REVISTA
HABITUS
SEMILLEROS
DE INVESTIGACIÓN

2024 | VOL. 4, NÚM. 7 | ISSN: 2745-2166 | https://doi.org/10.19053/uptc.22158391.18289

ARTÍCULOS ORIGINALES

# Haciendo matemáticas con cuadrados mágicos

JEIMY RAMÍREZ BOLÍVAR[A]



**RESUMEN:** Esta investigación exploró el pensamiento y competencias matemáticas de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas al resolver cuadrados mágicos de diferentes órdenes. El objetivo principal era analizar las regularidades que descubrieron los estudiantes durante el desarrollo de cuadrados mágicos de órdenes pares e impares; se llevó a cabo en 2 sesiones, trabajaron en grupos y documentaron de forma escrita las estrategias, patrones y conjeturas que usaron. La metodología se desarrolló en base a la propuesta de Ponte (2003) y se dividió en tres fases: introducción, desarrollo del trabajo y discusión de resultados. Los estudiantes demostraron dominio en la resolución de cuadrados mágicos de orden 3, pero se encontraron mayores dificultades cuando el orden del cuadrado aumenta. La actividad demostró dominio de los conocimientos previos, actitudes positivas hacia el trabajo en equipo, y lo más importante, una percepción diferente de las matemáticas tanto por parte de los estudiantes como del profesorado.

**PALABRAS CLAVE:** Cuadrados mágicos, actividades exploratorio-investigativas, patrones.

**CÓMO CITAR**

Ramírez Bolívar, J. (2025). Haciendo matemáticas con cuadrados mágicos. Revista Habitus: Semilleros de investigación, 4(7). https://doi.org/10.19053/uptc.22158391.18289

**RECIBIDO:** 24/10/2024 · **EVALUADO:** 08/11/2024
**APROBADO:** 14/11/2024 · **PUBLICADO:** 13/11/2025

[A] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Colombia).
https://orcid.org/0009-0004-5973-9173

Autor para correspondencia.
jeimy7ramirez@gmail.com

REVISTA
HABITUS
SEMILLEROS
DE INVESTIGACIÓN

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

2024 | VOL. 4, NÚM. 7 | ISSN: 2745-2166 | https://doi.org/10.19053/uptc.22158391.18289

**HOW TO CITE**

Ramírez Bolívar, J. (2025). Haciendo matemáticas con cuadrados mágicos. Revista Habitus: Semilleros de investigación, 4(7). https://doi.org/10.19053/uptc.22158391.18289

## Doing mathematics with magic squares

**ABSTRACT:** This research explored the mathematical thinking and competencies of undergraduate mathematics students when solving magic squares of different orders. The main objective was to analyze the regularities that students discovered during the development of magic squares of even and odd orders; it was carried out in 2 sessions, they worked in groups and documented in written form the strategies, patterns and conjectures they used. The methodology was developed based on Ponte's (2003) proposal and was divided into three phases: introduction, development of the work and discussion of results. The students demonstrated mastery in solving magic squares of order 3, but greater difficulties were encountered when the order of the square increases. The activity demonstrated mastery of previous knowledge, positive attitudes towards teamwork, and most importantly, a different perception of mathematics on the part of both students and teachers.

**KEYWORDS:** Magic squares, exploratory-investigative activities, patterns.

## Fazendo matemática com quadrados mágicos

**RESUMO:** Esta pesquisa explorou o pensamento matemático e as competências dos alunos de graduação em matemática ao resolverem quadrados mágicos de diferentes ordens. O principal objetivo foi analisar as regularidades que os alunos descobriram durante o desenvolvimento de quadrados mágicos de ordens pares e ímpares; foi realizada em duas sessões, eles trabalharam em grupos e documentaram por escrito as estratégias, os padrões e as conjecturas que usaram. A metodologia foi desenvolvida com base na proposta de Ponte (2003) e foi dividida em três fases: introdução, desenvolvimento do trabalho e discussão dos resultados. Os alunos demonstraram domínio na resolução de quadrados mágicos de ordem 3, mas maiores dificuldades foram encontradas quando a ordem do quadrado aumentou. A atividade demonstrou domínio do conhecimento prévio, atitudes positivas em relação ao trabalho em equipe e, o mais importante, uma percepção diferente da matemática por parte dos alunos e dos professores.

**PALAVRAS-CHAVE:** Quadrados mágicos, atividades exploratório-investigativas, padrões.

# Introducción

Investigar en educación matemática implica realizar actividades que involucran formular preguntas, hacer conjeturas, llevar a cabo pruebas y fomentar un ambiente de trabajo matemático (Ponte et al, 2003). En este sentido, es importante diseñar e implementar en el aula diversas actividades que estimulen la motivación y el interés del estudiante; no se trata simplemente de resolver ejercicios rutinarios, sino de cultivar habilidades para potenciar el desarrollo del pensamiento crítico, el análisis y la resolución de problemas (Gascón, 1994).

Según Matos (1991), cuando los estudiantes participan en actividades de investigación bajo dinámicas diferentes que les permiten explorar, experimentan momentos que contribuyen a mejorar su apreciación hacia las matemáticas. Por tanto, encontrar patrones y regularidades se vuelve fundamental para comprender conceptos, anticipar resultados, estimular la creatividad, aumentar la confianza, facilitar la abstracción de conocimientos y mejorar la resolución de problemas (Gascón, 1998). En este aspecto, la naturaleza de las tareas ejerce una influencia significativa para la enseñanza de las matemáticas (Brocardo, 2001) especialmente, aquellas experiencias que fomentan el aprendizaje y la construcción del conocimiento. Para el estudio desarrollado, se propone como objetivo: analizar las posibles regularidades identificadas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas durante la elaboración de cuadrados mágicos de órdenes pares e impares.

