



Lida Esperanza Riscanevo Espitia

Magister en Educación
Profesora Universidad
Pedagógica y Tecnológica de
Colombia
lida.riscanevo@uptc.edu.co

Kelly Johanna Cristancho Cruz

Licenciada en Matemáticas
Estudiante Maestría en
Educación – UPTC
Kellys715@hotmail.com

Claudia Patricia Fonseca Ochoa

Licenciada en Matemáticas
Estudiante Maestría en
Educación – UPTC
Klaf8a@gmail.com

Artículo de Investigación

Recibido: 21 de abril de 2011
Aprobado: 15 de Julio de 2011

Praxis
&
Saber

Revista de Investigación y Pedagogía
Maestría en Educación. Uptc

INFLUENCIAS DEL
CONTRATO DIDÁCTICO
EN EL APRENDIZAJE DEL
CONCEPTO DE FUNCIÓN

INFLUÊNCIAS DO CONTRATO
DIDÁTICO NA APRENDIZAGEM
DO CONCEITO DE FUNÇÃO

DES INFLUENCES DU
CONTRAT DIDACTIQUE DANS
L'APPRENTISSAGE DU
CONCEPT DE FONCTION

INFLUENCE OF THE DIDACTIC
CONTRACT IN LEARNING THE
CONCEPT OF FUNCTION

Resumen

El artículo es producto de un proyecto de investigación en curso sobre las influencias del *contrato didáctico* en el aprendizaje de las matemáticas, y específicamente del concepto de *función*. El proyecto partió de la preocupación por el típico fracaso colectivo o el bajo rendimiento de los estudiantes en la clase de matemáticas, y por la importancia del concepto de *función* en la enseñanza obligatoria de la educación media y superior. Se identifican obstáculos didácticos y epistemológicos relevantes para el aprendizaje, con el objetivo de evaluar mejor las posibles dificultades intelectuales, heredadas y no heredadas, desde el estudio de su génesis y evolución histórica, y las concepciones que portan los maestros e inducen la presentación del concepto a raíz de adaptaciones hechas por la introducción de objetos didácticos, que permiten trasponer este saber matemático en un saber escolar. Algunos obstáculos se encuentran presentes en las cláusulas implícitas del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto, manifestándose en los estudiantes a la hora de mostrar lo que conocen del tema.

Palabras clave: Matemáticas, enseñanza, aprendizaje, contrato didáctico, transposición didáctica, función matemática.

Resumo

O artigo, resultado de um projeto de pesquisa em andamento apresenta uma aproximação à caracterização das influências do contrato didático na aprendizagem da matemática e especificamente no conceito de função; baseadas na preocupação do típico fracasso escolar na matemática e na importância do conceito de função no ensino médio e superior. Identificam-se obstáculos didáticos e epistemológicos marcantes que dificultam a aprendizagem, com o intuito de avaliar melhor as possíveis dificuldades intelectuais, herdadas e não herdadas desde o estudo da sua gênese e evolução histórica, e das concepções que têm os professores, e a sua incidência nas salas de aula na apresentação dos conceitos na transposição didática do saber matemático acadêmico que o converte em saber escolar. Alguns obstáculos encontram-se nas cláusulas implícitas do contrato didático e que são observadas nos alunos quando eles referem-se ao tema.

Palavras Chave. Matemática, ensino, aprendizagem, contrato didático, obstáculo, transposição didática, função.

Résumé

L'article est le produit d'un projet de recherche en développement, sur les influences du *contrat didactique* dans l'apprentissage des mathématiques, et spécifiquement du concept de *fonction*. Le projet a eu comme point de départ le souci pour le typique échec collectif ou le bas rendement des étudiants dans le cours de mathématiques, et pour l'importance du concept de *fonction* dans l'enseignement obligatoire de l'éducation secondaire et supérieure. On identifie des obstacles didactiques et épistémologiques pertinents pour l'apprentissage, avec l'objectif de mieux évaluer les possibles difficultés intellectuelles, héritées et non héritées, depuis l'étude de leur genèse et leur évolution historique, et les conceptions qui portent les professeurs et induisent la présentation du concept à partir des adaptations faites par l'introduction des objets didactiques, qui permettent la transposition de ce savoir mathématique dans un savoir scolaire. Quelques obstacles se trouvent dans les clauses implicites du contrat didactique dans l'apprentissage du concept, en se manifestant chez les étudiants au moment de montrer ce qu'ils savent du sujet.

Mots clés: Mathématiques, enseignement, apprentissage, contrat didactique, transposition didactique, fonction mathématique.

