ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO DEL OBJETO GRUPO: UNA MIRADA PIAGETIANA A LA LUZ DEL EOS

Omaida Sepúlveda Delgado
Magíster en Ciencias Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Tunja-Colombia)
omaida.sepulveda@uptc.edu.co

Nelsy Rocío González Gutiérrez
Magíster en Ciencias Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Tunja-Colombia)
nelsy.gonzalez@uptc.edu.co

Eliécer Aldana Bermúdez
Doctor en Educación Matemática
Universidad del Quindío (Quindío-Colombia)
eliecerab@uniquindio.edu.co

Artículo de Investigación

Recepción: 26 de mayo de 2016
Aprobación: 12 de junio de 2017
DOI: https://doi.org/10.19053/22160159.v8.n18.2017.7250

Praxis & Saber
Revista de Investigación y Pedagogía
Maestría en Educación. Uptc

Resumen

En el artículo se presenta un análisis epistemológico sobre la evolución histórica del objeto Grupo según la visión de Piaget y García. En esta dirección, se describen unos mecanismos en el proceso evolutivo de dicho objeto matemático que parten de la premisa de que el conocimiento se produce por la interacción del individuo con su medio y de acuerdo con unas estructuras que forman parte del individuo. Así, según el análisis de la evolución del objeto Grupo, emergen los significados que este adquirió a lo largo de su evolución histórica hasta llegar al significado de Grupo como Grupo de Galois del polinomio —más tarde como Grupo Abstracto—. Como resultado del análisis epistemológico del objeto matemático, se presentan en forma general algunas de las problemáticas que dieron origen a los significados de la estructura algebraica en mención. El estudio de los significados se realizó desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, y es de importancia tanto para docentes y estudiosos de Teoría de Grupos como para estudiantes de formación matemática —licenciados en matemáticas y matemáticos—. La metodología para el estudio de los significados está determinada por las herramientas teóricas propias del enfoque ontosemiótico.

Palabras clave: grupo, Grupo de Galois, enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, objeto matemático, conocimiento didáctico-matemático.

Epistemological Study of the Object *Group*: A Piagetian Perspective in the Light of the Onto-Semiotic Approach to Mathematics Cognition

Abstract

This article presents an epistemological analysis on the historic evolution of the object *Group* in accordance with Piaget and García perspective. In this sense, some mechanisms in the evolution process of this mathematical object are described. They are based on the premise that knowledge is produced by the interaction of the individual with his/her environment and it is ruled by some structures that are part of the individual. Thus, according to the evolution analysis of the object *Group*, meanings attributed to this notion appeared throughout its evolution history until finding the meaning of *Group* as in Galois Theory – Later on as Abstract group -. As a result of the epistemological analysis of the mathematical object, this text presents in general form some of the issues that gave rise to the meanings of the algebraic structure in question. The research of the meanings was carried out on the basis of the Onto-semiotic approach to mathematics cognition, given that it is important, both for teachers and Group theory researchers and for mathematics students – graduates in mathematics and mathematicians -. The method used for the study of the meanings is determined by theoretical tools belonging to the onto-semiotic approach.

Key words: group, Galois Theory, onto-semiotic approach to mathematics cognition, mathematical object, mathematic and didactic knowledge.

Étude Épistemologique de L'objet *Groupe* : Une Perspective Piagetienne à la Lumière de L'approche Ontologique et Semiotique de L'apprentissage et de L'enseignement Mathématique

Résumé

Dans l'article, on présente une analyse épistémologique sur l'évolution historique de l'objet *Groupe* dans la perspective de Piaget et García. Dans ce sens, on décrit des mécanismes dans le processus évolutif de cet objet mathématique qui partent du principe que la connaissance est produite par l'interaction de l'individu avec son environnement et en fonction de certaines structures qui font partie de l'individu. Ainsi, selon l'analyse de l'évolution de l'objet *Groupe*, des significations y attribuées émergent tout au long de son évolution historique jusqu'à la signification de *Groupe* comme dans le Groupe de Galois – ultérieurement comme Groupe Abstrait -. À l'issue de cette analyse épistémologique de l'objet mathématique, on présente de manière générale quelques problématiques qui ont donné naissance aux significations de la structure algébrique mentionnée. L'étude des significations a été menée à partir de l'approche ontologique et sémiotique de l'apprentissage et de l'enseignement mathématique étant donné qu'il est important tant pour les enseignants et les chercheurs de la Théorie des groupes que pour les étudiants en mathématiques - des diplômés en mathématiques et des mathématiciens -. La méthode de l'étude des significations est fondée sur les outils théoriques appartenant à l'approche onto-sémiotique.

Mots-clés: groupe, Groupe de Galois, approche ontologique et sémiotique de l'apprentissage et de l'enseignement mathématique, objet mathématique, connaissance didactique et mathématique.

