sigue:

$$A_{ABCD} = x^2$$

$$A_{HKLM} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

Finalmente, el resultado de la razón entre el área de las dos superficies cuadradas que representan el jardín es el siguiente:

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{HKLM}} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{4}} = 4$$

En cuanto a los sistemas de representación, en la tarea se involucran varios de ellos de tal manera que: El sistema de representación verbal está presente en el enunciado del problema, la representación gráfica usa la figura correspondiente a una adaptación de Freudenthal (1983, p. 382), en el simbólico se utiliza la expresión algebraica asignada a la longitud del segmento y la fórmula del área de un cuadrado, el geométrico se relaciona con el punto medio, el numérico se expresa mediante la razón entre las dos áreas de las superficies. La actuación que se espera de los estudiantes es que movilicen diferentes registros de representación.

Así también, se evidencian las transformaciones entre las representaciones del objeto matemático área en la tarea: el tratamiento de las expresiones simbólicas cuando se calcula el área de las superficies, el tratamiento visual de la representación gráfica al momento de reconfigurarla y reorganizarla, el tratamiento discursivo de las propiedades del punto medio y el teorema de Pitágoras. Por otra parte, como conversión cuando cambia de un sistema de representación a otro, lo que indica un mayor dominio del objeto matemático por parte del estudiante cuando se enfrenta a resolver el problema de la tarea, por ejemplo: movilizar del sistema de representación gráfico al simbólico.

La fenomenología del objeto matemático le da el sentido bi-dimensional caracterizado en el área de un jardín con un contexto topográfico, un aspecto propio de la didáctica del pensamiento espacial y de los sistemas geométricos, ya que se plantea el problema como una situación que posiblemente se presente en el campo laboral. Es así como la selección de la tarea da respuesta a la articulación entre la resolución de problemas y el aprendizaje del concepto de área en un contexto topográfico universitario desde la postura teórica del análisis didáctico.

4. Conclusiones

En esta fase de la investigación se usó la información que resulta del análisis de contenido para dar inicio al análisis didáctico del área en un contexto topográfico.

En el proceso de planificación de la enseñanza que realiza el maestro de un tema específico propio de las matemáticas escolares, está implícito el diseño de las tareas que serán propuestas a los estudiantes. Desde cierto punto de vista, el diseño de las tareas matemáticas podría parecer algo rutinario, a lo que el maestro está acostumbrado; sin embargo, requiere de ciertas demandas para que el objetivo de aprendizaje que se visualiza sea alcanzado por los estudiantes.

Antes que el maestro logre diseñar las tareas que va a proponer en el aula para que sean resueltas por los estudiantes, debería establecer el objetivo de aprendizaje que va a contribuir a una serie de competencias y en el desarrollo de la tarea intervendrán un conjunto de acciones tanto del maestro como de los estudiantes. En este sentido, la planificación del profesor le permite anticipar las posibles actuaciones de los estudiantes y los caminos de aprendizaje que se activarán cuando se enfrenten a la tarea.

En el marco teórico del análisis didáctico, las actuaciones del maestro se ven reflejadas en el análisis de contenido del objeto matemático y en el análisis de instrucción porque son propios de su quehacer y además le permitirán diseñar las tareas de acuerdo a los organizadores del currículo, para hacer una planeación de las matemáticas escolares que serán enseñadas al implementar una unidad didáctica en el aula.

Agradecimientos

Este artículo surge de un Trabajo de Grado de Maestría en Ciencias de la Educación, desarrollado en el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad del Quindío, GEMAUQ.

Referencias

Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7* (1), 77-92. doi: http://dx.doi.org/10.19053/20278306.v7.n1.2016.5602

Álvarez, Y., & Ruiz, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía, 31* (89), 225-249.

Apostol, T. M. (1984). Los conceptos del cálculo integral. *En Cálculo de funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal, I*, 59-104. Barcelona: Reverté.

Barnett, R., & Uribe, J. (1990). Áreas. *En Álgebra y geometría 2,* 379-408. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla, S.A.

Burbano-Pantoja, V. M. A., Valdivieso-Miranda, M. A., & Aldana-Bermúdez, E. (2017) Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7* (2), 269-285. doi: https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n2.2017.6070

Camacho, M., Depool, R., & Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos: Un estudio de casos. *Educación matemática, 20* (3), 33-57. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000300003&lng=es&tlng=es.

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (32), 4-8. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es.

Castro de Bustamante, J. (2007). La investigación en educación matemática: una hipótesis de trabajo. *Educere, 11* (38), 519-531.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* (Tesis de doctorado). España: Universidad de Valencia.

Corberán, R. (s.f). *El área: Recursos didácticos para su aprendizaje en primaria*. Recuperado de: http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime, 10* (1), 39-68.

Decreto No. 4259. Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial. Bogotá, D.C, Colombia. 2 de Noviembre de 2007. Recuperado de: http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=27335

Escobar, J. (s.f.). *Elementos de geometría* 259-290. Universidad de Antioquia.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

García-Quiroga, B., Coronado, A., & Giraldo-Ospina, A. (2017). Implementación de un modelo teórico a Priori de competencia matemática asociado al aprendizaje de un objeto matemático. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7* (2), 301-315. doi: https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n2.2017.6072

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA, 7* (3), 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada.

Hernández-Suárez, C., Prada-Núñez, R., & Gamboa-Suárez, A. (2017). Conocimiento y uso del lenguaje matemático en la formación inicial de docentes en matemáticas. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7* (2), 287-299. doi: https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n2.2017.6071

Jiménez, D. (2010). El problema del área en los Elementos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XVII* (2), 179-207.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (s.f.). *Cálculo y geometría analítica* Sexta ed., I, 291-314. Madrid: McGrawHill.

Leithold, L. (1998). *El cálculo* Séptima ed., 343. México: Oxford University Press.

Londoño, J. R. (2006). *Geometría Euclidiana*, 351-383. Medellín, Colombia: Ude@.

Murcia, M. E., & Henao, J. C. (2015). Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Entre Ciencia e Ingeniería, 9* (18), 23-30. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1909-83672015000200004&lng=es&tlng=es.

Pérez, F. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable,* 386-517. Granada: Universidad de Granada.

Sepúlveda-Delgado, O. (2015). Estudio del conocimiento didáctico - matemático del profesor universitario: un marco teórico de investigación. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 6* (1), 29-43. doi: http://doi.org/10.19053/20278306.4048

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal* 345-346. Barcelona: Reverté.

Stein, S. (1984). *Cálculo y geometría analítica* Tercera ed., 261. México: McGrawHill.