# Marco teórico y metodológico

Esta sección explora la solución de cuadrados mágicos como una herramienta para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de Licenciatura. Se presenta una metodología práctica que presenta la solución y construcción de cuadrados mágicos, permitiendo analizar las características y los patrones que sobresalen allí.

El enfoque se centra en la identificación de estrategias eficientes, la documentación detallada de los descubrimientos y la validación de los razonamientos a través de la colaboración y el debate. Además de la experiencia, se abordan conceptos clave como la distinción entre ejercicio, problema, y situación problema (D´Amore, 2006). Se revisa la historia de los cuadrados mágicos como actividad recreativa y se exploran investigaciones previas relacionadas con el tema.

## Antecedentes

Respecto al trabajo con cuadrados mágicos, Domínguez (2016) explora el uso de los cuadrados mágicos de orden impar en la enseñanza de conceptos algebraicos; este estudio estaba dirigido específicamente a estudiantes de grado octavo y noveno con dificultades en matemáticas. La investigación presenta una metodología para explorar patrones y su generalización. El autor concluyó que los cuadrados mágicos pueden ser una herramienta didáctica eficaz para mejorar la comprensión de los estudiantes en matemáticas, ofreciendo recomendaciones prácticas y valiosas para los educadores. Este estudio sugiere varias líneas de investigación, por ejemplo, investigar como los cuadrados mágicos pueden adaptarse para enseñar diferentes conceptos matemáticos, explorar su efectividad en cada nivel educativo o examinar como influyen en el desarrollo del pensamiento algebraico y la resolución de problemas. Además de métodos para integrar cuadrados mágicos en la escuela de manera amplia, considera su impacto en el aprendizaje de los estudiantes y en la motivación para el estudio de las matemáticas.

De otra parte, Perussi (2006) realiza un estudio a tres estudiantes de grado octavo para investigar cómo se involucran en las tareas matemáticas, examinando las interacciones verbales y las manifestaciones de conocimiento matemático y razonamiento. El estudio subraya la importancia de la investigación exploratoria en la educación matemática, destacando su capacidad para promover una comprensión más profunda de las matemáticas entre los estudiantes. Entre sus hallazgos, se menciona que las actividades de investigación no solo permiten a los estudiantes desarrollar habilidades diversas, sino también comprender que el aprendizaje matemático va más allá de la resolución de ejercicios. Además, el estudio resalta la necesidad de que los profesores observen y analicen los procesos investigativos de los estudiantes. Esto incluye la consideración de factores como el origen de las ideas, su desarrollo, validación, la construcción y movilización de conceptos, las dinámicas grupales, las emociones y creencias de los estudiantes. Este enfoque proporciona una base sólida para futuras investigaciones en educación matemática, explorando cómo los métodos investigativos pueden ser integrados de manera efectiva en el currículo para mejorar el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

Limas y Jiménez (2017), basados en autores como Brocardo (2001), Fiorentini y Cristóvão (2006), Oliveira, Segurado, y Ponte (1996); destacan en su investigación la implementación de las actividades exploratorio-investigativas en la clase de matemáticas como alternativa a la educación tradicional. Ellos argumentan que estas actividades transforman el eje de la clase, pasando de un enfoque centrado en la transmisión de conocimiento a uno donde el estudiante es el protagonista del aprendizaje. En este enfoque, el profesor actúa como guía, orientador, que establece un punto de partida para la exploración, pero no el punto de llegada. Las tareas que se proponen aquí tienen una estructura abierta y con grado de dificultad que desafía a los estudiantes a pensar de forma crítica y creativa. Destacan la importancia de las actividades exploratorio-investigativas para el desarrollo o fortalecimiento de habilidades como la comunicación y la argumentación, ya que fomentan el trabajo colaborativo y la interacción entre estudiantes. Además, presentan las tres etapas fundamentales para estas actividades (introducción, desarrollo del trabajo y discusión). La investigación de Limas y Jiménez (2017) sirve como soporte para la metodología de este estudio, ya que las fases y las teorías que sustentan su trabajo se reflejan en las actividades hechas con cuadrados mágicos.

## Origen de los cuadrados mágicos

Los cuadrados mágicos tienen un origen alrededor del año 2200 a.C. Según Mencken (2014), una leyenda china relata que durante un paseo del gran emperador Yu por el río Amarillo, apareció una tortuga que llevaba grabada en su caparazón una tabla de números conocida como lo-shu. Esta tabla misteriosa es considerada como uno de los primeros ejemplos documentados de cuadrados mágicos, capturando la imaginación y la curiosidad por las matemáticas desde tiempos antiguos hasta la actualidad.

**Figura 1. Cuadrado mágico de orden 3.**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

*Figura 1.* Lo-shu.

Nota: Tomado de Mencken (2014).

Se define este cuadrado mágico como una tabla de orden 3 que dispone de los diferentes números enteros, de tal forma que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal para este caso den 15, lo que le dan un carácter casi místico. El lo-shu, como era conocido en China, se volvió un elemento indispensable en los hogares de adivinos y aparece mencionados en numerosos textos y obras literarias (Mencken, 2014). Este fenómeno matemático no solo llamo la atención de personas de la antigüedad, sino que también perduro a lo largo de diferentes periodos de la historia, despertando el interés de matemáticos e historiadores de todo el mundo.

Posteriormente, en india se dio a conocer otro cuadrado mágico, uno de orden 4, en el cual sus filas, columnas y diagonales sumaban 34 (ver figura 2), este es posiblemente el segundo cuadrado mágico conocido (Mencken, 2014).