Estudo Epistemológico do Objeto Grupo: Uma Mirada Piagetiana à Luz do Eos

Resumo

No artigo apresenta-se uma análise epistemológica sobre a evolução histórica do objeto *Grupo* segundo a visão de Piaget e García. Nesta direção, descrevem-se uns mecanismos no processo evolutivo de dito objeto matemático que partem da premissa de que o conhecimento se produz pela interação do indivíduo com seu médio e de acordo com umas estruturas que fazem parte do indivíduo. Assim, segundo a análise da evolução do objeto *Grupo*, emergem os significados que este adquiriu ao longo de sua evolução histórica até chegar ao significado de Grupo como Grupo de Galois do polinômio -mais tarde como Grupo Abstrato-. Como resultado da análise epistemológico do objeto matemático, se apresentam em forma geral algumas das problemáticas que deram origem aos significados da estrutura algébrica em menção. O estudo dos significados realizou-se desde o enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática, e é de importância tanto para docentes e estudiosos de Teoria de Grupos como para estudantes de formação matemática-licenciados em matemática e matemáticos-. A metodologia para o estudo dos significados está determinada pelas ferramentas teóricas próprias do enfoque ontosemiótico.

Palavras-chave: grupo, Grupo de Galois, enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática, objeto matemático, conhecimento didático-matemático.

Introducción

Una pregunta que surge de manera natural para los docentes interesados en el estudio de tópicos de teoría de grupos es: ¿qué es el objeto Grupo?; o en forma más explícita: ¿cuáles son los significados del objeto matemático? Estas preguntas fueron enfocadas a una investigación de tesis doctoral, centrada en "la exploración del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática —licenciados en matemáticas y matemáticos de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia— en relación con el objeto Grupo" (Sepúlveda, 2016). Para dar respuesta a las preguntas formuladas, fue necesario comprender en forma precisa qué era lo que debían conocer los estudiantes de formación matemática sobre el objeto de investigación, ya que la tesis doctoral tenía el objetivo de "evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática en relación al objeto Grupo".

Para cumplir con la meta planteada, fue indispensable dar respuesta a la pregunta sobre el significado global del objeto Grupo, y más específicamente, sobre qué significados fue tomando el objeto matemático según su contexto de uso en su evolución histórica hasta llegar al *significado epistémico del objeto Grupo*, que corresponde a un conjunto con una operación definida entre sus elementos, que cumple los axiomas o propiedades de cerradura, asociatividad, existencia de un elemento único —denominado *identidad* o *módulo*— y existencia de un único elemento inverso para cada elemento del conjunto dado, con la operación definida, como en el caso del conjunto de los números enteros, reales, racionales y complejos con la operación usual de adición.

En este sentido, el estudio de los significados de un objeto matemático toma importancia, ya que a partir del significado global del objeto matemático, el profesor, como representante de una institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción del tópico matemático (Godino & Batanero, 1994; Pino-Fan, 2013). En esta dirección, para determinar el significado global o significado de referencia del objeto matemático, fue necesario realizar un estudio epistemológico, histórico y fenomenológico, sobre el origen y evolución del objeto matemático y, de igual forma, reconocer los contextos de uso del objeto, esto es, donde se utiliza el objeto matemático (Godino & Batanero, 1994; Pino-Fan, 2013; Sepúlveda, 2016). Por consiguiente, se presenta un breve análisis de los significados del objeto de investigación a partir del estudio epistemológico del objeto Grupo (Sepúlveda, 2016) y según la visión de Piaget & García (2008). Se inicia con la descripción de los aportes del matemático francés Vieta y se finaliza con el estudio del significado del objeto matemático, como Grupo de Galois del polinomio.

Origen del álgebra abstracta

El uso de la palabra *álgebra* para designar una de las ramas de las matemática surge del libro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* del matemático Muhammed ibn Musa, al-Khwarizmi (Al-Juarismi). Esta obra data del año 825 y la traducción del título es *Solución de ecuaciones (algebraicas) por medio de restitución y reducción*. Al-Juarismi en el prólogo del libro escribió:

> es un corto trabajo sobre [cómo] calcular por medio de [las reglas de] Completación y Reducción, confinándose a lo que es más fácil y de más utilidad en aritmética, tal como los hombres constantemente requieren en casos de herencias, legados, reparticiones. (Dávila, 2002, p. 9)

Las palabras *al-jabr* y *al-muqabalah* significaban restauración y oposición, por lo que en el contexto hacían referencia a resolver una ecuación algebraica, agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado, lo cual restauraba el balance de la misma —*al-jabr*— y, al mismo tiempo, la simplificaba por medio de la cancelación de los términos opuestos—*al-muqabalah*—. A partir de 1494, otros matemáticos usaron los nombres de *arte magiore*, *ars mayor* o *artis magnae* para referirse al álgebra en contraste con el *ars minor*, que hacía referencia a la aritmética (Dávila, 2002).

En este sentido, Piaget & García (2008) realizaron un estudio basado en la epistemología genética a partir del método histórico-crítico, el cual sustentaban en el método psicogenético para tratar de extraer los procesos inherentes a la construcción del conocimiento; en este caso, para el análisis de la evolución del álgebra donde se ubica el objeto Grupo. Se establece que el álgebra abstracta por un largo periodo de tiempo tuvo como único objeto de estudio a la solución de ecuaciones algebraicas.