Abstract

This article is the product of an on-going research project about the influences of the *didactic contract* in the learning of mathematics, and especially regarding the concept of *function*. This project emerged from preoccupation with the typical collective failure or low academic performance of students in mathematics class, and from the importance of the concept of function in the compulsory teaching of high school and undergraduate university level. We identified didactic and epistemological learning obstacles with the objective of achieving a clearer evaluation of possible hereditary and non-hereditary intellectual difficulties, based

on the study of their genesis and historical evolution, as well as of the conceptions held by teachers who induced the presentation of this concept; this based on the adaptations made by the introduction of didactic objects, which permitted the transposition of this mathematical object of knowledge into a school object of knowledge. Some obstacles were found to be present in the implicit clauses of the didactic contract in the learning of the concept, which manifest themselves in students at the moment of demonstrating what they know about the topic.

Key words: mathematics, teaching, learning, didactic contract, didactic transposition, mathematical function.

Introducción

En el aula de clase existen reglas, o acuerdos, que generalmente se dan a conocer desde la primera clase y que deben cumplir estudiantes y profesores, con el fin de que haya un buen ambiente de trabajo y comunicación; dichas reglas se refieren a los compromisos que adquieren los estudiantes en el momento de firmar una matrícula, que van desde lo disciplinario hasta lo académico, mediados por los acuerdos establecidos con el profesor en la clase; sin embargo, existen reglas o creencias que no se hacen explícitas en el aula de clase, relacionadas con lo que el profesor espera de sus estudiantes, y viceversa, y pueden influir de forma positiva o negativa en el desarrollo académico de los estudiantes. Entonces, las reglas dentro del contrato didáctico se clasifican en explícitas e implícitas, que sirven como oportunidad para regular la actuación de los protagonistas de la clase.

En el área de matemáticas, a nivel cognitivo la tarea escolar no resulta simple para el estudiante y el docente; esto es evidente en la práctica docente personal, donde por lo general el rendimiento académico de los estudiantes es bajo (Estadísticas Uptc, Sistema STADIES); esto sucede, tal vez, porque en esta clase se generan reglas implícitas que influyen en el desarrollo de la práctica matemática. Un ejemplo significativo de esto se encuentra en el trabajo de investigación de Crisancho y Fonseca (2008, p. 35), donde los estudiantes de educación superior consideran que el éxito de su aprendizaje en matemáticas depende totalmente del papel que el profesor desempeñe en clase, de la metodología que utilice y de su nivel de exigencia. En este sentido, la situación es paradójica, pues el profesor cree lo contrario: reconoce el papel que él

desempeña en el aula de clase, que es el de guiar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, pero considera que la mayor parte del trabajo le corresponde al estudiante, en especial la preparación fuera del aula.

La investigación en curso que se reporta en este artículo tiene como objetivo identificar las influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función, y se basa en la preocupación por el típico fracaso escolar o bajo rendimiento de los estudiantes en la clase de matemáticas -que en muchos casos la cursan y superan de forma superficial- y en la importancia del concepto de función en la enseñanza obligatoria de la educación media y superior, como fundamento para dar correcto tratamiento a una alta gama de información de fenómenos de cambio, ofrecida en la actualidad, especialmente, por los medios de comunicación en campos como la ingeniería, la economía y hasta la política.

En primera instancia, se describe la problemática, donde se evidencia el uso del contrato didáctico como herramienta principal para identificar obstáculos de tipo didáctico o epistemológico en los estudiantes, como posibles causas del bajo rendimiento escolar en la clase de matemáticas. En segundo lugar, se presenta una vista general del marco teórico que orienta la investigación al reconocimiento de interacciones entre el docente, el estudiante y el saber que se vive en una situación de la clase, para facilitar la explicitación de cláusulas implícitas del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. Por último, se presenta el análisis de algunos resultados de la información recolectada hasta el momento, para que se tenga en cuenta como un mecanismo para mejorar el aprendizaje, invitando al profesor y al estudiante a la reflexión permanente al respecto.

Descripción del problema

El aprendizaje se constituye principalmente por la comprensión y aprehensión del contenido de un determinado tema. En el proceso de aprendizaje en el área de matemáticas se presentan diversas problemáticas para la comprensión de ciertos contenidos; un ejemplo notorio es el concepto de *función*, básico en el desarrollo del cálculo, que gracias a su amplia gama de aplicaciones permitió extender la matemática a campos como la física, la ingeniería, la química y la economía, entre otras. La *función* es un instrumento que admite modelar y solucionar diferentes situaciones del mundo real.