**Figura 2.** *Cuadrado mágico de orden 4.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

*Figura 2.* Posiblemente el segundo cuadrado mágico conocido.

Nota: Tomado de Mecken (2014).

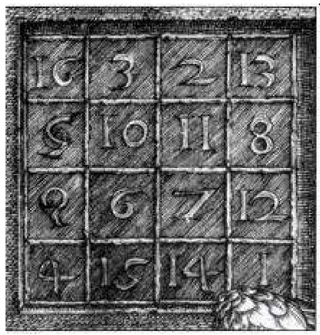
El gusto por los cuadrados mágicos trascendió a la edad media, donde fueron utilizados no solo como curiosidades matemáticas, sino también como atribuciones místicas. Se creía que estos cuadrados mágicos tenían poderes para predecir, curar enfermedades, proteger contra maleficios e incluso prevenir envenenamientos si se tallaban en vajillas de plata (Alegría, 2009).

Durante el renacimiento, los cuadrados mágicos continuaron siendo objetos de interés, utilizados tanto con fines terapéuticos como amuletos. Sin embargo, no todos eran considerados buenos; según Alegría (2009), algunos cuadrados mágicos eran vistos como relacionados con el diablo debido a su misterio.

Este contexto histórico revela como los cuadrados mágicos no solo captaron la imaginación de diversas civilizaciones, sino que también fueron integrados en prácticas culturales y supersticiones, reflejando la influencia que los conceptos matemáticos pueden tener en diferentes aspectos de la sociedad a lo largo del tiempo. Además, el conocimiento de los cuadrados mágicos no solo influyó en prácticas místicas y supersticiones, sino que también inspiro la construcción de obras arquitectónicas y estimulo la búsqueda y la creación de nuevos cuadrados mágicos. Esta interacción entre la matemática y la cultura evidencia la huella y el desarrollo de la humanidad.

El Cuadrado Mágico de Durero, es el más conocido y enigmático, de constante 34 utilizado en un grabado titulado Melancolía I. (Museo Británico, Burton de 1989, Gellert et al. 1989).

**Figura 3**. *Cuadrado mágico de Durero.*




Nota: Tomado de Historia y biografías (2024).

El grabado muestra una mezcla desordenada de los equipos científicos de la época, mientras que un intelectual se encuentra absorto en sus pensamientos.

El cuadrado mágico de Durero está localizado en la esquina superior derecha del grabado. Los números 15 y 14 aparecen en el centro de la fila inferior, indicando la fecha del grabado de 1514. Aunque la composición y descripción científica de los cuadrados mágicos se atribuye a distintos matemáticos del siglo XVII (Frenicle de Bessy o Pascal, entre otros), lo cierto es que el primero que presentó un método para su construcción fue el monje agustino Michael Stifel (1487-1567).

Sin embargo, el mundo musulmán ya conocía los secretos de los cuadrados mágicos desde muchos siglos antes, como es el caso de El-Bounni, a principios del siglo XIII, que ya había descrito cómo construir estos talismanes. En cualquier caso, fue Stifel quien ofreció esta sabiduría antigua al mundo occidental.

El año del grabado se escribe como 15 a 14, en la línea inferior; aún más, el número de la izquierda es 1, que es lo mismo que en un simple código masónico de los valores de [A = 1, B = 2, C = 3, D=4... Z = 26], y el número de la derecha de la fecha es igual a 4, la D de acuerdo con el valor asignado. Ambos números son por lo tanto intercambiables con las letras A y D, que eran casi religiosamente utilizado como monograma de Albrecht Durero. (A=1 y D=4)

La suma de todos los números en el cuadrado mágico de Durero es de 136, el número que esconde tanto el maestro y el título de la obra maestra. Durero utilizado otro, el latín, variante de la ortografía de su nombre: DVRER ALBRECHT:

ALBRECHT DVRER = (1 +12+ 2+ 18+ 5+ 3+8 +20) + (4+ 22 +18 +5+ 18) = 136

Cabe destacar que la matemática recreativa ha impulsado el avance de ramas de las matemáticas y de otras ciencias, demostrando cómo la curiosidad para buscar soluciones a problemas interesantes conduce a avances significativos en el conocimiento humano. Los cuadrados mágicos son probablemente uno de los pioneros problemas de matemática recreativa. (Historias y biografías, 2024)

## *Ejercicio y problema*

Los estudiantes regularmente se basan en la memorización y la repetición de ejercicios en el aula en la clase de matemáticas, lo que genera "aburrimiento" y desinterés, puesto que se tiene la creencia de que aprender y hacer matemáticas se trata únicamente de hacer cálculos (Segurado, 1998). Es fundamental distinguir entre estos conceptos: ejercicio, problema y situación problema. Un ejercicio implica seguir un algoritmo donde el estudiante memoriza pasos sin contexto especifico. Es una tarea cerrada y de fácil desarrollo (D 'amore, 2006). En este caso, el estudiante simplemente recuerda el algoritmo para aplicarlo al ejercicio particular, aprendiendo únicamente cuando aplicarlo sin comprender completamente su funcionamiento o su efectividad en distintas situaciones.

Según Ponte (2004), un problema se plantea en un contexto ficticio la mayoría de las veces y el estudiante, utiliza sus conocimientos previos para solucionarlo. Se trata de una actividad abierta que presenta algún grado de dificultad. Estos problemas pueden ser situaciones semireales o completamente ficticias, y obligan que el estudiante aplique conceptos previos para comprender el contexto y encontrar una solución. Además, fomentan el pensamiento crítico y reflexivo al permitir que el estudiante identifique como aplicar los temas aprendidos a situaciones cotidianas.