Los orígenes del álgebra se ubican en diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios y egipcios (Dávila, 2002; Piaget & García, 2008, p. 135; Sepúlveda, 2016). Algunos historiadores toman como punto de partida a la escuela de Alejandría y a Diophanto como la figura que representa al

ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

formulador de los problemas de la aritmética en términos simbólicos: el que introduce los valores determinados representados no por números, sino por letras para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecían como incógnitas en las ecuaciones planteadas para la solución de los problemas propuestos. Para Piaget & García (2008) esta interpretación histórica resultaba insatisfactoria, ya que, por una parte, era claro que las dificultades de los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos se explicaba por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones; y, por otra parte, era difícil explicar el estancamiento total de una ciencia que vuelve a florecer en el siglo XVI (Piaget & García, 2008, p. 136; Sepúlveda, 2016).

Para los citados autores, el matemático Vieta es quien retoma a los griegos, específicamente a la ciencia de Diophanto, y la perfecciona hasta convertirla en el punto de partida del álgebra contemporánea. Desde esta perspectiva, el papel que desempeñaron los árabes en la evolución del álgebra no fue tan preponderante, ya que solo se resalta la introducción de una notación más adecuada para las operaciones aritméticas; el aporte del concepto de *cero* como número —que ellos importaron de la India—; y el uso generalizado de las letras para representar cantidades indeterminadas. En este contexto, resultaría la obra de Vieta como la de un erudito y un sistematizador más que la de un creador y revolucionario en el campo científico (Piaget & García, 2008).

En 1934 Jacob Klein publica en Alemania *Die grieschische Logistik und die Entstehung der Algebra*, obra que para Piaget & García (2008) cambia la perspectiva del papel que desempeñó Vieta —de igual forma que la publicación de la versión inglesa en 1968, *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (Brann, 1992)—. En esta obra, Klein presenta una interpretación de las obras de Diophanto y de Vieta sobre la base de un minucioso análisis del pensamiento griego y del significado de la nueva ciencia desarrollada en los siglos XVI y XVII (Brann, 1992; Piaget & García, 2008, p. 136).

El estudio de Klein permite ubicar los orígenes del álgebra dentro de un esquema general de unos mecanismos que se encontraron en el desarrollo de otros campos de la matemática y la física, así como de las etapas más avanzadas del álgebra misma. El capítulo "*On the difference between ancient and modern conceptualization*" (Brann, 1992) proporcionó los elementos necesarios para la interpretación de los mecanismos básicos

 ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

puestos en juego. El eje identificado para la distinción entre Diophanto y Vieta, que daba sentido a toda la reinterpretación histórica a la cual se hace referencia, pasó por una diferenciación que se establece sobre el uso de símbolos matemáticos. El carácter algebraico, atribuido a la aritmética de Diophanto, se basaba en la utilización de diversos signos y abreviaturas, particularmente con referencia a las incógnitas de las ecuaciones a las cuales se les había interpretado como de un simbolismo algebraico, pero la simple utilización de letras para representar números o entes geométricos no da el carácter simbólico al tratamiento de un problema (Brann, 1992; Piaget & García, 2008, p. 136).

A partir del siglo XVI, el uso de letras toma un carácter simbólico y por eso, cuando se le atribuye a Diophanto la invención del álgebra —o a sus predecesores, con respecto a quienes él no sería sino un compilador—, se toma parte en forma explícita o implícita del carácter simbólico de los métodos de solución. Para Piaget & García (2008) el hecho de que Diophanto hablara de problemas generales y de una solución general podría sustentar la interpretación clásica, pero, con la reinterpretación de Klein, se pone en tela de juicio el carácter simbólico —en el sentido algebraico del término— que puede atribuirse a estas expresiones. A este respecto, la distinción entre generalidad del método y generalidad del objeto de investigación se torna fundamental: la matemática antigua se caracterizó por una tensión entre método y objeto. Los objetos en cuestión —figuras y curvas geométricas, sus relaciones, proporciones de magnitudes geométricas conmensurables e inconmensurables, relaciones numéricas– daban la dirección en la que avanzaba la investigación, ya que ellos eran, a la vez, el punto de partida y el de llegada (Brann, 1992; Piaget & García, 2008).

Así, Vieta utilizó una metodología característica del pensamiento griego, pero le dio una extensión y una profundidad que le permitieron reorganizar la obra de Diophanto en un nivel diferente. Piaget & García dan mérito a Klein, ya que en su obra muestra en qué se basa dicha reorganización y por qué Vieta debe ser considerado como el *verdadero fundador del álgebra* (Brann, 1992). La introducción del *arte analítico*, que incluía la presentación de lo que Vieta llamó una vía de inquisición de la verdad, fue una característica de las matemáticas, y su descubrimiento él mismo lo atribuye a Platón. El nombre de *análisis* dado a esta forma de investigación provenía, según Vieta, de Zhéon, de quien presentó la siguiente cita: "considerar la cosa investigada como establecida y proceder por medio

Praxis & Saber - Vol. 8. Núm. 18 - Septiembre - Diciembre 2017 - Pág. 233 - 252

de lo que sigue de ello hasta una verdad que sea incontestada". Además, agregó: "la síntesis es un proceso que comienza con la suposición de aquello que es aceptado y por sus consecuencias se llega a la conclusión y a la comprensión de aquello que se busca" (Brann, 1992; Piaget & García, 2008, p. 138).

