

---

## Aplicación del algoritmo Runge – Kutta en la obtención de órbitas estelares en galaxias espirales

**Eulises Fonseca**

alejofonseca\_44@hotmail.com

**Grupo de Física Teórica y Computacional  
Facultad de Ciencias Básicas  
Escuela de Física**

### Resumen

Se hace una revisión del algoritmo de Runge – Kutta de cuarto orden, aplicado a la solución de las ecuaciones de movimiento para una partícula moviéndose bajo la acción de un potencial arbitrario y se da a conocer algunos resultados del empleo de este en la solución de problemas de ubicación y estabilidad de órbitas en galaxias espirales.

**Palabras clave:** métodos numéricos, Runge – Kutta 4.º orden, galaxias, dinámica, órbitas, estabilidad.

### Introducción

En mecánica clásica uno de los problemas más comunes es encontrar el conjunto de expresiones que relacionen la trayectoria de un sistema en el espacio de fase con el tiempo, en otras palabras solucionar las ecuaciones de movimiento (Goldstein, et al, 2002). Uno de los primeros, y quizá el más conocido es el problema de los tres cuerpos (Symon, 1961), que si bien es relativamente simple, no ha sido posible encontrar una solución analítica, sino aproximaciones para casos muy especiales (Hénon, 1969).

En sistemas más complejos como galaxias espirales, se hace imposible obtener una solución exacta a las ecuaciones de movimiento, por lo que se recurre a los métodos numéricos. El método usado más frecuentemente es el de Runge – Kutta de cuarto orden (Binney y Tremaine, 2008).

En la primera parte se da un preámbulo acerca de los métodos de obtención de órbitas en galaxias; luego se presenta el algoritmo Runge – Kutta para sistemas físicos autónomos (no dependientes del tiempo), haciendo énfasis en la aplicación en física.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos y, para terminar, se dan a conocer las principales conclusiones del trabajo.

### Órbitas estelares en galaxias

La obtención de la trayectoria de una partícula en cualquier sistema físico se puede obtener por dos métodos:

1. Se toma como partida la segunda ley de Newton, obteniendo las ecuaciones de movimiento, las cuales, en el caso más general forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La solución de tal sistema constituye la trayectoria de la partícula.
2. Se construye el Hamiltoniano para la partícula, del cual se obtiene las ecuaciones de Hamilton, las cuales forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución da la trayectoria de la partícula y el momentum canónico asociado a cada una de las coordenadas espaciales.

Cabe destacar que al llevar a cabo una reducción de orden al sistema de ecuaciones diferenciales del método de Newton, se obtiene el sistema derivado por medio del método de Hamilton. Debido a que se hace más sencillo trabajar con energías (o potenciales) que con fuerzas, el trabajo de obtener ecuaciones de movimiento se lleva a cabo a través del método de Hamilton. Si se ignora la contribución vertical, una galaxia espiral puede ser modelada como un sistema bidimensional, obteniendo así un sistema de 4 ecuaciones diferenciales en la mayoría de los casos, no lineales, haciendo imposible la solución exacta, llevándonos a recurrir a los métodos numéricos.

### Algoritmo Runge – Kutta

Las ecuaciones de Hamilton (Goldstein, et al, 2002) están definidas como:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Dónde  $q_i$  es la  $i$  – ésima coordenada espacial,  $p_i$  el momentum asociado a la  $i$  –ésima coordenada espacial,  $H$  el Hamiltoniano del sistema y los puntos sobre las coordenadas canónicas indican derivadas temporales.