Dentro de las problemáticas que enfrenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de función se encuentra que, comúnmente, se enseña desde un instrumentalismo –tablas, gráficas y esquemas algebraicos y verbales que vienen sugeridos desde los textos guía– y con formas de enseñanza particulares que pueden ocasionar que el docente, al hacer uso de dichos instrumentos en forma algorítmica, convierta el aprendizaje del concepto en un proceso mecánico en donde no se garantiza que el estudiante comprenda su sentido¹.

Generalmente, cuando se introduce el concepto de función en un curso se da a conocer desde una perspectiva intuitiva –diagramas de flechas–, tal vez por ser una de las formas más sencillas a la hora de relacionarse con el concepto; sin embargo, muchas veces el aprendizaje del concepto se queda ahí, limitado, y, como ya se mencionó, enseñado desde un instrumentalismo –seguimiento algorítmico del concepto– como si se tratara de un conocimiento estático e inmutable, sin tener en cuenta lo exigido por los lineamientos básicos del currículo, según los cuales lo ideal es que los estudiantes logren un análisis riguroso del concepto, es decir, que alcancen la capacidad de modelar situaciones de cambio del mundo actual a través de las funciones.

Es importante tener en cuenta que el concepto de función tiene una historia, que no es estático, que le llevó a la humanidad muchos siglos lograr su desarrollo, en un proceso en el que se consolidaron distintas formas de representación e interpretación; es por esto que el docente debe conocer cómo dicho concepto se ha ido formando, hasta llegar a nuestros días, para tener una idea de los obstáculos que puede encontrar en sus estudiantes. Según Azcárate y Deulofeu:

El conocimiento histórico del concepto le permitirá al docente adquirir una visión mucho más amplia que la obtenida a través del estudio de las teorías modernas o de las últimas definiciones, a las cuales se ha llegado después de un largo camino y cuya simple reproducción en niveles inferiores suele conducir a graves errores epistemológicos y didácticos (1996, p. 15).

¹ Una función es una relación donde una cantidad depende de otra; por ejemplo, la función que indica la relación existente entre el peso de las manzanas y el precio que hay que pagar por ellas; suponiendo que el kilo de manzanas cuesta 1000 pesos, algebraicamente esto sería $P(x)=1000x$, donde x representa el número de kilos, y se denomina variable independiente.

Estos obstáculos pueden estar relacionados con la metodología utilizada por el docente a la hora de dar a conocer el concepto –denominados obstáculos didácticos– o con la naturaleza del mismo concepto –denominados obstáculos epistemológicos, heredados de la historia, heredados de la historia. En consecuencia, surgió la necesidad de identificar obstáculos de tipo didáctico y epistemológico que influyen en el aprendizaje del concepto de función, a partir de cláusulas explícitas e implícitas del contrato didáctico, entendido como “un conjunto de reglas con verdaderas y propias cláusulas que organizan las relaciones entre el contenido enseñado (en este caso el concepto de función), los estudiantes, el maestro y las expectativas al interior del grupo en las clases de matemáticas” (D’Amore, 2006, p. 129). De esta forma, la investigación se centra en la pregunta: ¿Cuáles son las cláusulas explícitas e implícitas del contrato didáctico que intervienen en el aprendizaje del concepto de función?

Algunos elementos teóricos

En el aula de clase se conocen ciertas reglas que deben ser cumplidas cabalmente por estudiantes y profesores, con el fin de llevar orden y disciplina en el proceso de enseñanza, y garantizar así un buen desempeño; algunas de estas reglas son la puntualidad, cumplir con trabajos y tareas a tiempo, asistir a pruebas de evaluación y responder las preguntas del profesor, entre otras, reglas que se pueden clasificar como cláusulas explícitas del contrato didáctico, es decir, acuerdos que el estudiante tiene con el profesor y viceversa, que generalmente son dados a conocer desde el comienzo de determinado curso, e incluso en el momento de la matrícula, en cumplimiento del manual de funciones o reglamento. Pero existen acuerdos que no son expresados formalmente, que prevén lo que el profesor espera y exige, y lo que los estudiantes también esperan y exigen de él, es decir, que el estudiante crea ideas en su mente de ciertas normas que debe cumplir, que están de manera implícita en el aula de clase, creando así cláusulas del contrato didáctico desconocidas por parte y parte. Por ejemplo, un profesor de matemáticas plantea y explica actividades de un tema a sus estudiantes; observa que desarrollan correctamente dichas actividades, y cree haber culminado con éxito el tema; sin embargo, el estudiante sigue solo un algoritmo para resolver cualquier problema presentado en clase, es decir, ya construyó en su mente una forma de dar solución rápida a cualquier problema. Aunque pocas