Según Priscila (2011), estos tipos de problemas comparten una característica común, y es que, en la mayoría de los casos, el profesor conoce de antemano la respuesta a lo que los estudiantes deben llegar y el camino que deben seguir para encontrar una solución válida. Por lo tanto, los problemas abiertos y las situaciones problemas incentivan a los estudiantes a explorar diferentes enfoques y estrategias para encontrar soluciones. Esto promueve la creatividad y la innovación, puesto que habilidades como estas, son de gran importancia en la resolución de problemas complejos en la vida real.

Perussi (2006) afirma que aprender matemáticas no es hacer ejercicios, sino que es ir más allá de la búsqueda de una respuesta correcta, trazar un camino, y, si es el caso, abandonarlo y buscar otro; lo importante siempre es ser capaz de justificar elecciones, decisiones y acciones. En este sentido, es importante que en el aula se dé un papel con menor protagonismo a la solución de ejercicios. Por el contrario, se debe fomentar la investigación y la indagación por parte de los estudiantes, permitiéndoles explorar temas que les interesa y ver las matemáticas desde una perspectiva diferente.

De igual manera, es importante que los diferentes entes involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje comprendan que la cantidad de ejercicios en un cuaderno no es un indicador de aprendizaje (D'Amore, 2006). El aprendizaje matemático implica un proceso de exploración, razonamiento y justificación, que no siempre se refleja en la cantidad de ejercicios resueltos; es necesario que se apoye una visión más enriquecedora y profunda del proceso educativo (D'Amore, 2006).

Por otro lado, al diferenciar un ejercicio, problema y situación problema, se fomenta el desarrollo del pensamiento crítico y del pensamiento analítico en los estudiantes. De esta forma, les permite no solo resolver problemas, sino también comprender los conceptos involucrados. La capacidad de enfrentar y resolver problemas es una habilidad esencial en cualquier campo profesional (Perussi, 2006). Además, al adaptarse a distintos tipos de problemas desde la educación inicial, los estudiantes están mejor preparados para enfrentar los diferentes desafíos que se presentaran en su futuro y en su proyecto de vida.

### *Contrato didáctico*

El Contrato Didáctico se define como un acuerdo explicito para intercambiar opiniones, necesidades y expectativas entre el estudiante y el profesor, promoviendo su colaboración en los procesos de enseñanza-aprendizaje, ya sea de manera oral o escrita (Garcia y Fontea, 2006). Esta estrategia educativa ayuda a los estudiantes a expresar con mayor claridad sus pensamientos, ideas y experiencias, y mejora su comprensión en diversos temas al permitir que se apoyen en el profesor para aclarar sus inquietudes.

Según Brousseau (1998), el contrato didáctico es determinante en el proceso enseñanza-aprendizaje, porque estructura la interacción entre el estudiante y el profesor, estableciendo normas bajo las cuales se llevará a cabo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esto incluye aspectos como la presentación de conocimientos, la explicación de los conceptos, la forma de resolver problemas y las estrategias de evaluación. En este sentido, si el contrato didáctico se interpreta de manera estricta, podría limitar la flexibilidad del profesor para adaptarse a las necesidades individuales de los estudiantes o para explorar métodos de enseñanza alternativos que podrían ser más efectivos en ciertas situaciones (Oliveira et al., 1996).

En algunos casos, el contrato didáctico puede llegar a cortar la creatividad tanto del profesor como de los estudiantes. Esto podría limitar la exploración de nuevos enfoques o la resolución creativa de problemas; por otro lado,si se centra demasiado en el resultado final (por ejemplo, en la obtención de respuestas correctas), podría descuidarse la importancia del proceso de aprendizaje y de la comprensión de los conceptos matemáticos, además, los estudiantes podrían depender demasiado del profesor en lugar de desarrollar habilidades de pensamiento crítico y autonomía (Facanali, 2004).

Es fundamental analizar el contrato didáctico en esta investigación, puesto que, aunque la actividad busca promover la autonomía de los estudiantes, la necesidad de presentar sus hallazgos de forma clara y rigurosa para el profesor genera una cierta tensión en el contrato didáctico. Esa tensión evidencia la forma en que los estudiantes se expresan y la forma en que validan sus conjeturas. Así mismo, se evidencia como el contrato didáctico puede influir en la comunicación entre el profesor y el estudiante, el lenguaje usado por los estudiantes, la forma de presentar sus hallazgos y la forma en que los estudiantes perciben la evaluación de su trabajo.

### *Actividad exploratorio-investigativa*

Esta actividad involucra a los estudiantes, de tal forma que investiguen de acuerdo con sus capacidades e intereses, para ello hay que permitirles que indaguen, tomen decisiones en grupo; es decir, que trabajen colaborativamente, lo que contribuye a que construyan su propio conocimiento, lo que implica que se genere un aprendizaje significativo (Moreno, 2012). De manera que este tipo de actividad se desarrollen tres momentos diferentes: la introducción, el desarrollo de la actividad y finalmente la discusión y reflexión (Ponte et al., 2003).

Esta estrategia fomenta el desarrollo de habilidades críticas, capacitando al estudiante para justificar sus elecciones, decisiones y acciones a lo largo del proceso (Ponte, 2004). Además, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) sugieren que las clases investigativas comienzan con el estudiante, formulando preguntas a resolver, ideando formas de presentar y organizar la información, planificando estrategias de solución, sometiéndolas a prueba, aplicándolas, justificando y validando los resultados. En este enfoque, el estudiante es el protagonista de su propio aprendizaje, mientras que el profesor actúa como guía. Esta dinámica, junto con los desafíos específicos de cada contexto, facilita la integración de nuevas tendencias pedagógicas en el aula, permitiendo que los estudiantes participen activamente en la construcción de su propio conocimiento (Tovar, 2016).