Si se define un vector de coordenadas canónicas  $\vec{w}$

$$\vec{w} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Entonces, las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas en forma vectorial como:

$$\vec{f}(\vec{w}) = \frac{d\vec{w}}{dt} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_n)$$

Si se conoce el valor de las coordenadas canónicas  $\vec{w}_j$  en un tiempo  $t_j$  (condiciones iniciales) y se introduce el valor de paso temporal o timestep  $h$ , se define los coeficientes de Runge – Kutta como:

$$\vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{w}_j)$$

$$\vec{k}_2 = h\vec{f}\left(\vec{w}_j + \frac{\vec{k}_1}{2}\right)$$

$$\vec{k}_3 = h\vec{f}\left(\vec{w}_j + \frac{\vec{k}_2}{2}\right)$$

$$\vec{k}_4 = h\vec{f}\left(\vec{w}_j + \vec{k}_3\right)$$

Conocido el valor de cada uno de estos es posible calcular el vector  $\vec{w}_{j+1}$  para un tiempo  $t_j + h$

$$\vec{w}_{j+1} = \vec{w}_j + \frac{1}{6} \left( \vec{k}_1 + \frac{1}{2} \vec{k}_2 + \frac{1}{2} \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \right)$$

Así, a partir de ciclos repetitivos se puede llegar a conocer la trayectoria del sistema en el espacio de fase para las condiciones iniciales dadas. La precisión del método depende de la escogencia del timestep, de esta manera cuanto más pequeño sea  $h$ , mejores serán los resultados obtenidos.

### Estabilidad de órbitas en galaxias

A partir de la solución de las ecuaciones de Hamilton es posible encontrar condiciones iniciales para las cuales el sistema va a tener un comportamiento estable. Esto se lleva a cabo usando los diagramas de Poincaré (Binney y Tremaine, 2008).

Un diagrama de Poincaré es un corte bidimensional en determinada región del espacio de fase (usualmente  $q_n = 0$ ), en este se puede observar conjuntos de puntos que forman curvas cerradas, estas se denominan curvas invariantes y están relacionadas con órbitas cuasi-periódicas. Generalmente las curvas invariantes encierran puntos, estos dan cuenta

de soluciones u órbitas periódicas del sistema. Otra característica que puede observarse en un diagrama de Poincaré es la presencia de caos, el cual se ve representado en los puntos que se encuentran dispersos en todo el diagrama y que además no presentan ningún tipo de regularidad.

Se desarrolló un programa en Fortran basado en el algoritmo Runge – Kutta para dos casos: una partícula de prueba bajo el potencial de Hénon – Heiles estacionario (Hénon y Heiles, 1964) y una partícula de prueba bajo un potencial galáctico más realista rotando a la velocidad del patrón perturbador (Elmegreen, 1998).

En la figura 1a se muestra un diagrama de Poincaré para una partícula moviéndose bajo el potencial de Hénon – Heiles. En este se puede observar curvas invariantes que dan cuenta de órbitas cuasi-periódicas como la mostrada en la figura 1b, puntos encerrados indicando la presencia de órbitas periódicas (figura 2a) y puntos dispersos a causa de la órbitas caóticas (figura 2b).

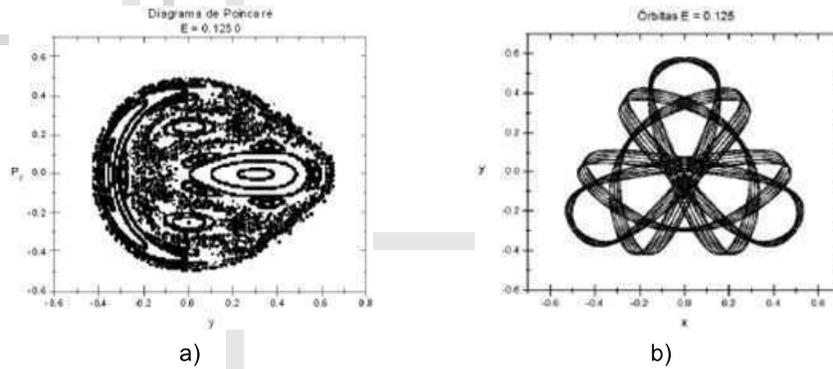


Figura 1a. Diagrama de Poincaré ( $x = 0$ ). Potencial de Hénon – Heiles  
 Figura 1b. Órbita cuasi-periódica para una partícula bajo el potencial de Hénon – Héiles