veces ocurre, ese contrato puede romperse; por ejemplo, supongamos que a 10 minutos de terminar la clase, el profesor da a sus estudiantes un problema evaluable, que rompe con los esquemas que el estudiante había creado, pues implícitamente la evaluación tiene un momento específico y determinado con anterioridad; el estudiante se encuentra con la sorpresa de que no sabe resolver el problema, y, sobre todo, que no esperaba que eso ocurriera, entonces se revela, argumentando que no se siente preparado; además, es sorpresa también para el profesor, quien estimaba que su intervención en el tema había sido suficiente (Cristancho y Fonseca, 2008, p. 2). En palabras de D'Amore:

Se ve cómo el mundo de la resolución de problemas se halla cubierto tanto de cláusulas explícitas de los contratos didácticos (las normas y las solicitudes), como de cláusulas implícitas, no dichas por el maestro, sino creadas poco a poco por los estudiantes sobre la base de recurrencias que han llevado a modelos generales de problema, lo que constituye vínculos insuperables (2006, p. 120).

Según Chevillard (1988), el contrato didáctico no es una realidad estable, estática, establecida de una vez por todas; al contrario, se trata de una realidad en evolución, que acompaña a la historia de la clase (p. 14). Siguiendo a D'Amore:

Se puede pensar al contrato didáctico como un conjunto de reglas, con verdaderas y propias cláusulas, la mayoría de las veces no explícitas (muchas veces incluso no realmente existentes, sino creadas por las mentes de los personajes involucrados en la acción didáctica, para volver coherente un modelo de escuela o de vida escolar o de saber) que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los estudiantes, el maestro y las expectativas (generales o específicas), al interior del grupo en las clases de matemáticas (p. 129).

El contrato didáctico sirve como una herramienta en la clase de matemáticas para identificar obstáculos que presenten los estudiantes en el aprendizaje de un determinado concepto, en este caso el concepto de función. La idea de *obstáculo* la estudió por primera vez Guy Brousseau, y luego Perrin-Glorian lo hizo más profundamente. Según Brousseau, un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problema, pero que falla cuando se aplica a otro, es decir, viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Para superar estos obstáculos se necesitan situaciones didácticas específicas, que hagan

que los estudiantes sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones, y así ayudarlos a conseguirlos (D'Amore, 2006, p. 221). Brousseau da las siguientes características de los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El estudiante utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente.
- El estudiante resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento más coherente. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Incluso una vez superado, esporádicamente el obstáculo reaparece (1998, p. 123).

Se pueden distinguir tres tipos de obstáculos:

Obstáculos ontogenéticos: llamados también obstáculos psicogenéticos, son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su desarrollo; él desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.

Obstáculos didácticos: son los que dependen de una elección o de un proyecto del sistema educativo, es decir, resultan de las elecciones didácticas hechas por el profesor, por el currículo o, incluso, por el sistema educativo, para establecer la situación de enseñanza.

Obstáculos epistemológicos: históricamente, el concepto de obstáculo epistemológico nace del seno de la propia matemática, es decir, “Tiene una presunta naturaleza epistémica intrínseca” (Radford, Bagni y D'Amore, 2007, p. 11). Actualmente, con el agotamiento de una forma de pensar totalmente racionalista-utilitarista y con el surgimiento de un nuevo humanismo, en la tendencia posmoderna, se considera que el conocimiento está definitivamente imbricado en su contexto cultural. “El obstáculo epistemológico no sólo resulta fuertemente vinculado a factores conceptuales, sino a factores sociales, en los cuales la historia –pura– de la matemática entra en contacto con las historias de las prácticas humanas”

(Radford *et al.* 2007). En el mismo sentido, se destaca que “La matemática, tal como toda construcción humana, depende del conjunto de condiciones sociales en que es producida” (Ponte, Boavida, Craça y Abrantes, 1997, p. 13). Sin embargo, la tendencia es relacionar el obstáculo con la naturaleza del mismo concepto; en el caso del estudio del concepto de función, su definición se presenta compleja, debido a la relación de sus símbolos y representaciones.