Respecto al análisis, Vieta retomó una distinción hecha por los griegos en dos géneros: *el análisis zetético* o *teórico* y *el análisis porístico o problemático*, pero agrega un tercer género al que llama *rético o exegético*. Hay por consiguiente, para Vieta, un *arte zetético*, por el cual se encuentra la *ecuación* o la proporción entre la magnitud que se busca y la que es dada; un *arte porístico*, por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción, se busca verificar el teorema establecido; y finalmente, un *arte exegético,* por el cual, a partir de la ecuación establecida o de la proporción, se descubre la magnitud que se busca. El hecho esencial de la formulación de Vieta fue haber utilizado el término *magnitud* en su sentido más general: la magnitud buscada era o bien un número determinado, o una magnitud geométrica específica medible (Piaget & García, 2008, p. 138).

Para Klein (Brann, 1992) convergen aquí dos líneas independientes: el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto. La nueva álgebra de Vieta era a la vez geométrica y aritmética. Para lograrlo, llega a un nivel de generalización más elevado de lo que estuvo al alcance de los antiguos. En la obra, Vieta hace una distinción: "las consideraciones numéricas (*logistice numerosa*) operan con números; las consideraciones por especies (*logistice speciosa*) operan con especies o formas de las cosas, como por ejemplo con las letras del alfabeto" (Piaget & García, 2008, p. 139). Aquí se tiene como palabra clave las *especies*. Para Klein, las especies eran en sí mismas formaciones simbólicas. Ellas eran comprensibles solo dentro del lenguaje del formalismo simbólico, que fue completamente enunciado por Vieta, y a partir de aquí la fórmula matemática fue posible (Brann, 1992).

En esta dirección, la distinción crucial realizada por Vieta, que le permite dar un paso adelante y constituir el álgebra como una nueva disciplina, fue el pasaje del concepto de *arithmos* al concepto de símbolos generales. El *arithmos* hace referencia inmediata a las cosas o a las unidades y los símbolos —letras— usados por Vieta. Hacía referencia directamente a la propiedad de *ser un número*, propiedad que pertenece a cada uno de los números e, indirectamente, a las cosas o a las unidades cuya numerosidad

 ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

está representada por un número. Así, las letras remitían al concepto de número en general.

Vieta da un paso mayor de generalización al profundizar en el concepto de transformación. Klein presenta una referencia al hecho en la nota 250 (Brann, 1992). El capítulo contiene las leyes de las transformaciones de las ecuaciones que eran tres: antítesis —la transferencia de un término, de un miembro de la ecuación al otro—; hipobibasmo —la reducción del grado de la ecuación, dividiendo los dos miembros por la especie común a todos los términos de la ecuación—; y parabolismo —la división de los coeficientes de la ecuación por una cantidad convenida— (Piaget & García, 2008).

Para Piaget y García (2008) no era claro que en el capítulo se encontrara la verdadera raíz del razonamiento que consistía en hacer abstracción de los números y trabajar con especies: sino una vez que estas aparecen como invariantes en las transformaciones de la ecuación. Esta interpretación representa el salto que realiza Vieta para pasar a otro nivel de generalización y fundamentar su nueva álgebra, que también se encuentra en Descartes, quien continúa esta línea de pensamiento.

Las ecuaciones algebraicas

A partir de Vieta y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se centró en el estudio de las ecuaciones algebraicas. En este sentido, el método de solución de la ecuación de segundo grado fue descubierto por los hindúes, pero los babilonios ya habían encontrado soluciones a ecuaciones particulares de este grado. Las ecuaciones de tercero y cuarto grado fueron resueltas hacia finales del siglo XVII por Tartaglia y Cardano (Dávila, 2003a, p. 47; Piaget & García, 2008, p. 141; Sepúlveda, 2016).

Durante mucho tiempo se dieron tentativas para encontrar fórmulas que permitieran resolver ecuaciones de grado superior a cuatro, pero los únicos logros de la época hacen referencia a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Al mismo tiempo, se encontraron soluciones algebraicas para ciertas ecuaciones particulares provenientes de la geometría o de la mecánica. Sin embargo, cada ecuación necesitaba de un método de resolución propio (Dávila, 2002, 2003; Sepúlveda, 2016). Este es un periodo que Piaget & García (2008) identifican como *intra-operacional* —primera etapa—.

ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

En el siglo XVII y durante la primera mitad del siglo XVIII, se dio una ausencia de progreso en los métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas de grado mayor a cuatro por el método de radicales, debido a que la atención de los matemáticos se centró en el instrumento creado por Leibniz y por Newton: *el cálculo infinitesimal*. Esta herramienta fue tomada por los matemáticos Euler, Lagrange, Gauss y Cauchy, y les permitió llevar al álgebra, durante la segunda mitad del siglo XVIII, a un nuevo nivel de desarrollo. En ese momento, se formularon en el interior del álgebra problemas de gran generalidad como el que conduce a la demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra* (Chavarría, 2014), resultado al que se llegó haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas y de sus transformaciones tomadas del cálculo infinitesimal.

Este nuevo periodo corresponde para Piaget & García (2008) a una *etapa inter-operacional* —segunda etapa—. Por mucho tiempo *las transformaciones* dominaron el álgebra hasta llegar al surgimiento de la primera estructura algebraica: *la estructura de Grupo,* lo cual lleva a una nueva etapa en la evolución: la *trans-operacional* —tercera etapa, la final en este estudio—. Esta etapa se inició con los aportes de Galois (Piaget & García, 2008, p. 141; Tigol, 2002).