Dependiendo de cómo se desarrollan estas clases, la actividad puede limitarse a la fase de exploración y problematización (Fiorentini y Cristóvão, 2006); sin embargo, si durante la actividad se permite la formulación de preguntas o conjeturas que desencadenen un proceso de ensayo, prueba y demostración, entonces si se estaría hablando de la investigación de una situación matemática elemental. Debido a esta naturaleza flexible de la tarea, clase o actividad pueden convertirse en exploraciones o en actividades de investigación (Moreno, 2012).

### *Aulas investigativas*

Estas aulas no se limitan a ser espacios físicos, sino que representan un cambio de paradigma en la enseñanza, donde la investigación se convierte en el eje central del aprendizaje (Ponte, 2004). Los estudiantes guiados por el profesor, que actúa como facilitador, se convierten en protagonistas activos en la construcción de conocimiento, desarrollando habilidades de análisis, interpretación crítica y comunicación (Ponte, 2010).

Las aulas investigativas fomentan un ambiente de exploración y descubrimiento, donde los estudiantes aprenden a formular preguntas, buscar respuestas, analizar datos y presentar sus conclusiones de manera coherente y creativa (Ponte, 2006). Este proceso no solo les permite desarrollar competencias académicas, sino que también les brinda la oportunidad de desarrollar su autonomía, su capacidad de trabajo en equipo y su espíritu crítico (Ponte, 2010).

La implementación de las aulas investigativas no solo implica un cambio en la metodología de enseñanza, sino que también requiere de una transformación en la mentalidad tanto de los profesores como los estudiantes. Se necesita de un enfoque centrado en la construcción colectiva del conocimiento, estimulando la curiosidad y la participación activa de todos. La creación de estos espacios de aprendizaje abre una puerta a una educación más dinámica, significativa y preparada para los desafíos del mundo actual (Ponte, 2006).

### *Rol del profesor y del estudiante en el aula investigativa*

En un aula investigativa, el rol del profesor se transforma de un transmisor de conocimiento a un facilitador del aprendizaje. Como lo describe Ponte (2003), el profesor debe convertirse en un guía que estimula la curiosidad y la investigación, fomentando un ambiente de exploración y descubrimiento.

Su función principal es crear las condiciones para que los estudiantes se involucren activamente en el proceso de aprendizaje, proporcionando herramientas, recursos y estrategias para que los estudiantes puedan formular preguntas, buscar respuestas y construir su propio conocimiento.

El rol del estudiante en un aula investigativa es el rol de un investigador activo. Su participación es fundamental para el éxito de su proceso de aprendizaje. Según Ponte (2003), los estudiantes deben ser capaces de identificar problemas, formular preguntas, buscar información, analizar datos, interpretar resultados y comunicar sus hallazgos. De esta manera, los estudiantes se convierten en protagonistas de su propio aprendizaje, desarrollando habilidades de pensamiento crítico, creatividad y resolución de problemas.

La importancia de la colaboración entre profesor y estudiante en el aula investigativa es esencial (Brocardo, 2001). El profesor debe actuar como un mediador, guiando a los estudiantes en su proceso de investigación, mientras que los estudiantes deben asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, participando activamente en la construcción del conocimiento. El éxito de un aula investigativa depende de la interacción dinámica entre profesor y estudiante, donde ambos roles son complementarios y esenciales para la formación integral del estudiante (Brocardo, 2001).

## Metodología

Ponte (2003) propone un modelo para el desarrollo de actividades exploratorio-investigativas que se divide en diferentes fases, cada una con características y objetivos específicos. Estas fases son: introducción, desarrollo del trabajo y discusión de resultados.

En esta fase de introducción se busca que los estudiantes se acerquen al tema de estudio de forma natural, mediante la observación, la exploración y el dialogo (Ponte, 2003). Se busca despertar la curiosidad, generar preguntas y despertar el interés por investigar (Ponte, 2010). El profesor guía a los estudiantes en la formulación de preguntas de investigación, la definición de los objetivos, la selección de las estrategias de investigación y la organización del trabajo. Se busca que los estudiantes comprendan el problema a investigar y elaboren un plan de acción (Ponte, 2010).

En esta fase para el desarrollo del trabajo, los estudiantes se involucran activamente en la búsqueda de información, utilizando diversas fuentes. Se busca que los estudiantes adquieran habilidades de investigación y que aprendan a seleccionar información relevante y fiable (Ponte, 2003).

Finalmente, en la fase de discusión los estudiantes comparten los resultados de su investigación de manera organizada y coherente, utilizando diferentes medios como presentaciones, informes, debates, exposiciones, entre otros. Se busca que los estudiantes desarrollen habilidades de comunicación, de presentación y argumentación (Ponte, 2003).

Se reflexiona sobre el proceso de investigación, se evalúan los resultados obtenidos e identifican las fortalezas y debilidades del trabajo realizado y se plantean nuevas preguntas para futuras investigaciones. Se busca que los estudiantes aprendan de sus experiencias, que se autoevalúen y motiven para seguir investigando (Ponte, 2003).

Para esta investigación, se llevaron a cabo actividades durante dos sesiones de clase, cada una con una duración de 2 horas, con la participación de 19 estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de Colombia.