Con el uso de conjuntos finitos, un estudiante comprende fácilmente la correspondencia unívoca que debe existir entre los elementos del dominio y codominio, pero cuando se enfrenta a conjuntos infinitos –noción considerada históricamente un obstáculo– donde la correspondencia ya no es tan evidente, debe realizar un análisis profundo de la situación, donde cambia totalmente la simbología; entonces, en la mayoría de los casos se tiende únicamente a dar valores a “X” para obtener los de “Y”, construir tablas, calcular dominios y representar funciones gráficamente, lo cual se convierte en un proceso algorítmico para su desarrollo, y cuando se enfrenta a puntos que no existen tiende a seguir el mismo algoritmo sin hacer un previo análisis de si se trata de una función definida o no definida según el conjunto de salida o llegada. En consecuencia, un obstáculo epistemológico se puede definir como “Lo que se sabe, como ya se sabe, y que genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo, que es precisamente lo que constituye el acto de conocer” (R.W. de Camilloni, 1997, p.12).

Brousseau precisó las condiciones que debería satisfacer un conocimiento matemático para ser considerado obstáculo, distinguiéndolo de la dificultad:

- Un obstáculo es un conocimiento.
- Un obstáculo tiene un dominio de “validez”.
- Un obstáculo resiste y reaparece.
- Un obstáculo es constitutivo del saber (citado en Barrantes, 2006, p. 4)

En general, un obstáculo se manifiesta en los errores que se repiten una y otra vez, ya sea en el proceso de enseñanza o en el de aprendizaje, que persisten y, por eso, son reconocibles, así estén implícitos en la clase. Un ejemplo común de estos errores puede ser cuando un estudiante en clase expresa a su profesor que no comprende la explicación del tema, entonces

el docente, en su afán de culminar a tiempo, le repite al estudiante la misma explicación, pero más pausado, pensando que le falta preparación al estudiante; sin embargo, es responsabilidad del docente buscar estrategias para ser comprendido, dedicando tiempo a la preparación de sus clases, pues es ahí donde transforma su conocimiento –saber matemático– en contenido para ser enseñado –saber escolar–, trabajo de adaptación que da lugar a la transposición didáctica.

Intuitivamente, la transposición didáctica puede entenderse como el trabajo de adaptación, de transformación de un objeto de saber en objeto de enseñanza, de acuerdo con el contexto y las finalidades del curso y del profesor. Para Chevallard, la transposición didáctica “Se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado” (citado en D’Amore, 2006, p. 235). Es evidente que la transposición didáctica está influenciada por una serie de factores, entre otros, la propia concepción de la matemática y de su naturaleza, al igual que algún modelo pedagógico en el que el profesor respondería a la pregunta: ¿Bajo qué condiciones es posible la enseñanza y el aprendizaje de la matemática?

D’Amore sintetiza la transposición didáctica diciendo que “Consistiría en extraer un elemento de saber de su contexto (universitario, social...) para recontextualizarlo en el contexto siempre singular, siempre único, de su propia clase” (2006, p. 235); en esto, el docente desempeña un papel fundamental, y para ello se capacita desde los programas de pregrado, posgrado y educación continua, donde adquiere fundamentos teóricos y prácticos para desarrollar su función educadora, productora y transformadora de los contenidos curriculares. Esta formación disciplinar y didáctica debe permitirle saber qué enseñar (de acuerdo con el tiempo y el lugar dados) y cómo hacer que sus estudiantes construyan estos saberes, relacionándolos también con el ambiente cultural y social en el cual se encuentra. Es ahí donde necesita ciertas herramientas y estrategias que lo ayuden a planear bien su labor educativa, de tal forma que los contenidos que vaya a enseñar sean comprensibles con el contexto familiar del estudiante y que estén a su alcance, con el fin de encontrar sentido a lo que se hace. Es así como la transposición didáctica es el proceso por el cual ciertos contenidos, seleccionados como aquellos que se pueden enseñar, son innovados y transformados en contenidos enseñables; para que esto sea posible se tiene en cuenta la simplificación, modificación y reducción

de la complejidad del saber original, transformando el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos.

La transposición es, sin embargo, múltiple: participa de la transformación que las disciplinas y los programas causan al saber, pero sufre también la interpretación y el ejemplo que los maestros dan de una disciplina en su práctica cotidiana (D'Amore, 2006, p. 237). Entonces, la transposición didáctica está implícita en el quehacer diario del docente, dado que siempre va a estar sumergido en una variedad de formas de presentar un saber matemático; por ejemplo, actualmente se encuentra una serie de definiciones del concepto de *función*, de manera que un docente que vaya a tratar este tema debe enfrentarse al problema de cuál de las definiciones –intuitivas o rigurosas– es la más útil y operativa para adaptarla a su grupo de estudiantes –saber por enseñar–, sin dejar de lado que este saber por enseñar se justifica desde una planeación general, dentro del currículo escolar de matemáticas de la enseñanza obligatoria en Colombia (educación media).