Para Piaget & García (2008) la figura clave en la transición de la etapa intra-operacional a la etapa inter-operacional fue Lagrange. Los métodos empíricos para resolver ecuaciones de diversos grados —propios de la etapa intra— fueron sustituidos por Lagrange al plantearse la pregunta más general: ¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado y cuál ha sido la razón de su éxito? Lagrange pensó así obtener las ideas que le permitirían abordar las ecuaciones de grado superior a cuatro. En sus análisis llegó a demostrar que todos los métodos consistían en introducir funciones que transformaran la ecuación de la cual se partía y llegar a así a una ecuación reducida. El problema formulado se traslada a "encontrar la relación entre las soluciones de la ecuación reducida y las soluciones de la ecuación original" (Dávila, 2003b; Piaget & García, 2008).

Lagrange utilizó la idea que contenía la semilla para el surgimiento del objeto Grupo: el número de valores diferentes que puede tomar un polinomio cuando se permutan las variables de todas las formas posibles (Piaget & García, 2008, p. 142). Para esto, analizó ciertas funciones de las raíces de la ecuación algebraica y llegó a demostrar que el número de

 ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

valores que puede tomar una función de las raíces $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, cuando se permutan las $\mathbf{x_j}$ de todas las maneras posibles, es un divisor de **n!** (factorial). Así, para una ecuación de grado cuarto, con raíces $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$, la función $\mathbf{y= x_1x_2+x_3x_4}$ toma tres valores diferentes cuando se permutan las raíces de las 24 maneras posibles. Lagrange demostró que el número de dichos valores diferentes determinaba el grado de la ecuación reducida que permitía resolver la ecuación algebraica (Dávila, 2003b; Piaget & García, 2008, p. 142; Tigol, 2002).

Aparece, en esta línea del desarrollo del objeto matemático, el matemático, filósofo y médico italiano Paolo Ruffini, quien retoma las ideas de Lagrange e intenta demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por el método de radicales para la ecuación de grado quinto. Su demostración queda incompleta, pero llega a constituir un marco conceptual, a partir del cual se ubica su trabajo en un lugar excepcional dentro del periodo inter-operacional del álgebra, muy próximo a la etapa siguiente a la que Galois da inicio (Dávila, 2003b; Piaget & García, 2008, p. 143). Ruffini define las permutaciones de las variables de una función dada y las clasifica en géneros. En términos modernos, esto se traduce en Teoría de Grupos como los grupos de sustituciones-permutaciones. Para Ruffini, las permutaciones estaban ligadas a los valores de las raíces, y la clase de permutaciones que no cambiaban el valor de la función no tenían para él ninguna estructura. En esta dirección, Ruffini concibe la transformación implicada en el pasaje de una permutación a otra, pero no concibe la *estructura matemática* dentro de la cual la transformación estaba implicada (Piaget & García, 2008, p. 143; Tigol, 2002).

El matemático francés Louis Cauchy continuó con los desarrollos en esta dirección y llegó a considerar estas funciones —permutaciones— con un grado de mayor generalidad: se trataba de funciones de cantidades, pero las cantidades no eran consideradas como las raíces de las ecuaciones; se trataba solamente de letras que representaban cantidades indeterminadas. Cauchy llamó *permutación* al orden de las letras. Llamó *sustitución* al paso de una permutación $\mathbf{A_1}$ a otra $\mathbf{A_2}$. Pero, además, pasa a definir la multiplicación de sustituciones y la sustitución idéntica, llegando a la identificación de la sustitución inversa $\mathbf{A^{-1}}$.

A partir de estos desarrollos surgieron algunos teoremas que se consideran como los antecesores inmediatos de los teoremas generales para los grupos de sustituciones-permutaciones. Los autores establecen que tampoco

Praxis & Saber - Vol. 8. Núm. 18 - Septiembre - Diciembre 2017 - Pág. 233 - 252

había en Cauchy una idea de estructura interiorizada, sino en cierto modo explicitada (Piaget & García, 2008, p. 143; Tigol, 2002).

Continuando en la línea de la evolución del objeto matemático, las investigaciones aritméticas de Gauss ocuparon también un lugar especial al final de este periodo. En particular, en su obra de las *Disquisiciones aritméticas,* la sección quinta tiene el título *"De las formas y de las ecuaciones de segundo grado"*, donde Gauss estudia las formas cuadráticas en relación con la solución de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas. Su análisis minucioso de las formas cuadráticas binarias y ternarias fue su tema principal. No solo clasifica las formas en cuanto tales, definiendo sus órdenes y tipos, sino que además logra, por primera vez en la historia de las matemáticas, componer formas entre sí, esto es *definir operaciones entre formas* (Dávila, 2003b; Piaget & García, 2008; Zúñiga, 1995).