La actividad principal consistió en la formulación y resolución de cuadrados mágicos de orden par e impar. El objetivo era que los estudiantes obtuvieran diversas estrategias para resolver estos cuadrados en el menor tiempo posible. Desde el inicio, se enfatiza la importancia de documentar detalladamente las características, patrones o reglas identificados en cada cuadrado mágico resuelto, así como la validación de las conjeturas propuestas por sus compañeros. Los estudiantes trabajaron en grupos de 3 a 4 personas, fomentando la explicación y la argumentación de sus razonamientos entre ellos antes de compartirlos con el profesor. Esta dinámica promovió la validación y refinamiento de sus procesos de pensamiento matemático.

Las sesiones se realizaron durante la mañana de los lunes y martes. Cada tarea se presentó por escrito y se leyó en grupo para aclarar dudas y compartir hallazgos. El profesor guio la actividad y observó el trabajo escrito y las discusiones grupales para ofrecer orientación cuando fue necesario. A continuación, se detallan las tareas que orientan el trabajo de los estudiantes:

1. Resolver cuadrados mágicos de orden par para identificar y explorar las particularidades de este tipo de cuadrados.
2. Resolver cuadrados mágicos de orden impar, desafiando la creatividad y explorando diferentes formas de comunicar hallazgos.
3. Investigar y escribir sobre la relación entre el orden del cuadrado y la suma mágica, buscando patrones, semejanzas, diferencias y características específicas.
4. Analizar la posibilidad de determinar rápidamente la ubicación de cada número en un cuadrado mágico de un orden especifico.

Esta última tarea, centrada en la formulación y prueba de conjeturas, representó el desafío más abierto y requirió el uso más extenso de habilidades para la resolución de problemas. Estas actividades no solo proporcionaron a los estudiantes la oportunidad de explorar y aplicar conceptos matemáticos de práctica, sino que también fomentaron el desarrollo de habilidades críticas como el razonamiento lógico, la colaboración en equipo y la comunicación de ideas matemáticas complejas.

## Discusión y resultados

En esta sección del artículo, se analizan y se discuten los resultados obtenidos durante la actividad "Haciendo magia con cuadrados", donde los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de Colombia participaron activamente en la formulación y desarrollo de cuadrados mágicos de orden par e impar. La actividad los llevó a encontrar diferentes estrategias para resolver estos cuadrados en el menor tiempo posible, documentando detalladamente los patrones, reglas o características identificadas en cada uno de ellos. Además, se alentó a los estudiantes a proponer conjeturas y validar mediante pruebas rigurosas.

La actividad indicaba lo siguiente: Plantee y desarrolle cuadrados mágicos de orden par e impar y encuentre diferentes estrategias para desarrollarlos en el menor tiempo posible. Describe de forma detallada patrones, reglas o características identificadas en cada uno de ellos. Son válidas todas las conjeturas, pruébalas o refútalas ¡Sin excepción alguna!

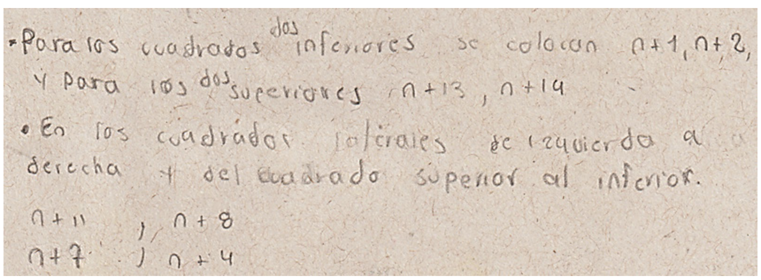
Teniendo en cuenta las fases propuestas por Ponte (2003), en la fase de introducción, los estudiantes mostraron un interés inicial por la resolución de cuadrados mágicos, especialmente por los de orden 3, donde ya tenían conocimientos previos. Sin embargo, no se evidenció una exploración profunda del tema ni la formulación de preguntas que impulsaran una investigación más detallada. Si bien la actividad no requirió la elaboración de un plan de acción formal, la tarea 3 buscaba que los estudiantes investigaran la relación entre el orden del cuadrado y la suma mágica, pero se limitaron a la aplicación de conocimientos previos. No se observó una búsqueda activa de nuevos patrones o regularidades.

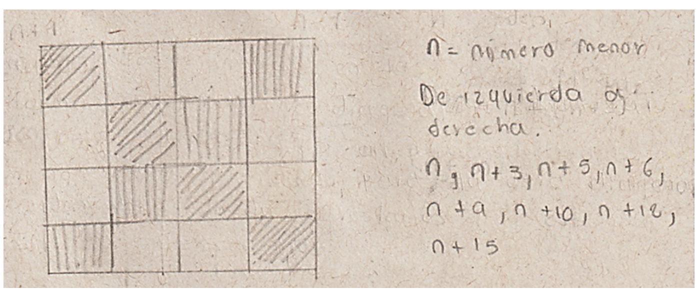
En la fase para el desarrollo del trabajo, la actividad se centró en la resolución de cuadrados mágicos, por lo que la recolección de datos se limitó a la observación de los patrones dentro de cada cuadrado. Los estudiantes demostraron habilidades para identificar patrones simples, pero no se observó una búsqueda sistemática de información profunda o una exploración de diferentes fuentes. Los estudiantes lograron analizar los datos recopilados, identificando patrones en cuadrados de orden 3 y 4 principalmente, pero no se evidenció análisis más profundos, especialmente en cuadrados de orden mayor. Esto podría indicar una falta de exploración más rigurosa y de aplicación de herramientas.