En los textos escolares es común observar diferentes maneras de presentar el concepto de *función*; por ejemplo, en algunos inician el capítulo con un ejemplo de modelación, y a continuación, una definición formal; en otros inducen el concepto a partir de expresiones algebraicas y diagramas de flechas, mientras que en algunos simplemente comienzan con una definición seguida de ejemplos, como:

Al referirse a una función se habla de un conjunto de salida –dominio– y otro de llegada –recorrido–, donde a cada elemento del conjunto de salida le corresponde uno y solamente uno del conjunto de llegada; hecho que se evidencia fácilmente en situaciones de la vida cotidiana, como en el movimiento uniforme de velocidad constante v_0 , donde a cada instante t –tiempo– le corresponde una distancia determinada d ; por tanto, t y d son respectivamente las variables independiente y dependiente, por lo que se afirma que la distancia d es función del tiempo t , así pues: $d = v_0 t$.

Uno de los procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de matemáticas es el de la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 2000, p. 104), donde el aprendizaje de procedimientos es visto como “modos de saber hacer”, los cuales facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

El concepto de función es ubicado en una de las categorías del proceso general, denominada “*Los procedimientos analíticos*”, donde se espera que un estudiante que haya superado la educación media esté en la capacidad de modelar e interpretar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas, pues se pretende capacitar a los alumnos para la lectura e interpretación de la gran cantidad de información en el mundo actual, ofrecida principalmente por los medios de comunicación sobre diversos fenómenos de cambio, por ejemplo, la economía.

En los estándares básicos se clasifica el concepto de función dentro del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y desde allí se considera que el desarrollo del pensamiento aleatorio en el estudiante le permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos.

En concordancia con lo anterior, se toma como herramienta el contrato didáctico, para estudiar los obstáculos que presenten los estudiantes en el aprendizaje específico del concepto de función en matemáticas, teniendo en cuenta el proceso de la transposición didáctica en este aprendizaje.

Resultados preliminares

El enfoque de este estudio es cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo, ya que pretende describir con detalle las manifestaciones de los estudiantes y docentes objeto de estudio acerca del concepto de función y de su responsabilidad frente al aprendizaje y enseñanza de él, a partir de las respuestas argumentadas obtenidas con los diferentes instrumentos, con el fin de identificar los obstáculos epistemológicos y didácticos, tanto explícitos como implícitos, que intervienen en el aprendizaje del concepto de función. En consecuencia, se construyeron las siguientes categorías de análisis para el diseño de los primeros instrumentos:

- a. Histórica: para identificar algunos de los obstáculos de tipo epistemológico que se presentaron desde la evolución del concepto. Además sirve para identificar si es tenida en cuenta en la enseñanza de dicho concepto.

- b. Modelación: para determinar su inclusión en el contenido temático del docente, ya que es considerada desde los lineamientos curriculares de matemáticas como un procedimiento analítico para dar solución a situaciones de cambio de la vida cotidiana.
- c. Formas de representación de una función: para identificar si los estudiantes y docentes reconocen y analizan cada una de las representaciones de manera independiente.
- d. Transformación del saber: para analizar la adaptación del concepto de función que hace el docente para convertirlo en saber enseñado.

La primera fase del desarrollo de la investigación consistió en identificar las condiciones iniciales para la construcción del concepto de función, es decir, el análisis específico de su evolución histórica; analizar esta evolución es fundamental para su enseñanza, ya que permite revisar los obstáculos más relevantes que impidieron a la humanidad desarrollar este concepto, con el objeto de evaluar mejor las posibles dificultades intelectuales heredadas y no heredadas de la historia que presenten los estudiantes en su aprendizaje; dichos obstáculos, posiblemente, se encuentran presentes en las cláusulas implícitas del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto, manifestándose en los estudiantes a la hora de mostrar lo que conocen del tema. Una segunda fase de esta investigación consistió en el análisis de las entrevistas hechas a los profesores que dirigen los cuatro cursos de grado once de educación media seleccionados como población, con el fin de conocer cuáles son las estrategias metodológicas que tienen en cuenta a la hora de introducir un concepto matemático, especificando el concepto de función.