Las investigaciones de Gauss llevaron a encontrar todas las soluciones de una ecuación indeterminada cualquiera de segundo grado en dos incógnitas, ya fuera que la solución correspondiera a números enteros o a racionales (Piaget & García, 2008, p. 144). En el mismo trabajo, Gauss llega a uno de los puntos más originales de su obra, que introduce en los siguientes términos: "vamos a pasar a otro tema muy importante y del cual nadie se ha ocupado hasta ahora, a la composición de formas" (citado en Piaget & García, 2008, p. 241). La definición de composición de formas dada por Gauss constituye la *primera operación introducida en un dominio no numérico,* cuyas propiedades no podían ser deducidas directamente de las operaciones entre números (Zúñiga, 1995).

Para Piaget & García (2008), algunos historiadores de la matemática, mostraron su asombro ante la ausencia de respuesta a la pregunta: ¿por qué estos matemáticos, habiendo llegado tan cerca de los conceptos de teoría de grupos, no pudieron dar el pequeño salto que hacía falta para constituirla? Para Piaget & García, el pequeño salto solo lo era en apariencia. Gauss constituye junto con Lagrange, Ruffini, Cauchy y otros matemáticos, la culminación del periodo inter-operacional en el desarrollo del álgebra y, particularmente, en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sus métodos consistieron en transformar funciones y encontrar las relaciones que permanecían estables. Las propiedades que ellos dedujeron corresponden a los invariantes de sistemas de transformaciones (Piaget & García, 2008; Tigol, 2002).

El tipo de desarrollo que se encontró tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis evidencia que había un largo camino por recorrer antes de pasar de un sistema dado de transformaciones a una estructura total dentro de la cual las transformaciones resultaban variaciones intrínsecas. Para Piaget & García (2008) en esto consiste precisamente el pasaje de las conexiones inter-operacionales a las trans-operacionales. A nivel psicogenético, la etapa trans-operacional se alcanza cuando el sujeto puede efectuar operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008, p. 146).

Al respecto, Piaget & García (2008) señalan que no es trivial decir que Galois introduce la noción de *grupo* a partir de la acción de *agrupar*. Las siguientes definiciones constituyen el punto de partida de Galois:

> La permutación de la cual se parte para indicar las sustituciones es totalmente arbitraria cuando se trata de funciones. Puesto que no existe ninguna razón para que en una función de varias letras, una letra ocupe un rango más que algún otro. Sin embargo, como apenas se puede formar la idea de una sustitución sin la de permutación, haremos en el lenguaje un empleo frecuente de las permutaciones y no consideraremos las sustituciones sino como el pasaje de una permutación a otra: cuando deseemos **agrupar** sustituciones, las haremos provenir todas de una misma permutación. Cuando se trate siempre de cuestiones donde la disposición primitiva de las letras no influye en nada, en los grupos que consideraremos, se deberán tener las mismas sustituciones cualquiera que sea la permutación de donde se haya partido. Por consiguiente, si en un grupo tal, se tienen las sustituciones **S** y **T,** se está seguro de tener la sustitución **ST** (Piaget & García, p. 146).

Y más adelante, agrega: "se llama grupo a un sistema de permutaciones tal que [...] representaremos este conjunto por G". Para Piaget & García (2008) estas son las fuentes de la primera noción de *estructura* en la historia del álgebra, donde se encuentra la esencia para comprender el pasaje del periodo inter-operacional al trans-operacional. Así como en el caso de la psicogénesis, esta transición suponía el pasaje de las operaciones sobre elementos a las operaciones sobre operaciones.

Metodología

El *Estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo*, se desarrolló con las herramientas del enfoque ontosemiótico (EOS), bajo un enfoque cualitativo y con un alcance descriptivo, que permitieron determinar los significados parciales del objeto Grupo, buscando el porqué

Praxis & Saber - Vol. 8. Núm. 18 - Septiembre - Diciembre 2017 - Pág. 233 - 252

de ciertos fenómenos (Arias, 1999). A partir del análisis de diversas fuentes —libros de historia de la matemática, investigaciones realizadas, libros clásicos de álgebra abstracta—, se identificaron los significados parciales del objeto matemático, hecho que evidencia la complejidad asociada al objeto matemático. La articulación de significados parciales llevó entonces a la emergencia del significado global del objeto de investigación —enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática—.

En el marco teórico de investigación en *Educación Matemática: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática-EOS* (Contreras, Font, Luque & Ordóñez, 2005; Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Batanero & Roa, 2005; Godino, Contreras & Font, 2006), una noción importante es la de *objeto matemático,* que corresponde a una entidad emergente e interviniente en las prácticas matemáticas, donde el objeto se entiende como alguno de los elementos: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación-problema. Estos elementos —excepto las situaciones-problemas— se entienden como emergentes de la práctica, cuya finalidad es la resolución de una situación-problema (Godino & Batanero, 1994, 1998).

En la misma dirección, en el EOS, el significado del *objeto matemático*, se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona —o institución, libros, el profesor— realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas: significado institucional y personal del objeto matemático (Godino & Batanero, 1994, 1998), en términos de los sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización.

De igual forma, en el marco del EOS, una práctica matemática corresponde a toda actuación o expresión, ya sea verbal o gráfica, que realiza la persona o las personas de una institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

Resultados

Se presentan las problemáticas que dieron origen a los significados del objeto matemático (ver tabla 1) a partir de las cuales se determinaron los

 ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603

significados del objeto Grupo, según el análisis de la evolución histórica y tomando como referencia la visión de Piaget & García (2008).