En la fase final, los estudiantes lograron comunicar sus hallazgos de manera clara y coherente, aunque se observó uso de lenguaje que imitaba al profesor, quizás por la influencia del contrato didáctico. La comunicación se centró en la descripción de las estrategias usadas para resolver los cuadrados, pero no se observó un análisis más profundo de los resultados. La actividad no incluyó una fase de evaluación formal, aunque se observaba que los estudiantes, al finalizar, identificaron la necesidad de profundizar en la exploración de cuadrados mágicos.

Haciendo referencia a las primeras tareas, se muestran algunas de las respuestas por los estudiantes y como intentaron generalizar sus hallazgos.

Figura 4. Respuestas de los estudiantes.



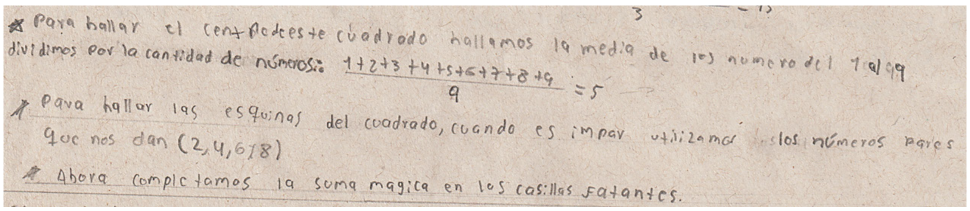




Nota: Fotografía tomada de la respuesta de los estudiantes.

En la figura 4, el grupo de estudiantes empleó una estrategia centrada en el número más pequeño, el 1, al que denominaron "n". Aunque su intención era clarificar su estrategia, el uso de un lenguaje que imita al del docente complicó la comprensión para un lector externo. Este episodio ejemplifica la influencia del contrato didáctico en la actividad.

Se observó que los estudiantes lograron completar los cuadrados mágicos, tanto de orden par como impar, utilizando los números iniciales sin verificar estrategias, predominantemente a través de ensayo y error. Se notó un mayor dominio en el desarrollo de cuadrados mágicos de orden 3, posiblemente debido a que este orden fue estudiado previamente antes de la realización de la actividad. Además, se destacó el interés demostrado por los estudiantes en explorar y validar diferentes métodos para construir estos cuadrados con diferente orden.

Figura 5. Respuestas de los estudiantes.



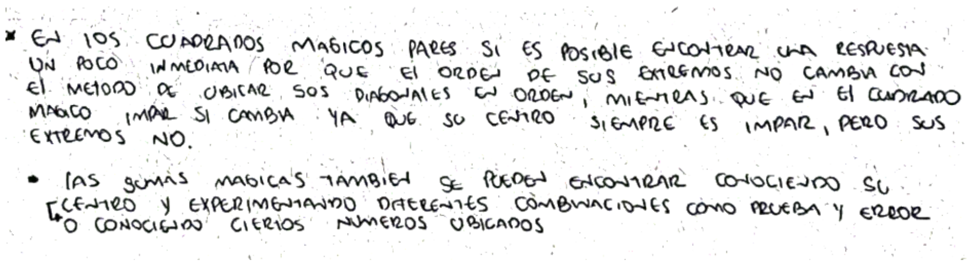

Nota: Fotografía tomada de la respuesta de los estudiantes.

En la figura 5, se observa que, en la primera parte del proceso para encontrar el número ubicado en el centro del cuadrado mágico de orden par, utilizaron la fórmula de la media aritmética. Este enfoque refleja el uso de conocimientos previos por parte de los estudiantes para resolver el problema. Sin embargo, mientras que el cuadrado de 3x3 fue manejado con relativa facilidad como un ejercicio, los cuadrados mágicos de otros órdenes presentaron mayores desafíos para los estudiantes. Esta observación resalta cómo la familiaridad con ciertos conceptos y técnicas puede influir en la percepción y resolución de problemas matemáticos, sugiriendo la necesidad de explorar estrategias menos comunes y diversas en la enseñanza de los cuadrados mágicos de diferentes órdenes.

En la tarea 3, los estudiantes documentaron la relación entre el orden del cuadrado y la suma mágica que habían identificado previamente en los cuadrados de orden 3. Sin embargo, se evidenció que los estudiantes intentaron descubrir nuevas relaciones, regularidades adicionales en los cuadrados de otros órdenes. Este hallazgo sugiere una tendencia hacia la aplicación de conocimientos establecidos sin explorar más allá de lo familiar, lo cual podría limitar la capacidad de los estudiantes para identificar y generalizar principios matemáticos en contextos diversos.

Finalmente, en la tarea 4, se observó que los estudiantes no exploraron suficientemente las posibilidades. Se limitaron a identificar patrones aritméticos simples entre los números de cada cuadrado, sin profundizar en relaciones más complejas que podrían haber sido abordadas dada su escolaridad académica y el nivel de exigencia esperado. Este resultado muestra la necesidad de promover una exploración más rigurosa y creativa en la resolución de problemas.

**Figura** 5. Respuestas de los estudiantes.


* EN LOS CUADRADOS MAGICOS PARES SI ES POSIBLE ENCONTRAR UNA RESPUESTA UN POCO INMEDIATA POR QUE EL ORDEN DE SUS EXTREMOS NO CAMBIA CON EL METODO DE UBICAR SOS DIAGONALES EN ORDEN, MIENTRAS QUE EN EL CUADRADO MAGICO IMPAR SI CAMBIA YA QUE SO CENTRO SIEMPRE ES IMPAR, PERO SUS EXTREMOS NO.

• LAS SUMAS MAGICAS TAMBIEN SE PUEDEN ENCONTRAR CONOCIENDO SU CENTRO Y EXPERIMENTANDO DIFERENTES COMBINACIONES COMO PRUEBA Y ERROR O CONOCIENDO CIERTOS NUMEROS UBICADOS

Nota: Fotografía tomada de las respuestas de los estudiantes.