Como resultado de la primera fase se presenta una síntesis del análisis de la evolución del concepto de función, clasificada dentro de la categoría de análisis histórica. El origen de este concepto no se presenta de forma única, ni en un momento específico en la historia de las matemáticas, sin embargo, textos de consulta o guía, que los maestros escogen para la enseñanza del concepto, ya portan concepciones didácticas y epistemológicas diferentes e incluso contradictorias, que inducen la presentación del concepto a raíz de adaptaciones hechas por la introducción de objetos didácticos que permitan transponer este saber matemático en un saber escolar. Esta evolución fue clasificada en tres grandes periodos generales: Edad Antigua (sin especificar detalladamente cada aporte significativo de civilizaciones como los babilónicos y griegos), Media (las escuelas de Oxford y París)

y Moderna (representantes como Galileo, Neper, Descartes, Pierre de Fermat, Newton y Leibnitz), (ver tabla “Construcción del concepto de función en la historia”). Para cada uno de los periodos se categorizaron las siguientes variables:

- A. La simbología**, pues es considerada en la historia de la didáctica de la matemática como un obstáculo de tipo epistemológico, que hace que la enseñanza y el aprendizaje de un tema sean más complejos, ya que requiere para su comprensión competencias lectoras y de interpretación en matemáticas que en ocasiones han sido secundarias en la enseñanza de estas.
- B. Formas de representación**, debido a su variedad—tablas, gráficas y expresiones algebraicas— dan lugar a introducir de diversas maneras el concepto de función, y con ello viene la exigencia al profesor en la transformación del conocimiento para darlo a conocer de manera clara, y evitar la presencia de obstáculos de tipo didácticos en el estudiante.
- C. Aplicaciones**, ya que le permitió a la matemática realizar aportes a otras ciencias, como la física, y que además se pueden vincular a la orientación del estudiante de educación media para su vocación profesional, pues el estudiante debe poder describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas, como lo indica el proceso de la modelación (MEN, 2000, p. 76).
- D. Consecuencias**, evidencian en forma más específica la evolución del concepto de función y muestran las temáticas que dieron lugar a la construcción de la matemática, por lo que son más evidentes los obstáculos de tipo epistemológico, como la aparición de la inconmensurabilidad.
- E. Obstáculos**, muestran algunas dificultades a las que humanidad tuvo que enfrentarse en cada época, que posiblemente son heredadas por los estudiantes en la comprensión del concepto de función, que son del interés de la investigación, ya que ayudarán a superar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje.

Como resultado de la segunda fase, producto del análisis de la información obtenida en las entrevistas hechas a los profesores, se determinaron las siguientes cláusulas presentes en el proceso de enseñanza del concepto:

Cláusulas explícitas: los profesores consideran que para que haya un aprendizaje significativo en matemáticas se debe tener en cuenta:

- El profesor debe hacer su clase de forma agradable, haciendo que el tema sea atractivo para el estudiante.
- El estudiante debe tener una disciplina de trabajo, es decir, que esté estudiando constantemente.
- Es fundamental la participación de los estudiantes en las clases, para ello el profesor debe generar un ambiente de confianza, con el fin de que el estudiante pueda expresar las dificultades que encuentra a la hora de adquirir un saber.
- Responsabilidad y cumplimiento en tareas y trabajos.
- Antes de iniciar un tema, el profesor les deja la tarea de consultar sobre este para discutirlo en clase.

Cláusulas implícitas: Se observan ciertos aspectos indicadores de que el profesor muestra preocupación por el aprendizaje de los estudiantes, destacando elementos como:

- Es fundamental explorar ideas previas al iniciar un determinado tema, es decir, hacer un recuento con los estudiantes sobre lo que hayan oído o sepan acerca de este.
- La metodología que utilice el profesor es fundamental, porque según esta el estudiante se adaptará a su forma de trabajo, o, de lo contrario, terminará por aburrirse.
- Si el estudiante no ve para qué le puede servir lo que está aprendiendo, entonces no se interesa por aprender.
- La propia matemática puede generar obstáculos en el aprendizaje de un determinado tema, debido a la complejidad de este; para superar esto, el profesor debe guiar permanentemente al estudiante, mostrarle que una cosa es lo que la intuición dice y otra lo que matemáticamente es correcto, por ejemplo, las paradojas.
- La valoración cuantitativa que se le da al estudiante lo motiva a participar activamente en la clase.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA HISTORIA