En primer lugar, para el matemático francés Vieta (1540-1603) uno de los *problemas* es hallar la solución a las ecuaciones algebraicas por métodos empíricos. Los problemas de la época eran dados en forma verbal, pero él introduce un *lenguaje* que corresponde a un *formalismo simbólico*, lo que le permite la simbolización y el manejo de las ecuaciones algebraicas, ya que antes se traducían en un lenguaje retórico. Así por ejemplo, se tenía el problema: el cubo y la cosa igual a un número —álgebra de tipo retórico— (problema solucionado por el célebre matemático Del Ferro), pero que con la nueva notación se traducía en la ecuación cúbica $\mathbf{x^3 + px=q}$ para la cual se tenía un método particular de solución (Dávila, 2003a; Tigol, 1992).

Desde esta perspectiva, Lagrange (1736-1813) plantea el problema de dar respuesta a la pregunta: ¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado y cuál ha sido la razón de su éxito? Entonces, direcciona su trabajo a la búsqueda de métodos más generales que dieran solución a las ecuaciones algebraicas, con métodos basados en transformar las ecuaciones en otras de menor grado que fueran resolubles por el método de radicales —sumas, multiplicaciones, divisiones de los coeficientes, raíces—, pero sin dar solución a las ecuaciones de grado quinto (Dávila, 2003b).

Finalmente, Galois (1811-1832) se plantea el problema de dar respuesta a la pregunta: ¿qué ecuaciones de grado quinto son solubles por radicales? En este sentido, Galois analiza la solución de las ecuaciones y generaliza el siguiente método: sea $\mathbf{x^2+3x+2=0}$ una ecuación de segundo grado que tiene como raíces $\mathbf{x_1= -1}$ **y** $\mathbf{x_2= -2}$, entonces se tiene que: $\mathbf{x^2+bx+c=(x-r_1)(x-r_2)}$ y para los coeficientes se cumple que: $\mathbf{b= -(r_1+r_2)}$ y $\mathbf{c=r_1r_2}$. Se tiene la relación que se cumple entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces. Para la ecuación de grado dos ya se conocía la fórmula de segundo grado —método de radicales— para su solución a partir de **b, c**: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Galois analiza que la expresión $\mathbf{b^2 - 4c= (r_1+r_2)^2 - 4(r_1r_2)}$ es una función simétrica en las raíces de la ecuación —función que no cambia al permutar las raíces— y que pasa a dos funciones no simétricas al sacar la raíz cuadrada a la expresión $\sqrt{b^2-4c} = \pm\ \mathbf{(r_1 - r_2)}$. Galois considera en primer lugar el conjunto $\mathbf{K_0}$ de las expresiones que se pueden obtener a partir de **b, c** haciendo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones —solución por

Praxis & Saber - Vol. 8. Núm. 18 - Septiembre - Diciembre 2017 - Pág. 233 - 252

radicales— y muestra que **b, c** pertenecen a $\mathbf{K_0}$; luego define el conjunto $\mathbf{K_1}$ al igual que el conjunto $\mathbf{K_0}$, pero permitiendo operar con $\sqrt{b^2-4c}$ y se tiene también que $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ pertenecen a $\mathbf{K_1 = K_0}(\sqrt{b^2-4c})$.

El paso de $\mathbf{K_0}$ a $\mathbf{K_1}$ representa resolver la ecuación: en este caso, como las funciones de $\mathbf{K_0}$ son invariantes al permutar las dos variables $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, se le asigna el grupo de simetrías $\mathbf{S_2}$ —grupo de permutaciones de dos elementos— mientras que a las funciones de $\mathbf{K_1}$, que en general no son simétricas, se les asigna el grupo trivial {id}, para obtener así el Grupo —del polinomio— = $\mathbf{\{(1,2)\ (i)\} = S_2} \approx \mathbf{Z_2}$ = Grupo de Galois, que es isomorfo al Grupo de los enteros módulo dos formado por las clases {0,1}; las dos permutaciones constituyen el grupo de Galois del polinomio **{{id}, α=(1,2)}** y así, el grupo de Galois en general representa las propiedades de simetría de la ecuación.

$$\mathbf{K_0 \rightarrow K_1 = K_0}(\sqrt{b^2-4c})$$
$$S_2 = G_0 \leq G_1 = \{id\}$$

Galois llega a determinar, con este análisis, que la condición necesaria para que una ecuación algebraica sea soluble mediante una fórmula —radicales— es que el grupo de Galois del polinomio asociado a la ecuación algebraica sea soluble y, llama a un grupo *soluble*, si cada uno de los factores de composición generados por sus subgrupos normales descendentes maximales corresponden a un número primo. En este caso se tiene que como el orden del grupo cociente $\mathbf{|S_2/\{id\}|=2}$ corresponde a un número primo, entonces el grupo de permutaciones $\mathbf{S_2}$ es soluble y por lo tanto el grupo de Galois de la ecuación de grado dos también es soluble por radicales. Esto significa que existe una fórmula en función de los coeficientes **b, c,** con la cual se puede resolver la ecuación de grado dos que para este caso es la que se conoce y que se utiliza desde el tiempo de los hindúes.