# Conclusiones

Los cuadrados mágicos como actividad recreativa se estudian en casi todos los niveles académicos, pero la mayor parte de las investigaciones sobre cuadrados mágicos se basa en sus características básicas de suma y resta, no en sus características y propiedades. Esta visión es superficial, por lo que es una buena idea investigarla más a fondo, porque puede despertar el interés y la curiosidad de los estudiantes por las matemáticas.

Propiciar ambientes de aprendizaje de cuadrados mágicos es importante, y de la mano con las actividades exploratorio-investigativas promueven la libertad y experimentación, aunque se requiera que los estudiantes documenten y comuniquen sus hallazgos de manera que el profesor comprenda, y sus demás compañeros también, cumpliendo diversos estándares de claridad y rigor en la presentación de los resultados. Además, hay una notable influencia en la forma en que los estudiantes validan conjeturas y la forma en que el profesor evalúa sus resultados.

Lamentablemente, en nuestro País existe un elemento educativo restringido, caracterizado por la preferencia por los métodos tradicionales y la resistencia al cambio, en función de las tradiciones de cada estudiante en particular. Necesitamos alejarnos de la educación tradicional y adoptar otros métodos educativos, donde los profesores guíen los procesos de enseñanza y aprendizaje; enfrentamos el desafío de formar personas que sean capaces de preguntar, cuestionarse, debatir y argumentar con una perspectiva clara y precisa.

Al poner en marcha la teoría de Ponte, se evidenció una ligera diferencia entre el objetivo y el resultado real, puesto que fue una buena actividad para que los estudiantes se interesaran en las matemáticas, pero les ayudó poco para involucrarse y analizar completamente el contenido de la actividad; cabe resaltar que dejan fases sin terminar. El enfoque principal de los estudiantes fue resolver los cuadrados, pero exploraron muy poco la posibilidad de encontrar patrones y relaciones más complejas a las ya conocidas.

Era demasiado pedir el conocimiento previo por lo que se fomentó muy poco la investigación independiente, autónoma y la búsqueda de información de los estudiantes. Los cuadrados se resolvieron principalmente como una tarea, no como una investigación que involucre pensamiento crítico y habilidades comunicativas. De ahí, que se hace evidente la necesidad de diseñar actividades exploratorio-investigativas con más frecuencia, que abarque todas las fases de la metodología descrita por Ponte y que promueva la búsqueda de conocimiento por parte de los estudiantes.

Un buen enfoque involucra preguntar, recopilar datos, pensar críticamente y comunicar. Solo así puede usar de manera plena el potencial de las actividades exploratorio-investigativas, como herramienta para promover un aprendizaje significativo y autónomo. Estas actividades ayudan a innovar y cambiar la mentalidad de los estudiantes, que se adaptan al contexto social y cultural, no solo facilitan la expresión de ideas y mejora las habilidades de escritura, sino que también sirven como estrategias de fortalecimiento de conceptos matemáticos básicos.

## REFERENCIAS

Alegría, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos. Sigma, 34, 107-128.

Acuña, S., Arellano, M., y Baraona, R. (2010). Cuadrados mágicos y matrices mágicas. Revista del profesor de matemáticas. Sociedad de Matemática de Chile., 11, 22-38.

Brocardo, J. (2001). As investigações na aula de matemática: um projeto curricular no 8º ano. Lisboa.

Brousseau, J. (1998). Le contrat didactique : le milieu. Recherches en Didactique des Mathematiques, 1990, 9 (9.3), pp.309 - 336. hal-00686012

Brousseau, G. (1997). Los diferentes roles del maestro. In C. Parra & I. Saiz (Eds.), Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones (pp. 65–94). Buenos Aires - Barcelona - México: Paidós Educador.

D´Amore , B. (2006). Didáctica de la Matemática. Bogotá: Didácticas magisterio.

Domínguez, L. G. (2016). Procesos de Generalización a partir de cuadrados mágicos. Bogotá.Facanali, J. (2004). Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática. Campinas.

Fiorentini, D. y Cristóvão, E. (2006). Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Educación Matemática, 06(03), pp. 37-51.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 18(1), 7–34. https://revue-rdm.com/1998/evolucion-de-la-didactica-de-las/

Historias y biografías, 2024.Cuadrado Mágico de Durero: Descripción y Solución https://Cuadrado Mágico de Durero: Descripción y Solución (historiaybiografias.com)

Limas Berrio, L. J., y Jiménez Espinosa, A. (2017). Actividades exploratorio-investigativas en clases de matemáticas. Eco Matemático, 8(1), 93–105. https://doi.org/10.22463/17948231.1480

Mencken , J. (2014). Cuadrados mágicos. Matemáticas amenas.Moreno, C. (2012). La construcción del conocimiento: un nuevo enfoque de la educación actual. Revista Sophia: Colección de Filosofía de la Educación.

Oliveira, H., Segurado, M., & Ponte, J. P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. Actas do ProfMat96, 207-213.

Perussi, R. (2006). Tarefas Investigativas de Matemática: Uma Análise de Três Alunas de 8ª Série do Ensino Fundamental. Curitiba.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. Revista iberoamericana de educación matemática, 13-30.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autentica editora.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), La actividad matemática en el aula (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Priscila, J. (2011). investigação matemática em sala de aula: as mudançasprocedimentais de alunos do ensino medio. Actas del 3 congreso uruguayo de educación matemática.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. Quadrante, 7(2), 5-40.

Tovar Ramírez, L. (2016). Desarrollo del pensamiento geométrico con metodologías activas. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales., Manizales.