Época	Simbología	Formas de representación	Aplicaciones	Consecuencias	Obstáculos
Antigua	Tablas de cómputo de datos. Números naturales. Proposiciones homogéneas.	Anotaciones empíricas en tablillas que representaban observaciones sistemáticas de diversos fenómenos que se repetían periódicamente. Proposiciones homogéneas de la forma $t: t'$.	Astronomía	Desarrollo de métodos cuantitativos que contienen implícitamente funciones tabuladas. Aparición de la inconmensurabilidad- paradoja de Zenón-. Separación entre número y magnitud. Proposiciones formadas estrictamente por razones entre magnitudes.	La falta de una simbología formal. La ausencia del concepto de número racional ocasionó que al trabajar con proporciones no se pudiera distinguir la relación que existe entre magnitudes distintas.
Edad Media	Segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía.	Segmentos rectilíneos en forma perpendicular, una aproximación al plano cartesiano.	Estudio del movimiento a partir de fenómenos de la naturaleza como el calor, la luz, la densidad y la velocidad.	Conceptos ligados al concepto de función como la cantidad variable, la velocidad instantánea o puntual y la aceleración. Funciones trigonométricas. Acercamiento de las matemáticas con las ciencias de la naturaleza.	Se presentó una desproporción entre el nivel de abstracción de las teorías abordadas y la falta de un aparato matemático para su desarrollo. Falta de un simbolismo matemático adecuado.
Edad Moderna	Algebra simbólica e interpretación de signos. Curvas y superficies representadas por ecuaciones. Curvas y superficies representadas en sistemas de coordenadas cartesianas. 1740 se adopta la notación $f(x)$ para denotar una función como ecuación.	Funciones gráficas por sistema de coordenadas. Funciones por medio de ecuaciones.	Estudio del movimiento en forma cuantitativa.	Desarrollo del álgebra simbólica. Se representan curvas y superficies por medio de ecuaciones. Extensión del concepto de número con la configuración de los números reales. Aparición de los números imaginarios. Principios fundamentales del método de las coordenadas. Nacimiento de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal. Aparece el término de función en un manuscrito de Leibnitz de 1673.	El concepto de función es muy general, reducido casi que exclusivamente a funciones analíticas, todas ellas continuas o con un número reducido de discontinuidades.

- El estudiante debe tener disposición para la clase, y si no la tiene es responsabilidad del docente hacer que la adquiera.
- La complejidad de la matemática no es motivo suficiente para que el estudiante presente dificultades en el aprendizaje de un concepto, es el profesor quien la hace ver compleja.
- En la formación matemática, la historia ha sido secundaria, no se considera necesaria en la clase.

Una vez contrastada la información obtenida en este momento de la investigación, se pueden destacar los siguientes obstáculos epistemológicos y didácticos que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función.

Es innegable la falta del uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico por parte del enseñante, aun cuando uno de los problemas más significativos de la historia fue la simbología requerida para el desarrollo del concepto de función. Este obstáculo de tipo epistemológico, que hizo que el desarrollo de la matemática fuera lento, se puede caracterizar como una de las posibles influencias del contrato didáctico por las que atraviesa el aprendizaje del concepto que impide que haya una buena comunicación del saber matemático.

El proceso de adaptación del saber matemático en saber del alumno, que se conoce como transposición didáctica, es más evidente en la variedad de representaciones del concepto de función, que se manifiestan en la elección y adaptación que deben hacer los maestros para enseñarlo y así evitar obstáculos de tipo didáctico y epistemológico en los estudiantes.

Históricamente, la importancia de la matemática se debe a su contribución para solucionar problemas de fenómenos físicos; este hecho lo ratifican los docentes participantes en esta investigación, quienes manifiestan que la aplicación en el área de matemáticas del concepto de función es importante para motivar al estudiante, pues si los estudiantes ven que el concepto es útil, entonces se van a interesar más por aprender.

Es importante destacar que estos son algunos de los resultados de las dos primeras fases de la investigación en curso, que ha permitido por ahora caracterizar influencias relevantes del contrato didáctico en el área

de matemáticas, que posteriormente serán contrastadas con la segunda parte de la investigación, donde se diseñarán instrumentos que analizarán recursos didácticos y manifestaciones de los estudiantes acerca del aprendizaje del concepto de función.

Bibliografía

- AZCÁRATE, G. C. y Deulofeu, P. J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.
- BARRANTES, H. (2006). “Los obstáculos epistemológicos”. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 4. Obtenido el 06/06/2010 en <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%204.pdf>.
- BRUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Penséesuavage.
- D'AMORE, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Corporación Editorial Magisterio.
- PONTE, J.; Boavida, P.; Graça, M. y Abrantes, P. (1997). *Didáctica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- RADFORD, L.; Bagni, G. y D'Amore, B. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio cultural de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional, Colección Cuadernos del Seminario en Educación.
- REPÚBLICA DE COLOMBIA (2000). *Lineamientos curriculares para la educación básica y media*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- WIGDOROVITZ, A. (1997). *Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza*. Barcelona: Gedisa.