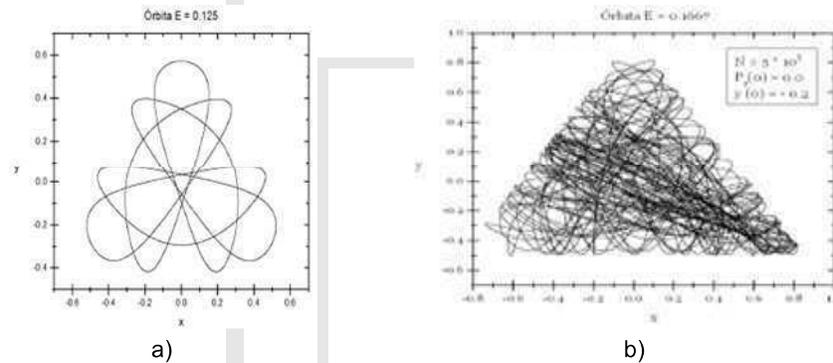


Figura 2. Órbitas de una partícula bajo el potencial de Hénon – Heiles  
 a) Órbita periódica b) Órbita caótica

En el caso de una partícula moviéndose bajo un potencial galáctico medianamente realista (con contribuciones del disco, componente esferoidal, perturbación espiral e ignorando efectos de fricción dinámica, componente gaseosa, entre otros (véase Amaral, et al, 1997), se obtuvo diagramas de Poincaré como el mostrado en la figura 3 y órbitas de forma elíptica que se presentarán en un próximo trabajo.

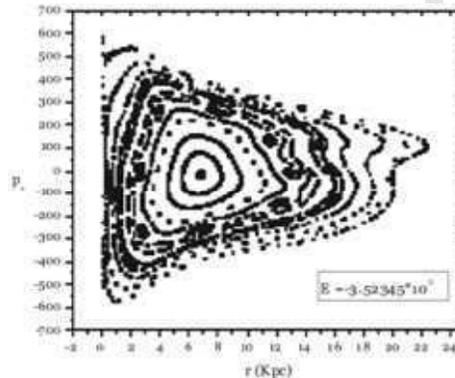


Figura 3. Diagrama de Poincaré ( $\theta = 0$ ) para una partícula moviéndose bajo un potencial galáctico rotante (nótese la presencia de una órbita periódica en  $r = 6.5 \text{ Kpc}$ )

### Conclusiones

El método de Runge – Kutta es de gran utilidad en la solución de problemas físicos que involucran sistemas de ecuaciones diferenciales y más puntualmente en sistemas dinámicos.

El método de Runge – Kutta es una herramienta muy útil en el análisis de estabilidad de sistemas físicos, ya que con esta se obtiene una descripción cualitativa muy precisa acerca de las condiciones necesarias para que la solución del sistema cambie entre caótica y periódica.

El método presenta grandes ventajas en la investigación cuando no se cuenta con equipos capaces de llevar a cabo simulaciones de N – cuerpos, debido a que es un método muy económico (computacionalmente hablando).

### Referencias bibliográficas

Amaral, L., y Lépine, D. (1997). A Self-Consistent Model of the Spiral Structure of the Galaxy. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (No. 286).

Binney, J., y Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics* (2nd ed.). New York: Princeton University Press.

Elmegreen, D. (1998). *Galaxies and Galactic Structure*. New Jersey: Prentice Hall.

Goldstein, H., Poole, C., y Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3er ed.). San Francisco: Addison Wesley.

Henon, M. (1969). Numerical Exploration of the Restricted Problem. VI. Hill's Case: Non-Periodic Orbits. En: *Astronomy and Astrophysics* (No. 1).

Henon, M., y Heiles, C. (1964). The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. En: *Astronomical Journal* (Vol. 69).

Symon, K. (1961). *Mechanics* (2nd ed.). Massachusetts: Addison Wesley.