Con el mismo método, Galois estudia las ecuaciones de grado tres, cuatro y para la quíntica demuestra que, en general, la ecuación no es soluble por radicales, ya que su grupo de Galois no lo es (Dávila, 2003b; Tigol, 2002). El *problema* que surge luego de obtener el grupo de Galois de un polinomio en álgebra abstracta, corresponde al *análisis y estudio de las estructuras algebraicas:* entre las cuales se encuentra *la estructura de Grupo* que es motivo de estudio.

Conclusiones

Se presentan los significados que fue tomando el objeto Grupo en su evolución histórica (ver tabla 1) según el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico (Sepúlveda, 2016) de las etapas de evolución del objeto matemático y según la visión de la evolución del objeto de Piaget & García (2008).

Tabla 1
Significados de los objetos Grupo (Sepúlveda, 2016)

	SIGNIFICADO DEL OBJETO GRUPO	
	Edad Contemporánea	Significado algebraico
Periodo trans-operacional	Camille Jordán (1838-1922). Francés. Evariste Galois (1811-1832). Francés.	Grupos de permutaciones Grupos $\mathbf{A}_n$ de permutaciones Conjunto de Permutaciones Grupos solubles Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial *Idea de estructura interiorizada.*
	Edad Moderna	
Periodo intra-operacional	Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Alemán. Jean Robert Argand (1768-1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783). Suizo. Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783). Francés. Wilhelm Leibniz (1646-1716). Alemán. Isaac Newton (1643-1727). Británico. John Wallis (1616-1703). Inglés.	Conjunto $\mathbf{Z}_p$ Conjunto de permutaciones de las raíces. Conjunto de los enteros y la aritmética módulo n. *No hay una idea de estructura interiorizada.*
	Renacimiento	

Praxis & Saber - Vol. 8. Núm. 18 - Septiembre - Diciembre 2017 - Pág. 233 - 252

Periodo intra-operacional	Albert Girard (1595-1632). Francés. René Descartes (1596-1650). Francés. William Oughtred (1574-1660). Inglés. Thomas Harriot (1560-1621). Inglés. Francois Viète (1540-1603). Francés. Girolamo Cardano (1501-1576). Italiano.	Conjuntos de permutaciones Funciones con las raíces de las ecuaciones. Aritmética módulo n. *No hay una idea de estructura interiorizada.*
	Edad Media	
Periodo cero	Leonardo de Pisa, Fibonacci (1175-1240) Nicolás Chuquet (1450-1500). Francés. Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes:Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670)	Significado pre-algebraico
	Civilizaciones antiguas	
	Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	Significado pre-algebraico

En este resumen de la evolución del objeto Grupo se presentaron algunos de los problemas de los cuales surgieron los Grupos como Grupos Simétricos-Grupos de permutaciones, Grupos $\mathbf{Z}_n$ de los enteros módulo n, Grupos Alternantes y Grupos de Galois. A partir de ellos se puede iniciar el estudio del objeto Grupo. Así, según la visión de Piaget & García (2008), la evolución del objeto matemático se da en diferentes etapas de desarrollo y en el transcurso de muchos siglos, ya que solo hasta el siglo XX se logra llegar al significado global del objeto Grupo, esto es, como un conjunto donde se define una operación que cumple los axiomas o propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto.

El estudio de la evolución del objeto Grupo permite evidenciar que en la enseñanza del objeto matemático —al igual que en el desarrollo histórico— se deben involucrar situaciones problemáticas de la matemática y fuera de la matemática, de modo que el estudiante logre el trabajo con conjuntos concretos y pueda ir alcanzando un nuevo nivel de desarrollo que le permita iniciar con el estudio de los teoremas formales y las aplicaciones propias de la Teoría de Grupos (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007).

Referencias

Arias, F. (1999). *El proyecto de investigación: guía para su elaboración*. (3ª ed.) Caracas: Episteme.

Brann, E. (1992). *Greek Mathematical Thought and the origin of Algebra. Jacob Kleine (1968)* (Trad. Eva Brann). New York: Dover Publications, Inc.

Chavarría, S.(2014). *De las ecuaciones a la Teoría de Grupos, algunos obstáculos epistemológicos* (Tesis de pregrado, Laureada, Licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia).

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(2), 151-186.

Dávila, R. G. (2002). El desarrollo del álgebra moderna. Parte I: El álgebra en la antigüedad. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, *1*(3), 5-21.

Dávila, R. G. (2003a). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones.* Apuntes de Historia de las Matemáticas, *2*(1), 27-37.

Dávila, R. G. (2003b). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte III: El surgimiento del álgebra abstracta.* Apuntes de Historia de las Matemáticas, *2*(3), 38-78.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer,

A. P. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5194-8_12 https://doi.org/10.1007/978-94-011-5190-0_11

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). A semiotic analysis of combinatorial problems and its resolution by university students. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 3-36. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5893-3

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Piaget, J., & García, R. (2008). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (11ª ed.). Madrid, España: Siglo XXI editores.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, España).

Sepúlveda, D. O. (2016). *Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo* (Tesis doctoral. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia).

Tigol, J. P. (2002). *Galois' Theory of Algebraic Equations*. London: World Scientific.

Zúñiga, R. A. (1995). *Disquisitiones arithmeticae Carl F. Gauss* (Trad. Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia). Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

 ISSN 2216-0159 E-ISSN 2462-8603